

Nové možnosti rozvoje vzdělávání na Technické univerzitě v Liberci
Specifický cíl A2: Rozvoj v oblasti distanční výuky, online výuky a blended learning

NPO_TUL_MSMT-16598/2022



Orientace vláken v rovině

Ing. Iva Mertová, Ph.D.



Financováno
Evropskou unií
NextGenerationEU



Národní
plán
obnovy

MSMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



Orientace vláken v rovině

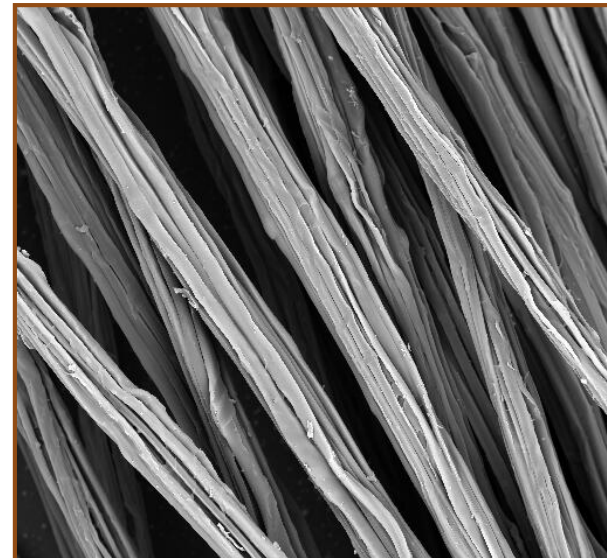
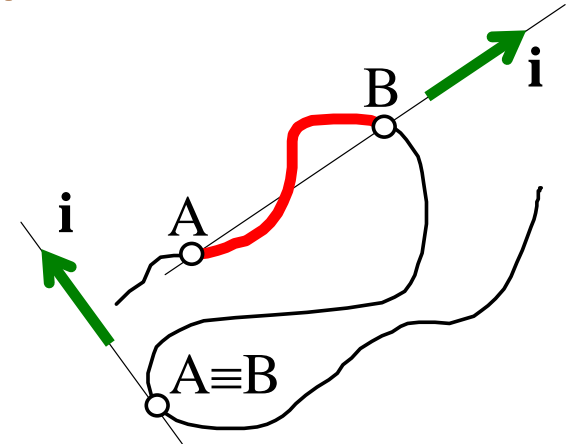
cvičení 9 navazuje na přednášku | **Orientace vláken**

ORIENTACE – exaktní interpretace:

Je třeba určit:

Co je **úsek vlákna** (např. AB dané délky, $AB \rightarrow 0$)

2. Co je jeho **směrový** (jednotkový) **vektor i** (např. spojnice koncových bodů)



ORIENTACE VLÁKEN V ROVINĚ

1. Prostorové uspořádání směrů vláken je experimentálně velmi obtížně zjistitelné.
2. Některé často používané vlákenné útvary jsou blízké představě směrového uspořádání v ploše (ve dvou rozměrech) – pavučina z mykacího stroje, rouna z pavučin aj.
 ⇒ Užitečnost modelů orientace vláken v rovině

Směrové vektory leží jen v jedné rovině α

- Úhel $\vartheta \in (0, \pi/2)$

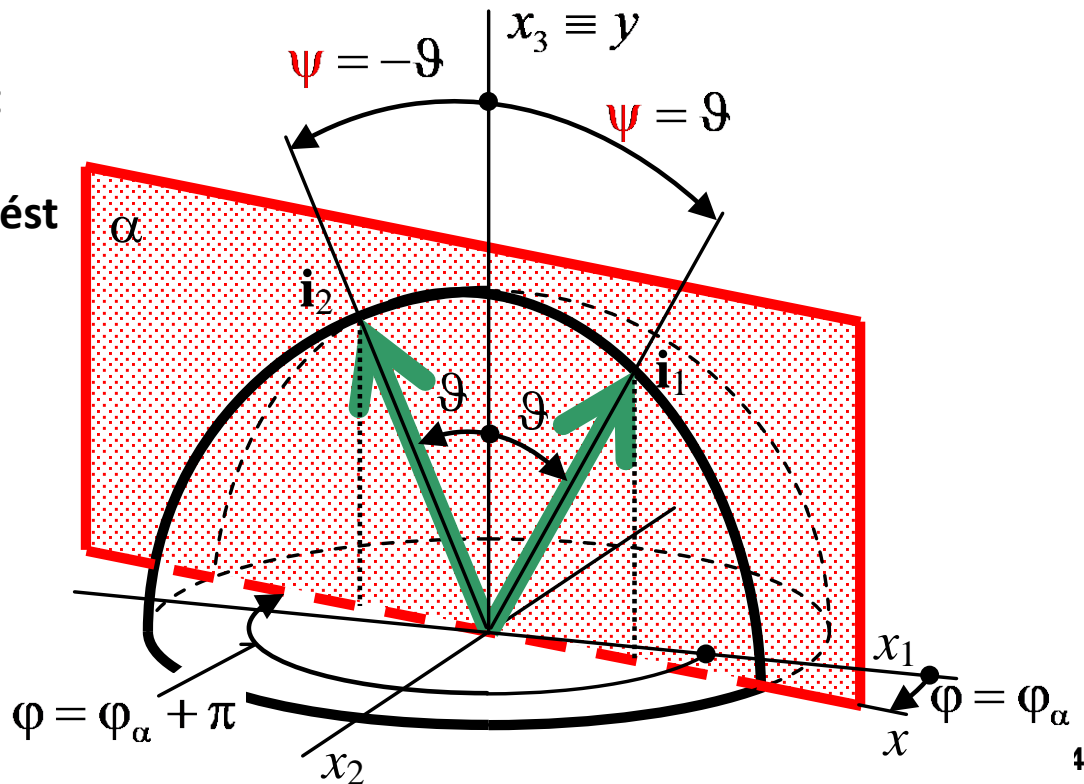
- Úhel φ nabývá jenom dvou hodnot:

φ_α a $\varphi_\alpha + \pi$

Místo dvou úhlů ϑ, φ je výhodné **zavést jediný úhel ψ** :

$$\left. \begin{array}{l} \psi = \vartheta, \text{ když } \varphi < \pi \\ \psi = -\vartheta, \text{ když } \varphi \geq \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$$



Vlivy působící na vlákna

Úsek vlákna je ovlivňován v technologickém procesu:

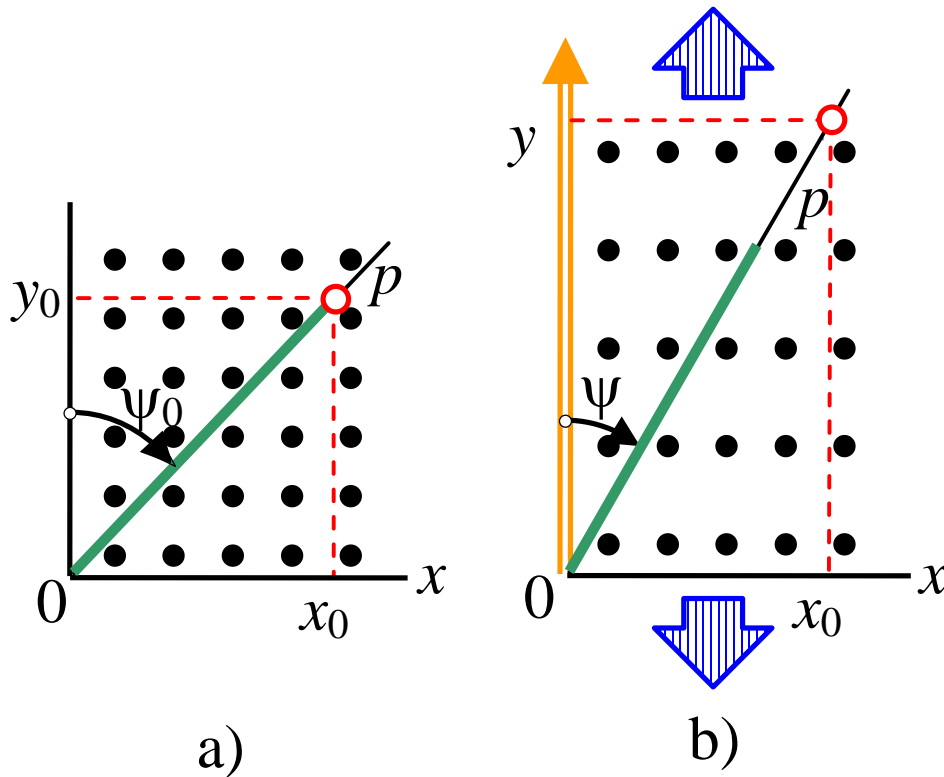
1. Ostatními úseky vláken (náhodný charakter)
 - sousedními úseky téhož vlákna,
 - jinými úseky vláken
2. Preference jednoho směru v technologickém procesu (česání, protahování, mykání)
 - částmi textilních strojů (hroty, válečky atd.)

Příliš složité ⇒ náhradní modelová představa

Imaginární pružný pás s hroty (•).

Hroty modelově nahrazují působení okolí na krátký (zelený) úsek vlákna.

Preference jednoho směru vznikne působením hrotů na úsek vlákna při protahování pružného pásu.



Výchozí stav ad a) :

- Svislý směr – směr (budoucí) preference
- Koncový bod vlákna na pásu (○), leží na přímce p .
- Úhel $\psi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Platí

$$\tan \psi_0 = \frac{x_0}{y_0}$$

Protážení pásu (svislý směr oranž. šipky)

– ad b):

- Vlákno (zelené) proklouzne mezi hroty
- Bod ○ se posune, ale zůstane na přímce p .

Průtah C

$$C = \frac{y}{y_0}, \quad C \geq 1$$

Hustota pravděpodobnosti rozložení ψ před protažením

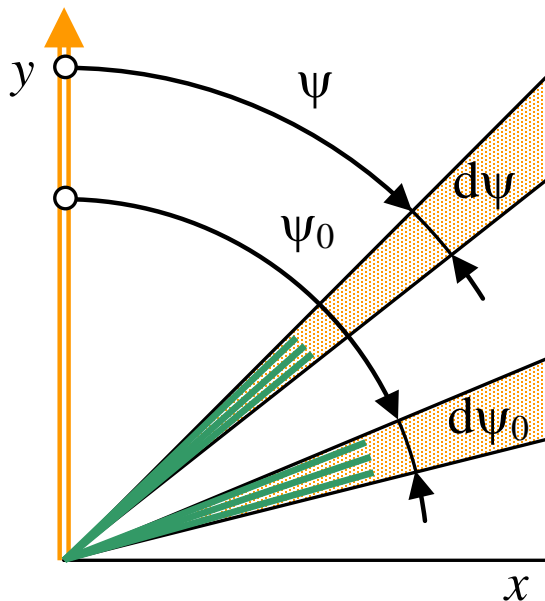
- izotropní orientace

$$f_0(\psi_0) = 1/\pi$$

Hustota pravděpodobnosti rozložení ψ po protažení

- anizotropní uspořádání

Relativní četnost v elementární třídě se průtahem nezmění $f_0(\psi_0)d\psi_0 = f(\psi)d\psi$,



$$f(\psi) = \frac{1}{\pi} \frac{C}{(1 + C^2 \tan^2 \psi) \cos^2 \psi}$$

Průtah C = míra preference podélného směru

Pro minimum a maximum této hustoty platí:

$$f_{\min} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{C\pi}$$

$$f_{\max} = f(0) = \frac{C}{\pi}$$

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = C^2$$

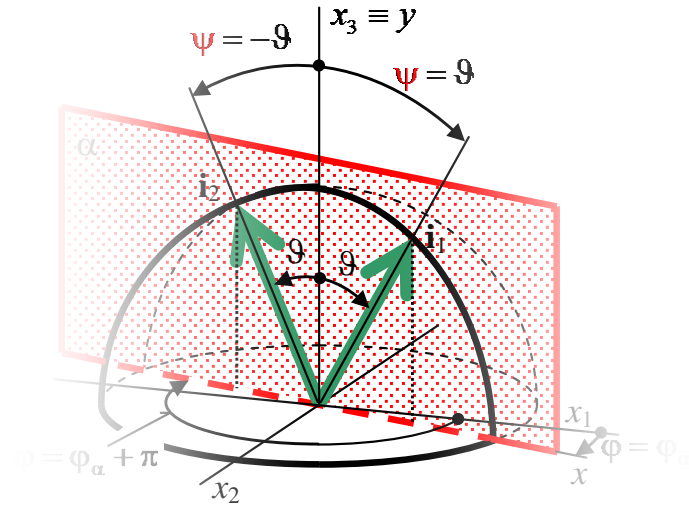
Hustota pravděpodobnosti neorientovaného úhlu ϑ v rovině

Neorientovaný úhel ϑ zahrnuje směry ψ a $-\psi$.

Hustota pravděpodobnosti rozložení úhlu ϑ ... $u(\vartheta)$

$$u(\vartheta) = g(-\vartheta) + g(\vartheta)$$

$$u(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \frac{C}{\left[1 + C^2 \tan^2(\vartheta + \alpha)\right] \cos^2(\vartheta + \alpha)} + \frac{1}{\pi} \frac{C}{\left[1 + C^2 \tan^2(\vartheta - \alpha)\right] \cos^2(\vartheta - \alpha)}$$



Hustota pravděpodobnosti rozložení neorientovaného úhlu v případě, že $\alpha=0$

$$u(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \frac{C}{\left[1 + C^2 \tan^2 \vartheta\right] \cos^2 \vartheta}$$

Hustota pravděpodobnosti rozložení neorientovaného úhlu v případě, že $\alpha=0$ a $C=1$ (izotropní uspořádání)

$$u(\vartheta) = \frac{2}{\pi}$$

ORIENTACE VLÁKEN V ŘEZU ROVINNÝM SVAZKEM VLÁKEN

Hustota pravděpodobnosti rozložení neorientovaného úhlu ϑ v řezu

$$u^*(\vartheta) = \frac{\cos \vartheta \left[\frac{1}{\pi} \frac{C}{C^2 - (C^2 - 1) \cos^2(\vartheta + \alpha)} + \frac{1}{\pi} \frac{C}{C^2 - (C^2 - 1) \cos^2(\vartheta - \alpha)} \right]}{\frac{2C \cos \alpha}{\pi \sqrt{C^2 - 1}} \arctan \left[\sqrt{C^2 - 1} \cos \alpha \right] + \frac{\sin \alpha}{\pi \sqrt{C^2 - 1}} \ln \left| \frac{\sqrt{C^2 - 1} \sin \alpha + C}{\sqrt{C^2 - 1} \sin \alpha - C} \right|}$$

Hustota pravděpodobnosti rozložení neorientovaného úhlu v případě, že $\alpha=0$

$$u^*(\vartheta) = \frac{\sqrt{C^2 - 1} \cos \vartheta}{\arctg \sqrt{C^2 - 1} C^2 - (C^2 - 1) \cos^2 \vartheta}$$

Hustota pravděpodobnosti rozložení neorientovaného úhlu v případě, že $\alpha=0$ a $C=1$ (izotropní uspořádání)

$$u^*(\vartheta) = \cos \vartheta$$

Příklad 1:

Vypočtete hustotu pravděpodobnosti uspořádání úseků vláken v rovině a v řezu rovinným svazkem pro hodnoty úhlů $\vartheta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$ a $\pi/2$. Porovnejte je graficky. Uvažujte:

- a) izotropní uspořádání ($\alpha = 0, C=1$)
- b) anizotropní uspořádání vláken ($\alpha = 0, C=2$, malé protažení)
- c) anizotropní uspořádání vláken ($\alpha = 0, C=4$, velké protažení)

Příklady

Příklad 2:

Pro izotropní rozdělení vláken určete % podíl vláken s orientací $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ v TVÚ a v řezu.