

Nové možnosti rozvoje vzdělávání na Technické univerzitě v Liberci
Specifický cíl A2: Rozvoj v oblasti distanční výuky, online výuky a blended learning

NPO_TUL_MSMT-16598/2022



Tkaniny – mechanika tkanin

Ing. Iva Mertová, Ph.D.



Financováno
Evropskou unií
NextGenerationEU



Národní
plán
obnovy



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



Tkaniny – mechanika tkanin

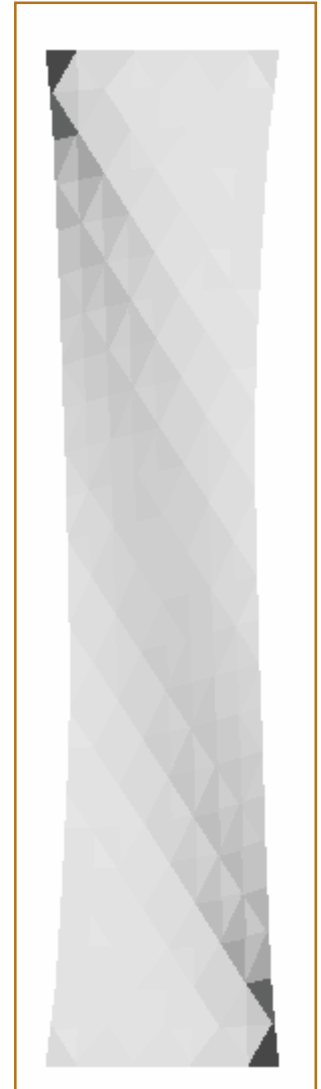
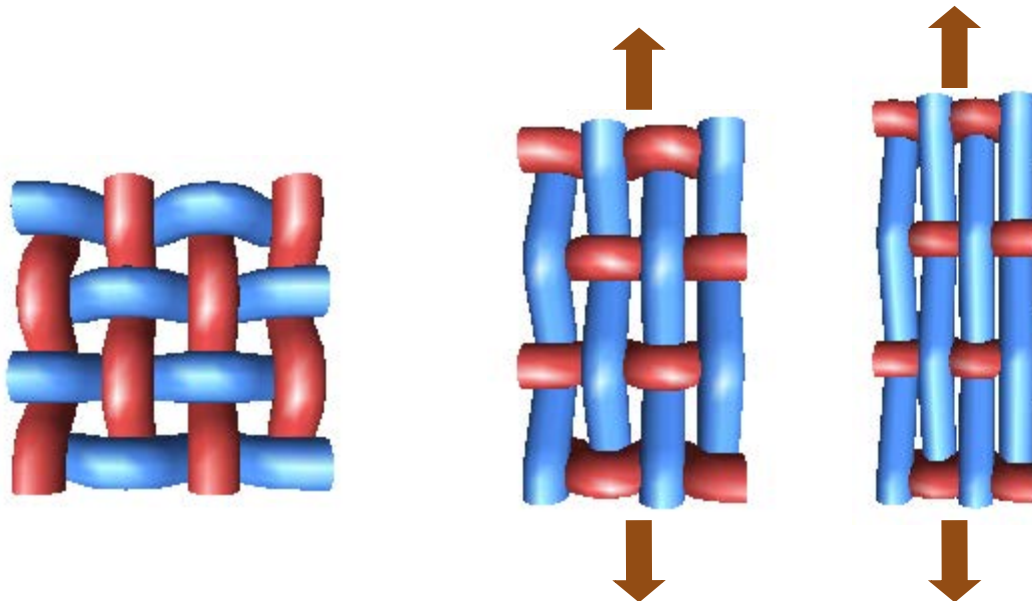
cvičení 5 navazuje na přednášku| **Tkaniny 2**

„**Mechanika tkanin**“

Deformace tkaniny jednoosým namáháním v tahu

- Prodloužení tkaniny ve směru namáhání
- Zúžení tkaniny ve směru kolmém

Nezmění se počet namáhaných osnovních, příp. útkových nití
Změna dostav D_o , D_u → změna zvlnění (h_o , h_u , λ_o , λ_u)



„NEDEFORMOVATELNÉ“ NITĚ (nejjednodušší model)

Předpoklad 1:

Tkanina – plátno – napjatá po osnově a/nebo po útku zachovává geometrii Peirceova modelu.

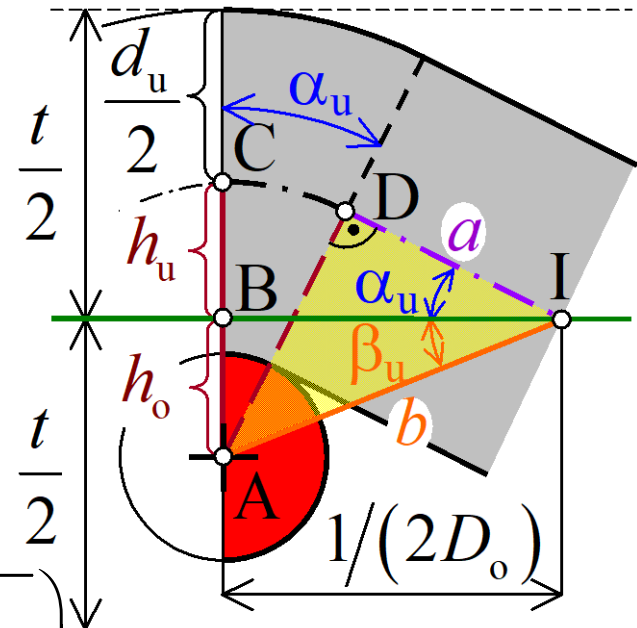
Předpoklad 2:

Nitě ve tkanině jsou

- a) dokonale ohebné, avšak
- b) neroztažné a
- c) příčně nedeformovatelné (kruh)

Délka „půlvlny“ útkové nitě:

$$l_u = CD_u + a_u \quad l_u = \frac{d_o + d_u}{2} \left(\alpha_u + \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1} \right)$$

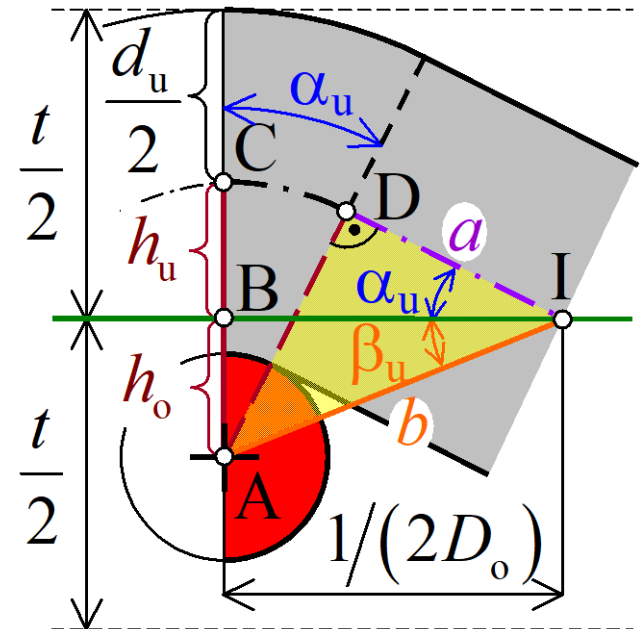


d_o [mm] průměr osnovní příze, d_u [mm] průměr útkové příze, D_o [1/mm] dostava osnovy, D_u [1/mm] dostava útku, l_u [-] délka útkové nitě ve vazné půlvlně, CD_u [mm] délka oblouku útkové nitě, a_u [mm] délka úsečky na útkové niti, α_u [rad] úhel provázání útku, λ_o [mm] relativní výška vazné vlny osnovy, λ_u [mm] relativní výška vazné vlny útku

Relativní délka půlvlny útkové nitě:

$$\rho_u = \frac{2l_u}{d_o + d_u} \quad \rho_u = \alpha_u + \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1}$$

$$\rho_u = \arctg \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_u \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1 + \operatorname{tg} \beta_u}} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1}$$



Je-li $\rho_u \leq \pi/2$, pak existuje nějaké $\lambda_o \in \langle 0, 1 \rangle$ pro které je daná hodnota

$\rho_u = \rho_{u,m}$. (osnova „narazí“ na mezní dostavu útku)

Je-li $\rho_u > \pi/2$, pak pro žádné $\lambda_o \in \langle 0, 1 \rangle$ není takové ρ_u mezním.
(osnova se zcela narovná)

Výpočet tažnosti a příčné kontrakce tkaniny při jejím napnutí po osnově
(při neroztažných a příčně nedeformovatelných nitích)

I) VELIČINY VÝCHOZÍ TKANINY

a) **zadané**

- dostavy osnovy a útku... D_o, D_u
- průměry nití osnovní a útkové... d_o, d_u
- rel. výšky vazných vln osnovy a útku... λ_o, λ_u

b) **vypočítané**

$$\beta_o = \arctg [D_u \lambda_u (d_o + d_u)]$$

$$\beta_u = \arctg [D_o \lambda_o (d_o + d_u)]$$

$$\rho_o = \arctg \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_o \sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2 \beta_o} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2 \beta_o} - 1 + \operatorname{tg} \beta_o}} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2 \beta_o} - 1}$$

$$\rho_u = \arctg \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_u \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1 + \operatorname{tg} \beta_u}} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1}$$

II) VELIČINY TKANINY NAPNUTÉ PO OSNOVĚ

(Pozn.: Veličiny napnuté tkaniny – kromě konstantních veličin ρ_o , ρ_u a d_o , d_u – budou značeny symbolem *.)

1. Bylo-li vypočteno $\rho_u < \pi/2$ („narazí“ na mezní dostavu)

$$\lambda_o^* = \cos \rho_u$$

$$\lambda_u^* = 1 - \lambda_o^*$$

$$\rho_o = \operatorname{arctg} \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_o^* \sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1 + \operatorname{tg} \beta_o^*}} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1}$$

$$\beta_u^* = \pi/2 - \rho_u$$

$$D_o^* = \operatorname{tg} \beta_u^* / [\lambda_o^* (d_o + d_u)]$$

$$D_u^* = \operatorname{tg} \beta_o^* / [\lambda_u^* (d_o + d_u)]$$

2. Bylo-li vypočteno $\rho_u > \pi/2$ (osnova se zcela narovná)

$$\lambda_o^* = 0 \quad \lambda_u^* = 1$$

$$\beta_u^* = 0 \quad \beta_o^* = \operatorname{arctg} \frac{1}{\rho_o}$$

$$\rho_u = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{D_o^{*2} (d_o + d_u)^2} - 1}} + \sqrt{\frac{1}{D_o^{*2} (d_o + d_u)^2} - 1}$$

$$D_u^* = \frac{1}{\rho_o (d_o + d_u)}$$

III) VELIČINY TKANINY NAPNUTÉ PO ÚTKU

(Pozn.: Veličiny napnuté tkaniny – kromě konstantních veličin ρ_o , ρ_u a d_o , d_u – budou značeny symbolem *.)

1. Bylo-li vypočteno $\rho_o < \pi/2$ („narazí“ na mezní dostavu)

$$\lambda_u^* = \cos \rho_o$$

$$\lambda_o^* = 1 - \lambda_u^*$$

$$\rho_u = \arctg \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_u^* \sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_u^*} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_u^*} - 1 + \operatorname{tg} \beta_u^*}} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_u^*} - 1}$$

$$\beta_o^* = \pi/2 - \rho_o$$

$$D_o^* = \operatorname{tg} \beta_u^* / [\lambda_o^* (d_o + d_u)]$$

$$D_u^* = \operatorname{tg} \beta_o^* / [\lambda_u^* (d_o + d_u)]$$

2. Bylo-li vypočteno $\rho_o > \pi/2$ (útek se zcela narovná)

$$\lambda_o^* = 1 \quad \lambda_u^* = 0$$

$$\beta_o^* = 0 \quad \beta_u^* = \operatorname{arctg} \frac{1}{\rho_u}$$

$$\rho_o = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{D_u^{*2} (d_o + d_u)^2} - 1}} + \sqrt{\frac{1}{D_u^{*2} (d_o + d_u)^2} - 1}$$

$$D_o^* = \frac{1}{\rho_o (d_o + d_u)}$$

Uvažujme obdélníkový vzorek tkaniny o délkách $l_{t,o}$ po osnově a $l_{t,u}$ po útku. Napnutím ve směru osnovy se $l_{t,o}$ prodlouží na $l_{t,o}^*$ a $l_{t,u}$ se zmenší (zúží) na $l_{t,u}^*$.

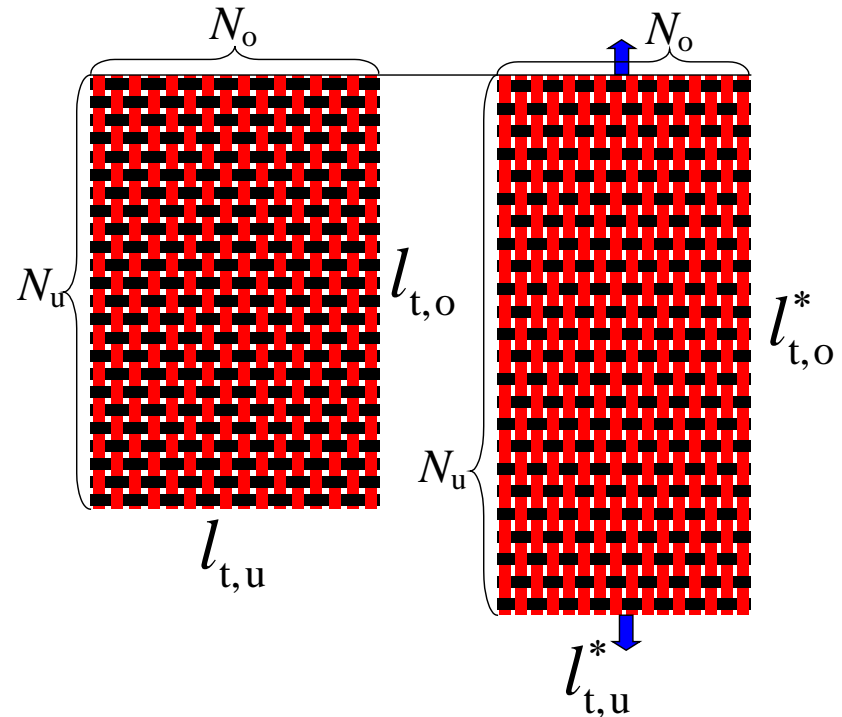
Počet nití osnovních N_o a útkových N_u se napnutím tkaniny nemění.

$$N_o = D_o l_{t,u} = D_o^* l_{t,u}^*,$$

$$l_{t,u}^* / l_{t,u} = D_o / D_o^*$$

$$N_u = D_u l_{t,o} = D_u^* l_{t,o}^*,$$

$$l_{t,o}^* / l_{t,o} = D_u / D_u^*$$



Tažnost po osnově... a_o

$$a_o = (l_{t,o}^* - l_{t,o}) / l_{t,o} = \overbrace{l_{t,o}^* / l_{t,o}}^{=D_u / D_u^*} - 1,$$

$$a_o = D_u / D_u^* - 1$$

Poměrné „prodloužení“ po útku... ε_u
 ($\varepsilon_u < 0$)

$$\varepsilon_u = (l_{t,u}^* - l_{t,u}) / l_{t,u} = \overbrace{l_{t,u}^* / l_{t,u}}^{=D_o / D_o^*} - 1,$$

$$\varepsilon_u = D_o / D_o^* - 1$$

Poměr příčné kontrakce...

$$\eta_o = -\varepsilon_u / a_o = -(D_o / D_o^* - 1) / (D_u / D_u^* - 1),$$

$$\eta_o = \frac{1 - D_o / D_o^*}{D_u / D_u^* - 1}$$

Pro napínání tkaniny po útku platí analogicky všechny předchozí závěry a rovnice, a to po záměně indexů 'o' a 'u'.

Pevnost tkaniny (po osnově)

Uvažujme vzorek výchozí tkaniny napínaný po osnově.

Šířka vzorku... $l_{t,u}$ (obv. 0,05m)

Dostava osnovy... D_o

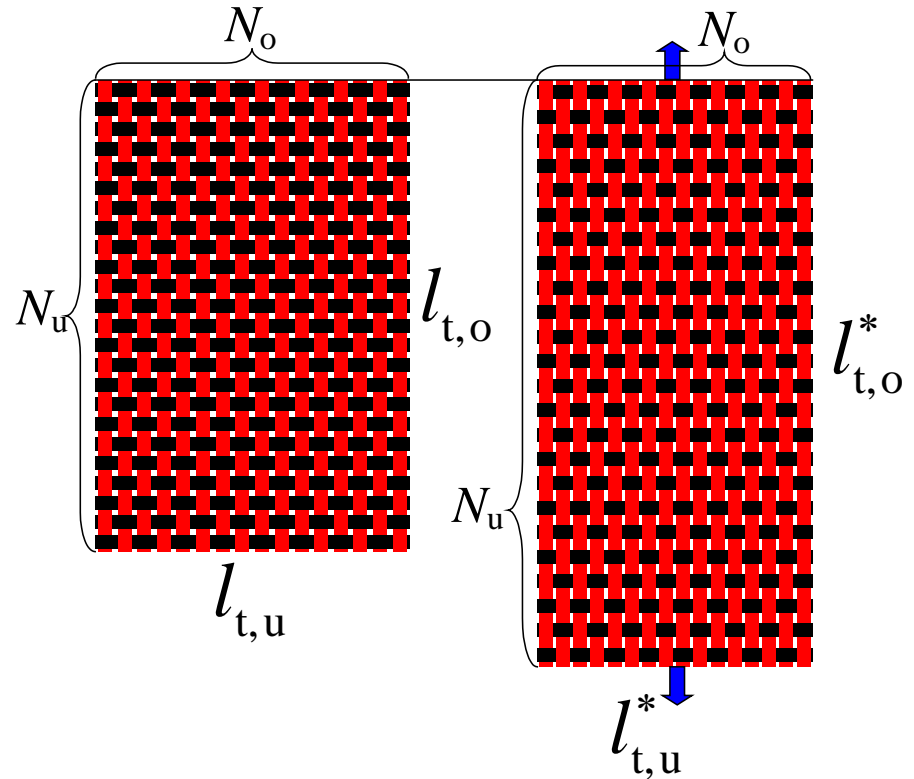
Počet osnovních nití ve vzorku

$$N_o = D_o l_{t,u}$$

Pevnost tkaniny po osnově... F_o
Pevnost na jednu nit po osnově

$$F_{o,1} = F_o / \overbrace{N_o}^{=D_o l_{t,u}} = F_o / D_o l_{t,u}, \quad \text{a odtud}$$

$$F_o = F_{o,1} D_o l_{t,u}$$



Pevnost nitě (výchozí volná nit) osnovní... P_o

Pozn.: Pro pevnost tkaniny po útku se analogicky užijí symboly se zaměněnými indexy 'o' a 'u'.

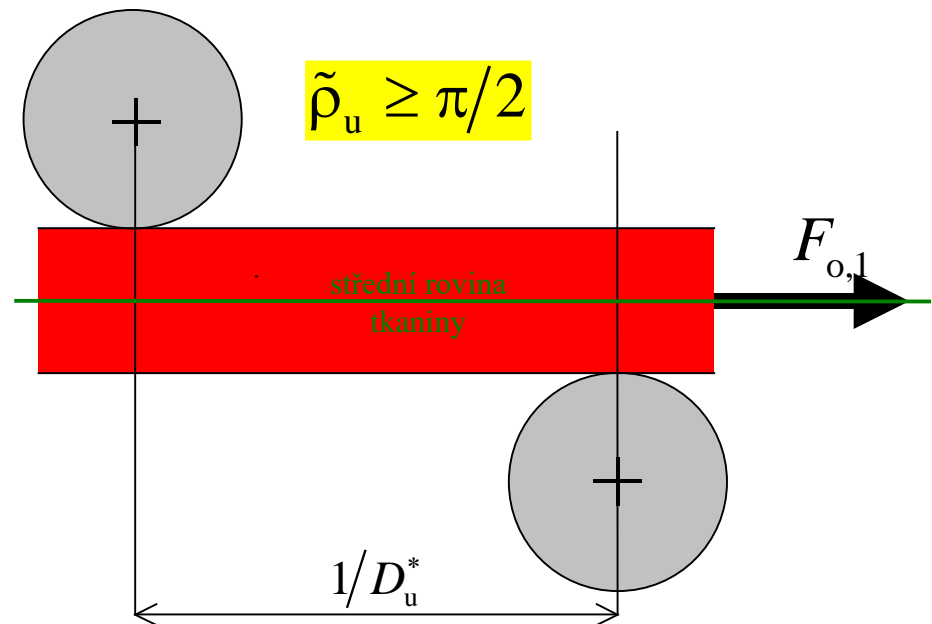
1. Relativní délka půlvlny

útkové nitě v hypotetickém mezistavu $\tilde{\rho}_u \geq \pi/2$

⇒ Osnova se zcela narovná!

⇒ Pevnost na jednu nit po osnově je rovna pevnosti nitě
(výchozí, volné)

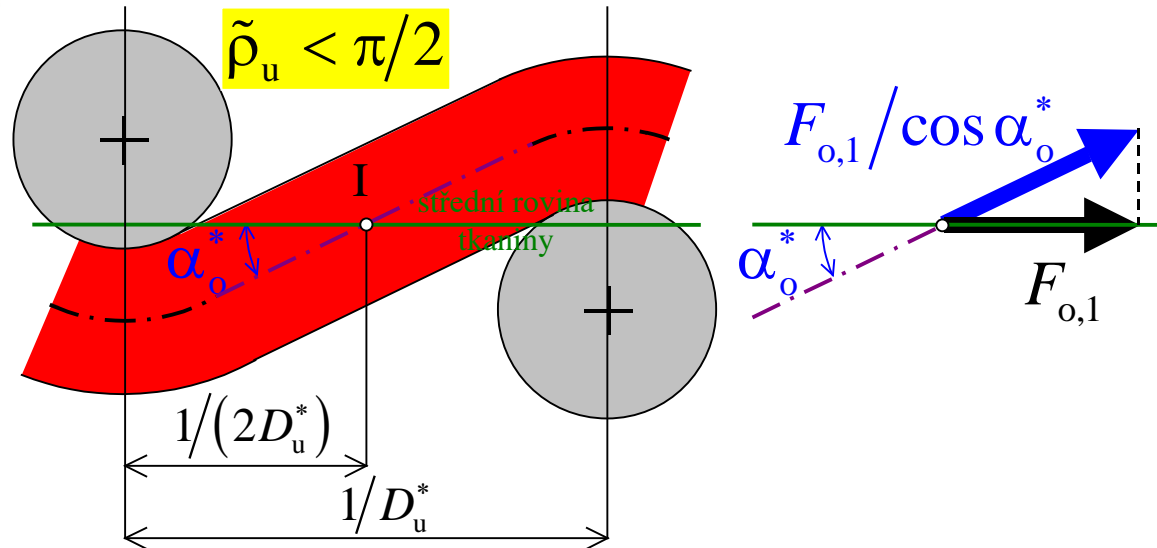
$$F_{o,1} = P_o$$



2. Relativní délka půvlny útkové nitě v hypotetickém mezistavu

$$\tilde{\rho}_u \leq \pi/2$$

⇒ Osnova se nenarovná!



Osnova v hypotetickém mezistavu svírá se střední rovinou tkaniny (v okolí „inflexního“ bodu) úhel α_o^* .

$$\operatorname{tg} \alpha_o^* = \left[1 - \operatorname{tg} \beta_o^* \sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1} \right] / \left[\sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1} + \operatorname{tg} \beta_o^* \right]$$

Odtud pevnost na jednu nit po osnově je rovna výrazu

$$F_{o,1} = P_o \cos \alpha_o^*$$

Pozn.: Záměnou indexů 'o' a 'u' lze využít předchozí postupy též pro výpočet pevnosti na jednu nit po útku.

Příklad 1

U 100% bavlněné tkaniny v plátnové vazbě uvažujeme její napínání po osnově. Předpokládáme „nedeformovatelné“ nitě.

$$D_o = 25 \text{ cm}^{-1}$$

$$D_u = 20.8 \text{ cm}^{-1}$$

$$d_o = 180 \text{ mm}$$

$$d_u = 180 \text{ mm}$$

$$\lambda_o = 0.5$$

Vypočtete tažnost po osnově a_o [%],
 poměrné „prodloužení“ po útku ϵ_u [%],
 poměr příčné kontrakce η_o [-] a parametry k výpočtu potřebné:

β_u [rad], ρ_u [-] – dle její hodnoty stanovíme postup výpočtu,
 β_o [rad], ρ_o [-], λ_o^* [-], λ_u^* [-], β_u^* [rad], D_o^* [cm^{-1}], β_o^* [rad],
 D_u^* [cm^{-1}]

Postup

$$\lambda_u = 1 - \lambda_o = 0.5$$

$$\beta_u = \arctg \left[D_o \lambda_o (d_o + d_u) \right] = 0.423 \text{ rad}$$

$$\rho_u = \arctg \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_u \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1} + \operatorname{tg} \beta_u} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1} = 1.236$$

$$\rho_u < \pi/2$$

$$\beta_o = \arctg \left[D_u \lambda_u (d_o + d_u) \right] = 0.358$$

$$\rho_o = \arctg \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_o \sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2 \beta_o} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2 \beta_o} - 1} + \operatorname{tg} \beta_o} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2 \beta_o} - 1} = 1.436$$

Postup

Dle hodnoty $\rho_u < \pi/2$ volíme následující postup:

$$\lambda_o^* = \cos \rho_u = 0.329$$

$$\lambda_u^* = 1 - \lambda_o^* = 0.671$$

$$\beta_u^* = \pi/2 - \rho_u = 0.335$$

$$D_o^* = \operatorname{tg} \beta_u^* / [\lambda_o^* (d_o + d_u)] = 2.94 \text{mm}^{-1}$$

$$\rho_o = \operatorname{arctg} \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_o^* \sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1} + \operatorname{tg} \beta_o^*} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1} \Rightarrow \beta_o^* = 0.449 \text{rad}$$

β_o^* - numerickým výpočtem
z intervalu $(0, \pi/2)$
viz ukázka MatLab

$$D_u^* = \operatorname{tg} \beta_o^* / [\lambda_u^* (d_o + d_u)] = 1.99 \text{mm}^{-1}$$

$$a_o = D_u / D_u^* - 1 = 4.46\%$$

$$\varepsilon_u = D_o / D_o^* - 1 = -15\%$$

$$\eta_o = \frac{1 - D_o / D_o^*}{D_u / D_u^* - 1} = 3.37$$

Příklady

Příklad 2

U 100% bavlněné tkaniny v plátnové vazbě uvažujeme její napínání po útku. Předpokládáme „nedeformovatelné“ nitě. Jedná se shodnou tkaninu jako v předchozím příkladu.

Vypočtete tažnost po útku a_u [%], poměrné „prodloužení“ po osnově ε_o [%], poměr příčné kontrakce η_u [-] a parametry k výpočtu potřebné:

β_o [rad], ρ_o [-] – dle její hodnoty stanovíme postup výpočtu,
 β_u [rad], ρ_u [-], λ_o^* [-], λ_u^* [-], β_o^* [rad], D_u^* [cm^{-1}], β_u^* [rad],
 D_o^* [cm^{-1}].

Poznámka: některé parametry jsou již vypočteny!!

Postup

Dle hodnoty $\rho_o < \pi/2$ volíme shodný postup jako v předchozím příkladu, jen s opačnými indexy:

$$\lambda_u^* = \cos \rho_o = 0.135$$

$$\lambda_o^* = 1 - \lambda_u^* = 0.865$$

$$\beta_o^* = \pi/2 - \rho_o = 0.135$$

$$D_u^* = \operatorname{tg} \beta_o^* / [\lambda_u^* (d_o + d_u)] = 2.8 \operatorname{mm}^{-1}$$

β_u^* - numerickým výpočtem
z intervalu $(0, \pi/2)$
viz ukázka MatLab

$$\rho_u = \operatorname{arctg} \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_u^* \sqrt{\frac{\lambda_o^{*2}}{\sin^2 \beta_u^*} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_o^{*2}}{\sin^2 \beta_u^*} - 1} + \operatorname{tg} \beta_u^*} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_o^{*2}}{\sin^2 \beta_u^*} - 1} \Rightarrow \beta_u^* = 0.614 \operatorname{rad}$$

$$D_o^* = \operatorname{tg} \beta_u^* / [\lambda_o^* (d_o + d_u)] = 2.26 \operatorname{mm}^{-1}$$

$$a_u = D_o / D_o^* - 1 = 10.55\%$$

$$\varepsilon_o = D_u / D_u^* - 1 = -25\%$$

$$\eta_u = \frac{1 - D_u / D_u^*}{D_o / D_o^* - 1} = 2.45$$

Příklad 3

U 100% bavlněné tkaniny v plátnové vazbě uvažujeme její napínání po útku. Předpokládáme „nedeformovatelné“ nitě.

$$D_o = 25 \text{ cm}^{-1}$$

$$D_u = 15.6 \text{ cm}^{-1}$$

$$d_o = 180 \text{ mm}$$

$$d_u = 180 \text{ mm}$$

$$\lambda_o = 0.5$$

Vypočtete tažnost po útku a_u [%], poměrné „prodloužení“ po osnově ε_o [%], poměr příčné kontrakce η_u [-] a parametry k výpočtu potřebné:

β_o [rad], ρ_o [-] – dle její hodnoty stanovíme postup výpočtu,

β_u [rad], ρ_u [-], λ_o^* [-], λ_u^* [-], β_o^* [rad], D_u^* [cm^{-1}], β_u^* [rad], D_o^* [cm^{-1}].

$$\lambda_u = 1 - \lambda_o = 0.5$$

$$\beta_u = \operatorname{arctg} [D_o \lambda_o (d_o + d_u)] = 0.423 \text{ rad}$$

$$\rho_u = \operatorname{arctg} \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_u \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1} + \operatorname{tg} \beta_u} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2 \beta_u} - 1} = 1.236$$

$$\beta_o = \operatorname{arctg} [D_u \lambda_u (d_o + d_u)] = 0.274$$

$$\rho_o = \operatorname{arctg} \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta_o \sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2 \beta_o} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2 \beta_o} - 1} + \operatorname{tg} \beta_o} \right] + \sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2 \beta_o} - 1} = 1.853$$

$\rho_o > \pi/2$ útek se zcela narovná!

Postup

Podle hodnoty $\rho_u > \pi/2$ volíme následující postup:

$$\lambda_u^* = 0$$

$$\lambda_o^* = 1$$

$$\beta_o^* = 0$$

$$\beta_u^* = \operatorname{arctg} \frac{1}{\rho_u} = 0.68$$

$$D_o^* = \frac{1}{\rho_o (d_o + d_u)} = 2.25 \text{mm}^{-1}$$

$$\rho_o = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{D_u^{*2} (d_o + d_u)^2} - 1}} + \sqrt{\frac{1}{D_u^{*2} (d_o + d_u)^2} - 1} \Rightarrow D_u^* = 2 \text{mm}^{-1}$$

$$a_u = D_o / D_o^* - 1 = 11.23\%$$

$$\varepsilon_o = D_u / D_u^* - 1 = -22.29\%$$

$$\eta_u = \frac{1 - D_u / D_u^*}{D_o / D_o^* - 1} = 1.98$$