TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Nové možnosti rozvoje vzdělávání na Technické univerzitě v Liberci

Specifický cíl A2: Rozvoj v oblasti distanční výuky, online výuky a blended learning

NPO_TUL_MSMT-16598/2022

Specifické problémy v oborových didaktikách III

RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Další typy na rozcvičky a další logické úlohy

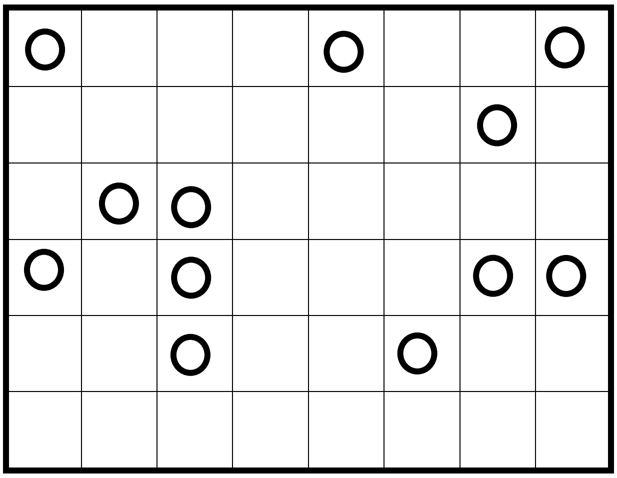
Procvičování logiky a geometrické představivosti

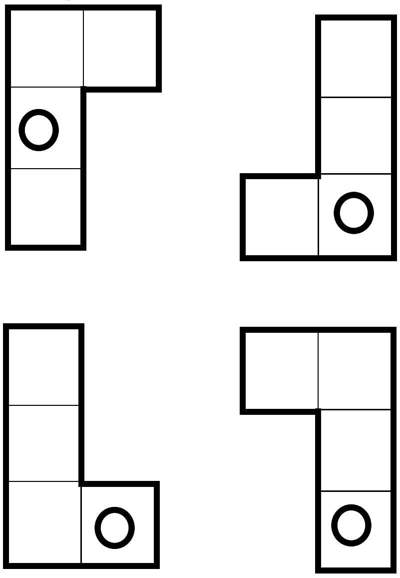
Tetris

Pravidla:

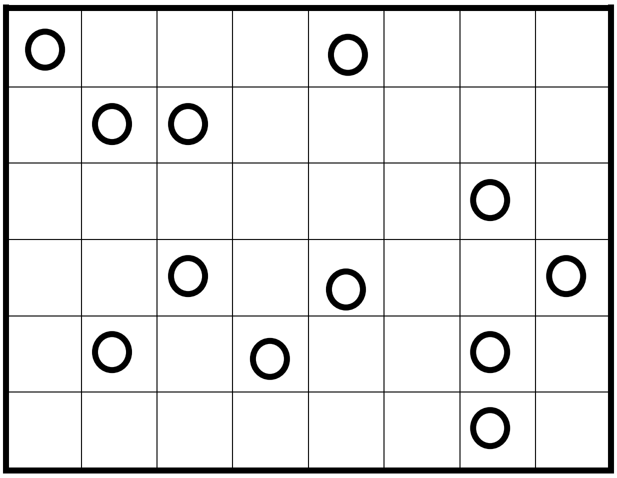
- Umístěte 12 dílků ve tvaru L (3 kusy od každého vyobrazeného druhu) do znázorněné mřížky.
- Každé L má v sobě 1 otvor, který odpovídá některému otvoru v mřížce.
- Každý dílek můžete otočit nebo zrcadlově převrátit.
- Žádné 2 dílky stejného druhu se nesmějí dotýkat, a to ani diagonálně.
- Mřížka musí být zcela zaplněna.

Příklad 1:





Příklad 2 (stejné dílky):



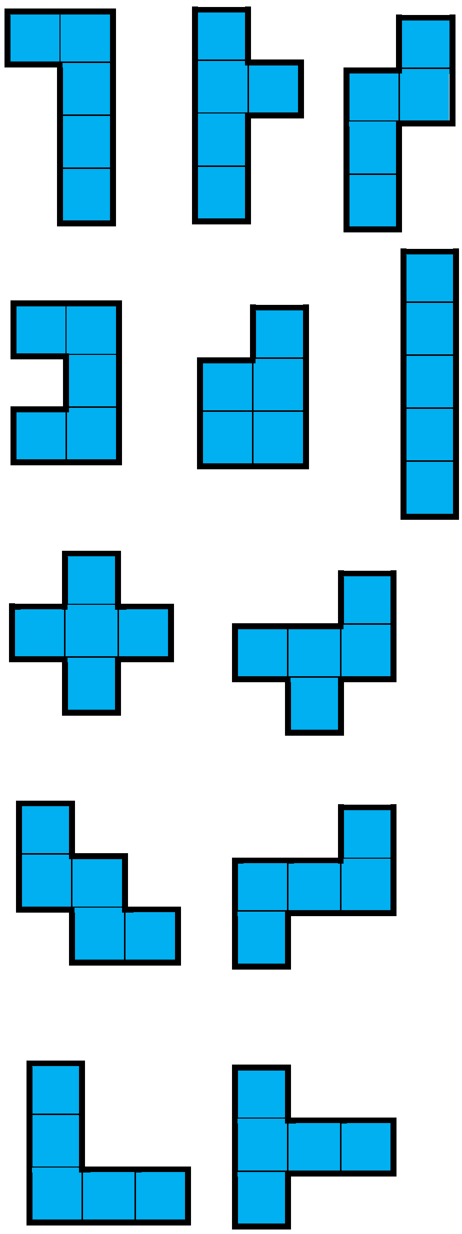
Pentomino

Pravidla:

- Umístěte všech 12 dílků do znázorněné mřížky.
- Každý dílek můžete otočit nebo zrcadlově převrátit.
- Žádné dílky se nesmějí dotýkat, a to ani diagonálně.
- Čísla na okrajích mřížky udávají délku každého souvislého bloku vybarvených čtverečků.
- Jednotlivé bloky jsou odděleny alespoň jedním nevybarveným čtverečkem.

Příklad 3:

				3		1		3			1	3	
			1	1	1	3	1	1	1	1	2	1	1
			3	1	2	3	1	1	1	1	1	1	1
			1	3	1	1	1	2	1	2	2	1	4
		1											
2	3	3											
1	1	1											
	2	1											
		2											
2	1	3											
	1	3											
	2	1											
		5											
		2											
	2	2											
1	2	1											
1	1	1											
1	4	1											
	2	2											
		2											



Římská hádanka

Pravidla:

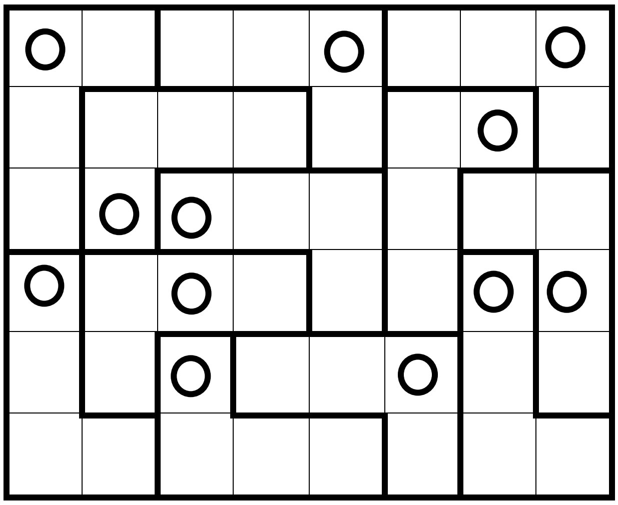
- Do každé prázdné buňky mřížky umístěte jednu z římských číslic od I do IV.
- Číslice na okrajích udávají, jak často se každá z římských číslic vyskytuje v příslušném řádku nebo sloupci.
- Stejné číslice se nesmějí navzájem dotýkat ve vodorovném a svislém směru.

Příklad 4:

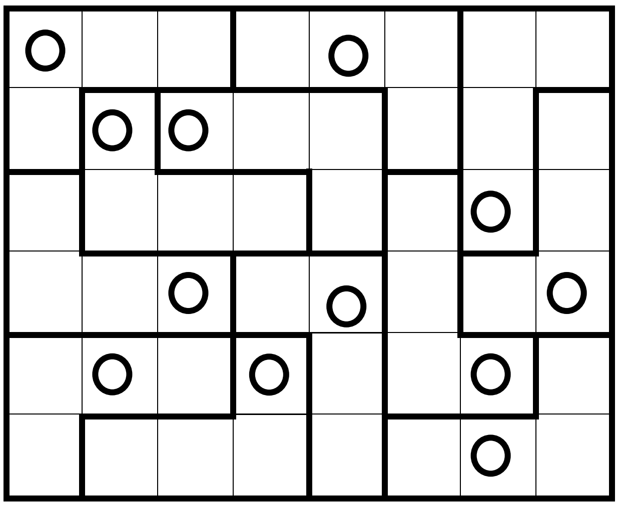
			I	**1**	**1**	**1**	**2**	**0**
			II	**1**	**1**	**2**	**1**	**3**
			III	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
I	**II**	**III**	**IV**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**
2	**1**	**1**	**1**					
0	**2**	**0**	**3**					
1	**1**	**1**	**2**					
1	**1**	**1**	**2**					
0	**2**	**2**	**1**					

Řešení:

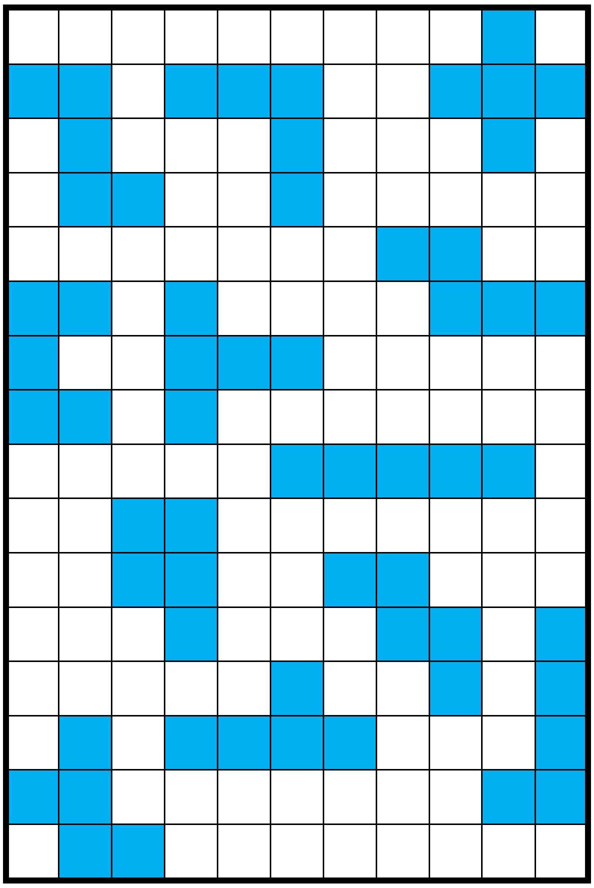
Příklad 1:



Příklad 2:



Příklad 3:



Příklad4:

			I	1	1	1	2	0
			II	1	1	2	1	3
			III	1	1	1	1	1
I	II	III	IV	2	2	1	1	1
2	1	1	1	I	IV	III	I	II
0	2	0	3	IV	II	IV	II	IV
1	1	1	2	III	I	II	I	II
1	1	1	2	II	IV	I	IV	III
0	2	2	1	IV	III	II	III	II

Matematické pohádky

Marek Veselý

Mach a Šebestová v říši čísel (pro 2. st. ZŠ)

„Hele, Machu, paní učitelka nám zadala ten úkol o za sebou jsoucích přirozených číslech, ale tomu vůbec nerozumím.“ „Člověče, Šebestová, ty jsi ale trdlo, od čeho máme sluchátko,“ povídá Mach a již volá do utrženého sluchátka: „Prosím vás, my bychom se potřebovali dostat do říše čísel.“ „Ale ano, samozřejmě, ale dejte pozor, ať vás tam nezavřou do absolutní hodnoty, to byste se nemohli vrátit zpátky,“ ozvalo se ještě ze sluchátka před tím, než se Mach s Šebestou ocitli v království nikoliv nadpřirozených bytostí, ale přirozených čísel. Království leželo v neprostupné džungli matematiky a byly v něm jen dvě vesnice – obec Sudá a obec Lichá. Zcela stranou žila ještě stará, zlá, kulatá Nula, se kterou se nikdo nechtěl kamarádit, natožpak se s ní dělit. Království vládl král Nerovnoň s chotí Rovnou, princeznou Menší a princem Větším. Všechna čísla je ctila, stejně jako boha Nekonečna. „Hele, Machu, tamhle jde náš domácí úkol!“ vykřikla radostně Šebestová. A opravdu bylo vidět tři za sebou jsoucí přirozená čísla, jejichž součet byl 36. Víte, která čísla to byla?

Dlouhý, Široký a Bystrozraký

Slova plynou, pohádka se povídá, ale jak to ve skutečnosti bylo, to vím jenom já. Proto vám mohu vyprávět o princezně, která se jmenoval Bajaja. Rozhodla se vysvobodit jednoho prince, který byl zaklet zlým bíloknězníkem Abrakadabrakem a musel mu dělat sluhu. Představte si, že ho zaklel tak, aby byl zároveň dlouhý, široký a ještě k tomu bystrozraký. „Tři kletby jsem vyslovil, ale když jsem ho zaklínal, tři příklady musíš vypočítat, aby se kouzlo zrušilo,“ pravil bíloknězník princezně. „Ale bez kalkulačky, Bajajo!“ Bajaja souhlasila. „Tvůj princ je tak dlouhý, jako pět šestin krkonošské Sněžky (1 602 metrů), dále je tak široký, že vypije sedmnáct devatenáctin vody z Orlické přehrady na Vltavě (722 miliónů m^2) a navíc je tak bystrozraký, že dohlédne dva a třičtvrtě krát dál, než je z Čech k Jaderskému moři (332 km).“ Když Abrakadabrak se zadáním svých příkladů skončil, dala se Bajaja do počítání. Protože jako královská dívka nebyla žádné ořezávátko a navíc chodila do základní královské školy, snadno vypočetla, jak je princ dlouhý, kolik vypije vody a jak daleko dohlédne. Že to bude hračka i pro vás?

Řešení:

11, 12, 13

1335 m, 646 miliónů m^2, 913 km

Veselý, M.: Bylo, nebylo. Praha, Albatros, 2006.

Zajímavé úlohy

1. Jeden rohlík prodává kupec 1,50 Kč, dva za 2,50. Tvrdí, že vydělává stejně, koupíte-li si 1 nebo 2. Kolik vydělává a kolik stojí 1 rohlík?
2. Máma má 5 dětí. Jejich věk se liší o 2 roky. Při narození prvního jí bylo 18 let, to je dnes věk nejmladšího. Jak je stará?
3. Při volbách dostlali 4 kandidáti dohromady 5 219 hlasů. Vítěz předstihl protivníky o 22, 30 a 73 hlasů. Kolik dostal každý?
4. Velmi stará úloha: Lovec uviděl na stromě veverku. Když strom obcházel, aby veverku zastřelil, skrývala se veverka stále na druhé straně kmenu. Nakonec lovec strom obešel v úplném kruhu. Obešel také veverku?
   Jiná varianta téhož: Chlapci chtěli vlézt k sousedovi na třešně, ale báli se psa na zahradě. Postupoval s nimi podle plotu a vrčel a štěkal, až chlapci obešli celou zahradu. Dovnitř se nedostali, obešli však i psa, i když k nim byl stále obrácen tlamou.
5. V restauraci v cizině si pan Novák objednával jídla úplně náhodně, protože nerozuměl jejich názvům. Jídla mu vždy přinesli najednou, takže si nestihl zapamatovat jejich názvy. První den si objednal much a kalai a přinesli mu rýžovou polévku a placky. Druhý den si objednal amali, much a alri, přinesli mu rýžovou polévku, nudle a pečené hovězí. Třetí den si objednal alri,a puri a dostal pečené hovězí brambory. Čtvrtý den si objednal alri, kali a amali. Co mu přinesou?
6. Trochu obtížnější: Děda má vyřídit ve městě 10 věcí. Máme pro něj vypracovat plán, aby všechno úspěšně vyřídil, co nejlépe a včas. Nutno vyřídit:
   - Odnést spravit boty.
   - Zanést kalhoty ke krejčímu.
   - Donést na poštu balík (10 kg).
   - Zastavit se na radnici, úřední hodiny 8 – 10.
   - Vyzvednout opravený notebook.
   - Koupit čerstvý chléb (ten mají od 11 hodin).
   - Koupit kávu.
   - Koupit půl kila vepřové krkovičky.
   - Koupit máslo.
   - Vyzvednout na nádraží vnučku. Vlak přijede ve 12.30 hod.

   Z domu vyšel v 9.30 hod. Musí se vrátit nejpozději ve 13 hodin. Nesmí se mezitím vrátit domů, ale může použít tramvaj. Pošta a obchody zavírají mezi 12 – 13 hod.

   Promyslete si všechny podmínky a vymyslete nejlepší pořadí splnění úkolů. Snažte se, aby neběhal chaoticky po městě s těžkým balíkem nebo notebookem, ale aby nic nepromeškal. Nakreslete si podle fantazie plánek a do něj si situaci zakreslete.

7. Vypočtěte, kolik mi je let. Předevčírem mi bylo 19, příští rok mi bude 22 let. Kdy to bylo a kdy jsem se narodil?
8. Na jedné slavnosti bylo třikrát víc mužů než žen. 4 muži se svými ženami odešli, tím tam zbylo čtyřikrát více mužů než žen. Kolik jich přišlo na slavnost?
9. 4 velké a 3 malé sáčky váží 14 a půl kila. 4 malé a 3 velké sáčky váží 13 a půl kila. Kolik váží který sáček?
10. Potřebujete rozměnit 2000 Kč. Potřebujete několik desetikorun, desetkrát tolik dvacetikorun a zbytek v padesátikorunách. Kolik čeho dostanete?

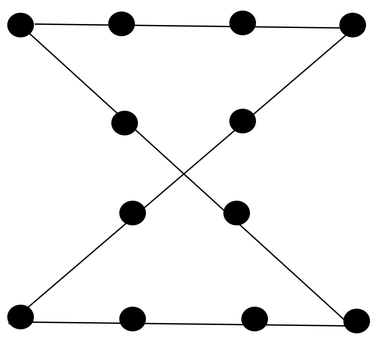
Výsledky:

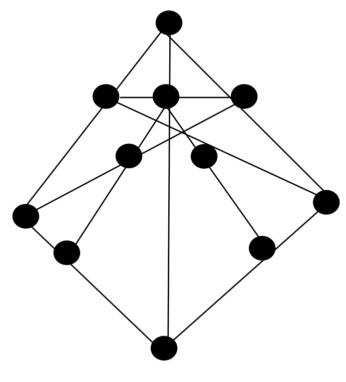
1. Cena 1 Kč, výdělek 0,50 Kč.
2. Mámě je 44 let: 18 + 4 ·2 = 26. 26 + 18 = 44
3. Hlasy: 1 336, 1 314, 1 306 1 263: 5 219 + (22 + 30 + 73) =5 344, 5 344 : 4 = 1 336
4. Lovec obešel veverku, jako když bod na obvodě kola při každé otáčce obejde bod na náboji. Chlapci obešli celou zahradu a všechno, co je v ní, tedy i psa.
5. Pečené hovězí, nudle a placky.
6. Úkoly vyřídí v pořadí 4 – 3 – 1 –2 – 8 – 6 – 9 – 7 – 5 –10 a domů se vrátí tramvají.
7. Stalo se to 1. ledna. Narozeniny mám 31. prosince. 30. prosince mi bylo 19 let, 31. prosince tohoto roku mi bude 21 let, příštího roku 22 let.
8. 48 osob, 12 žen a 36 mužů.
9. 2 a půl a 1 a půl kila.
10. 5 desetikorun, 50 dvacetikorun a 19 padesátikorun.

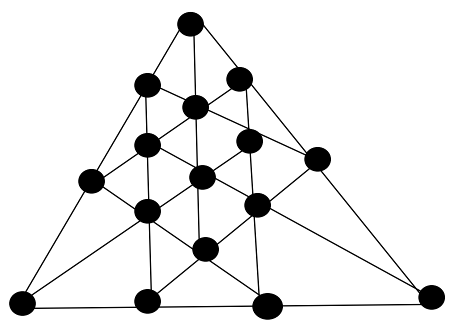
Další zajímavé problémové úlohy

1. Položte	12	mincí tak, aby tvořily	6	řad po	4.
	11		12		3
	16		12		4
	19		9		5
	27		9		6
	27		10		6

Řešení (první 3 úkoly):







Příklad na zkoumání (tzv. hrozny problémů)

První a poslední číslice

Předpokládané znalosti: Násobení dvojciferných čísel, dělení jednociferným číslem

Využití: Posloupnosti, dělitelnost

Problém: 1 974 číslic je napsáno za sebou v řadě, tak, že každé dvojciferné číslo zapsané za sebou jsoucími číslicemi je dělitelné 17 nebo 23.

Zjistěte: a) Jestliže první číslice (nejvíce vlevo) je 9, jaká je poslední číslice tohoto 1974-ciferného čísla?

b) jestliže na posledním místě je 1, jaká číslice je na prvním místě?

Experimentování: Vypíšeme všechny dvojciferné přirozené násobky čísel 17 a 23:

17: 17, 34, 51, 68, 85

23: 23, 46, 69, 92

Prohlédneme si výsledky:

Na místě jednotek i desítek je každá číslice kromě 0 právě jednou.

Vyzkoušíme pořadí čísel:

Začneme např. číslem 5:

Před ním může být jen 8 (číslo 85), za ní 1 (číslo 51), tedy …851… .

Před číslicí 8 může být 6 (číslo 68), za ní 7 (číslo 17), tedy …68517… .

Před číslicí 6 může být 4 (číslo 46), před 4 bude 3 (43), před 3 (23) bude 2, před 2 bude 9 (92) a před 9 bude 6 (69).

Číslice 6 se již opakuje: …6923468517… .

Za číslicí 7 není žádná číslice, protože žádné uvedené číslo nezačíná 7.

Proto: …6923468517.

Výsledek můžeme znázornit i **graficky**:

$$\mathbf{9 \to 2 \to 3 \to 4 \to 6 \to 8 \to 5 \to 1 \to 7} \qquad \mathbf{(1)}$$

Posloupnost se bude skládat ze samých cyklů délky 5, jen na konci bude něco z přívěsku 8517. Je zřejmé, že kdybychom začali jinou číslicí, dostaneme totéž.

Odpověď:

a) Jestliže je na začátku 9, musí se cyklus 92346 opakovat 394 krát ($5 \cdot 394 = 1974 + 4$). Pak budou následovat číslice ještě 4 číslice. Naše zkoumání můžeme dokončit z grafu. Existují dvě řešení: 4 a 7.

b) Jestliže je poslední 1, pohybujeme se v grafu proti šipkám. Po třech krocích se zacyklíme. Protože $1974 - 3 = 1971$ a $1971 = 5 \cdot 394 + 1$, oběhneme cyklus 394 krát a ještě musíme udělat 1 krok. Dostaneme číslici 4, kterou hledaná posloupnost začíná.

Další varianty pro zkoumání (lze vymyslet i jiné):

Změna délky posloupnosti, výchozí číslo, koncové číslo,, změna pravidla pro tvorbu posloupnosti atd.

Počet podmnožin

Předpokládané znalosti: Základní pojmy pro množiny a mocniny, matematická indukce

Využití: Množiny, mocniny, matematická indukce apod.

Problém: Určete počet všech podmnožin množiny o n prvcích.

Zkoumání: Systematické experimentování

Hledáme zákonitosti mezi počtem prvků dané množina jejích podmnožin.

Zvolme n = 1, 2 a 3.

n	**Prvky množiny**	**Podmnožiny**	**Počet podmnožin**
0	žádný	$\{\ \}$	1
1	a	$\{\ \}, \{a\}$	2
2	a, b	$\{\ \},\{a\},$ $\{b\},\{a, b\}$	4
3	a, b, c	$\{\ \},\{a\},\{b\},\{a, b\ \}$ $\{c\},\{\ a, c\},\{b, c\},\{\ a, b, c\}$	8

Prázdná podmnožina má pouze 1 podmnožinu, a to sebe samu.

Zkoumáme vztahy mezi čísly v 1. a posledním sloupci: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$

Hypotéza: Každá množina o n prvcích má 2^n podmnožin.

Důkaz (matematickou indukcí):

1. Dokážeme, že tvrzení platí pro první prvek. To jsme zjistili experimentováním: $n = 0 \Rightarrow 2^0 = 0$.
2. Dokážeme, že $\forall n$ platí: Má-li daná množina 2^n podmnožin, má množina mající o 1 prvek k víc 2^{n+1} podmnožin. Počet podmnožin neobsahujících prvek k je podle indukčního předpokladu 2^n. Nyní vložme do každé této podmnožiny prvek k. Počet

těchto nových podmnožin je také 2^n. Počet podmnožin obsahujících prvek k je stejný jako počet podmnožin v první skupině. Množina mající n + 1 prvků má tedy $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ podmnožin.

3. V tomto okamžiku můžeme hypotézu potvrdit a vyslovit jako matematickou větu.