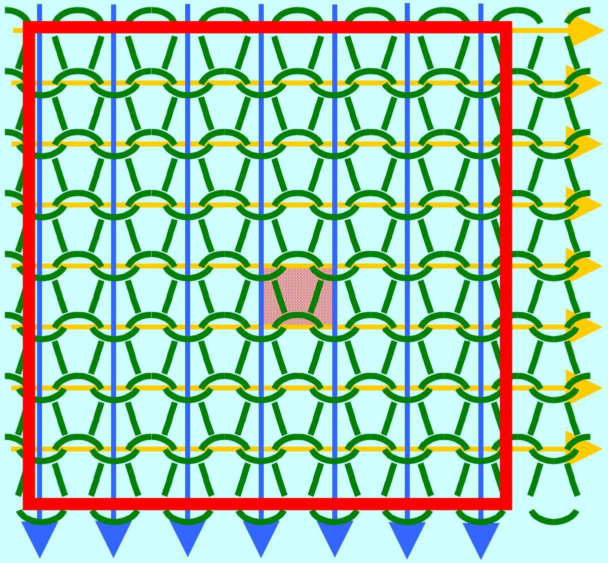
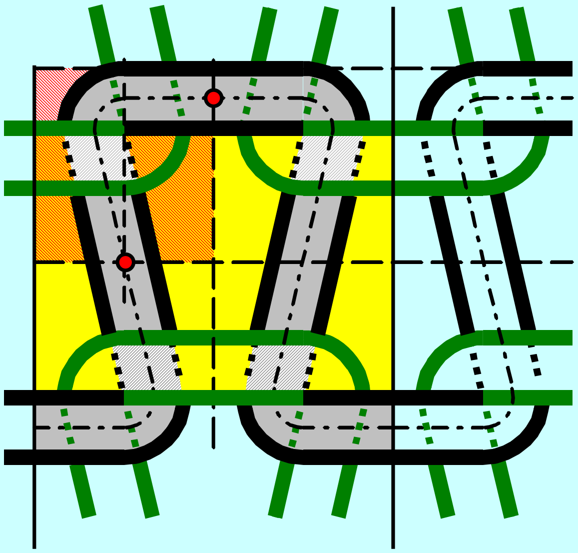
PLETENINY 1

„DEFINICE, SOUVISLOSTI“

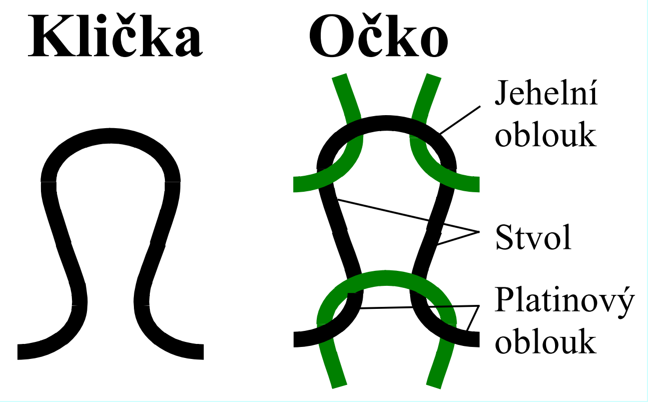




Pletenina – plošná textilie vytvořená vzájemným prová-záním „jedné" nitě – zátažná pletenina, nebo jedné soustavy (osnovy) nití – osnovní pletenina.
Problém modelování struktury pletenin: Pleteniny jsou geometricky velmi variabilní – nemají žádný relaxovaný (výchozí) stav; problém ' co je výchozí struktura? '

JEDNOLÍCNÍ ZÁTAŽNÁ PLETENINA

Stavební prvky:
- **klička** – „ohnutá nit"
- **očko** – klička „prostrkaná" (propletená) dalšími kličkami

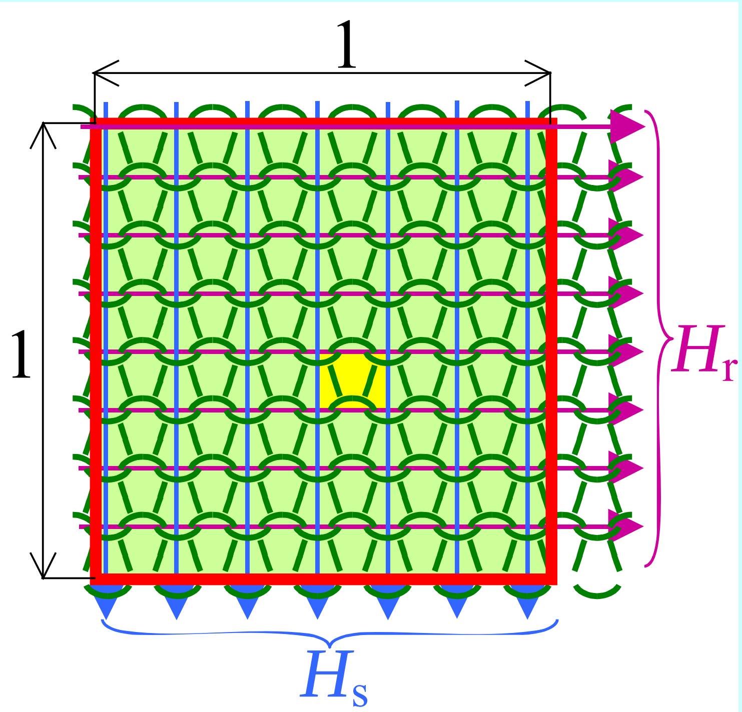


- části očka – **jehelní oblouk, stvol, platinový oblouk**

PLETENINY 1

Řádek – soustava vedle sebe stojících oček (obvykle z jedné nitě) –

Sloupek - soustava pod sebou vzájemně provázaných oček –



HUSTOTA PLETENINY

Uvažujme čtvercovou část pleteniny (□) o rozměrech 1x1 – viz obrázek.

1. HUSTOTA ŘÁDKŮ A SLOUPKŮ

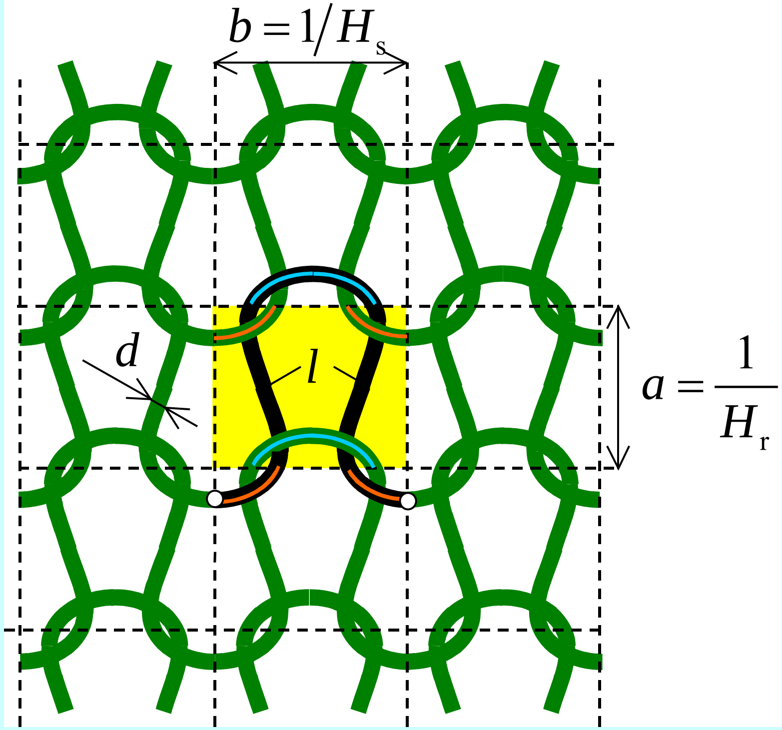
Hustotu řádků… H_r - charakterizujeme <u>počtem řádků připadajících na jednotku délky</u>

Hustotu sloupků… H_s - charakterizujeme <u>počtem sloupků připadajících na jednotku délky</u>

Rozteč řádku… $a = 1/H_r$

Rozteč sloupku… $b = 1/H_s$

Opakující se **strukturní jednotka** pleteniny je tvořena (žlutým) obdélníkem o stranách a a b.



<u>Délka nitě</u> uvnitř strukturní jednotky je rovna **délce očka**… l (Úseky černého očka, které ze strukturní jednotky vybočují - , - jsou stejně dlouhé, jako úseky sousedních zelených oček, které do strukturní jednotky zasahují.)

Efektivní průměr nitě… d

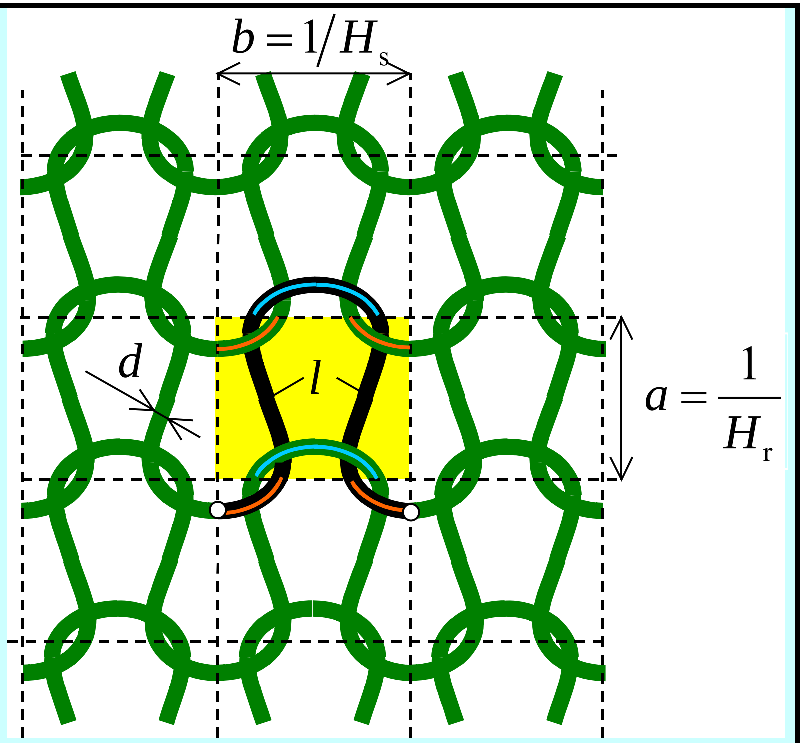
2. „ZAKRYTÍ" A POMĚR *l/d*

Plocha (žlutá) strukturní jednotky je ab.

Plocha zakrytá nití ve strukturní jednotce (ve znázorněném pohledu) by byla ld, pokud by se nitě (4x) nekřížily.

Předpoklad: Vliv křížení nití na zakrytou plochu lze zanedbat

Potom **zakrytí pleteniny** je



$$Z = \frac{ld}{\underbrace{a}_{=1/H_r}\ \underbrace{b}_{=1/H_s}},$$

$$\boxed{Z = ld\, H_r H_s}$$

Úpravou nalezneme pro zakrytí $Z = \frac{ld}{ab} = \left(\frac{l}{a}\right)\left(\frac{l}{b}\right)\left(\frac{d}{l}\right)$

Předpoklad: Nechť posuzované pleteniny jsou geometricky podobné.

Potom poměry odpovídajících si délek jsou konstantní a pro všechny takové posuzované pleteniny platí

$l/a = k_a$...konstanta, $l/b = k_b$...konstanta

$$Z = \underbrace{\left(\frac{l}{a}\right)}_{=k_a}\underbrace{\left(\frac{l}{b}\right)}_{=k_b}\left(\frac{d}{l}\right), \qquad \boxed{Z = \frac{k_a k_b}{l/d}}$$

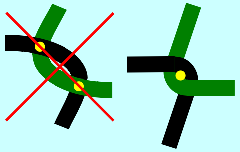
Zakrytí pleteniny je nepřímo úměrné poměru l/d

(Veličina hojně užívaná v pletařské praxi pro posuzování hustoty pleteniny.)

JEDNODUCHÝ GEOMETRICKÝ MODEL PLETENINY

Předpoklady:

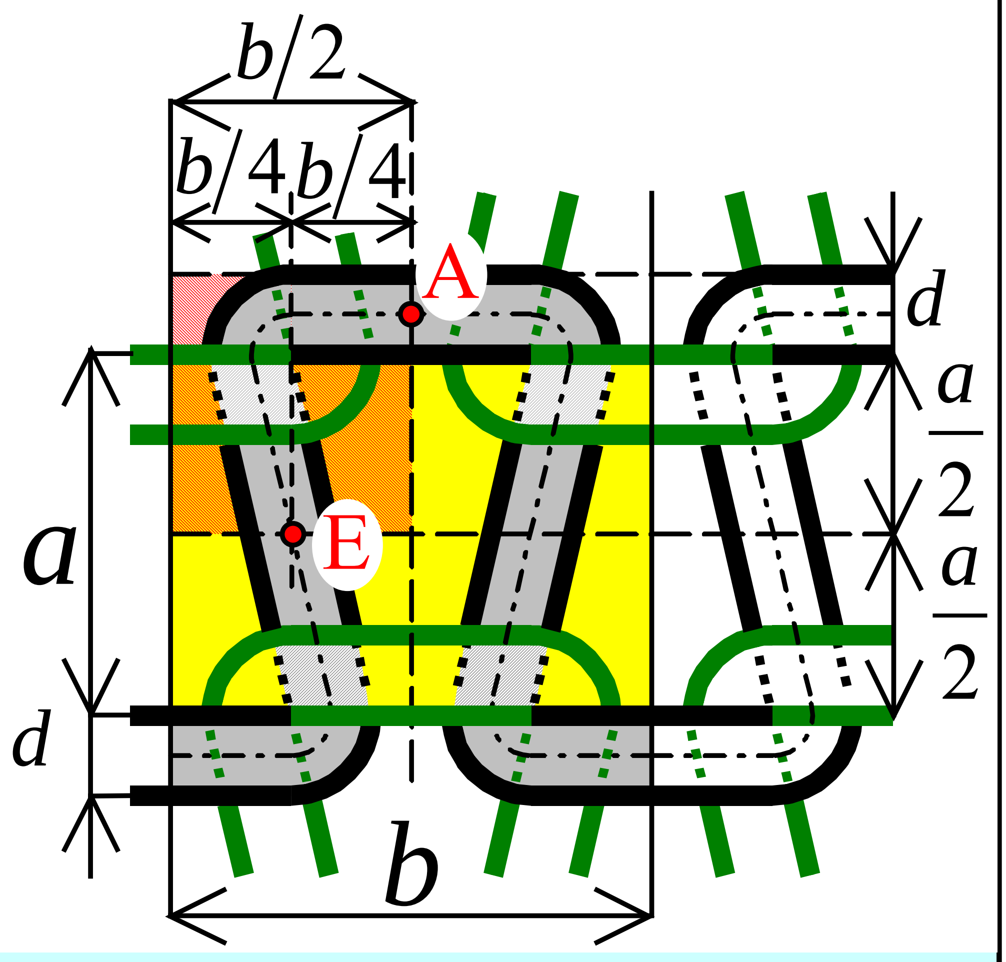
1. Osa nitě tvořící očko je složena z kruhových oblouků a úseček (apriorně geometrický model).
2. Nitě jsou dokonale ohebné (v překřížení nití nevzniká dvojí dotyk).



3. Očko je symetrické, tj.
   a) je osově symetrické podél osy mající směr sloupků a
   b) tvar jehelních i platinových oblouků je shodný.
4. „Prostorovost" očka lze zanedbat, tj. osu očka lze (formálně) považovat za rovinnou křivku.

Modelový tvar očka

- Strukturní jednotku tvoří (žlutý) obdélník ab.
- Šedé očko je tvořeno čtyřmi shodnými částmi; jednou z nich je část AE.
- Bod A leží v půli úsečky délky b, bod E leží v půli úsečky délky a.
- Část AE leží ve (vyšrafovaném) obdélníku s rozměry $b/2$ a $a/2+d$.



Čtvrtina očka – část AE:

Délka čtvrtiny očka… $l/4$

$$l/4=\overline{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overline{DE}$$

Platí

$$\boxed{\overline{AB}=b/4}\ ,\ \boxed{\overset{\frown}{BC}=\pi d/4}$$

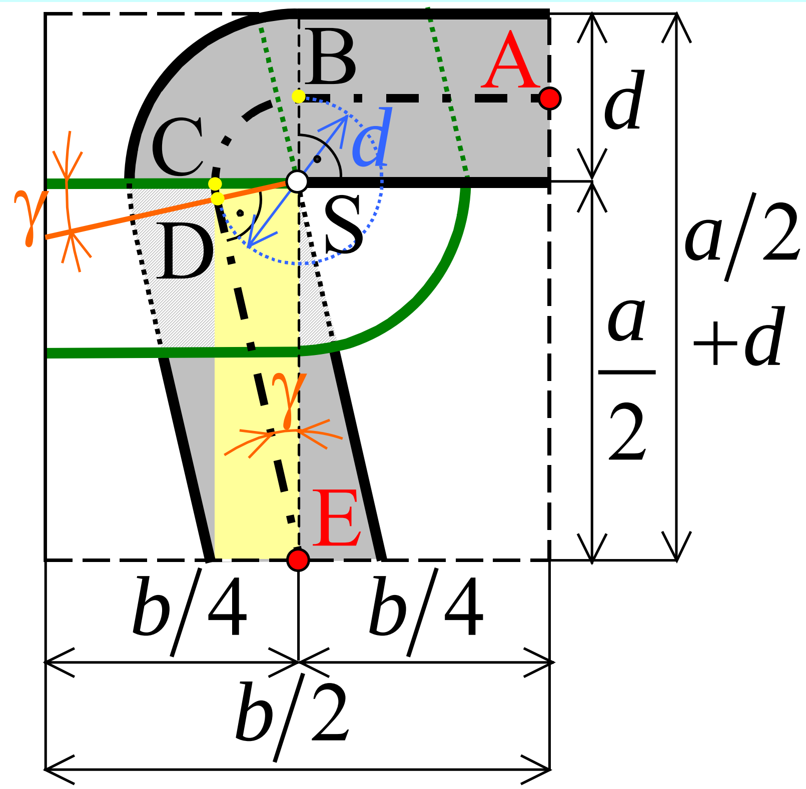
$\overset{\frown}{CD}$ je kruhový oblouk se středem S a poloměrem

$$\overline{DS}=\overline{CS}=d/2$$

Užitím Pythagorovy věty v trojúhelníku ESD nalezneme

$$\left(\overline{DE}\right)^2+\Big(\underbrace{\overline{DS}}_{=d/2}\Big)^2=\Big(\underbrace{\overline{ES}}_{=a/2}\Big)^2,$$

$$\left(\overline{DE}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{a^2-d^2}{4},$$

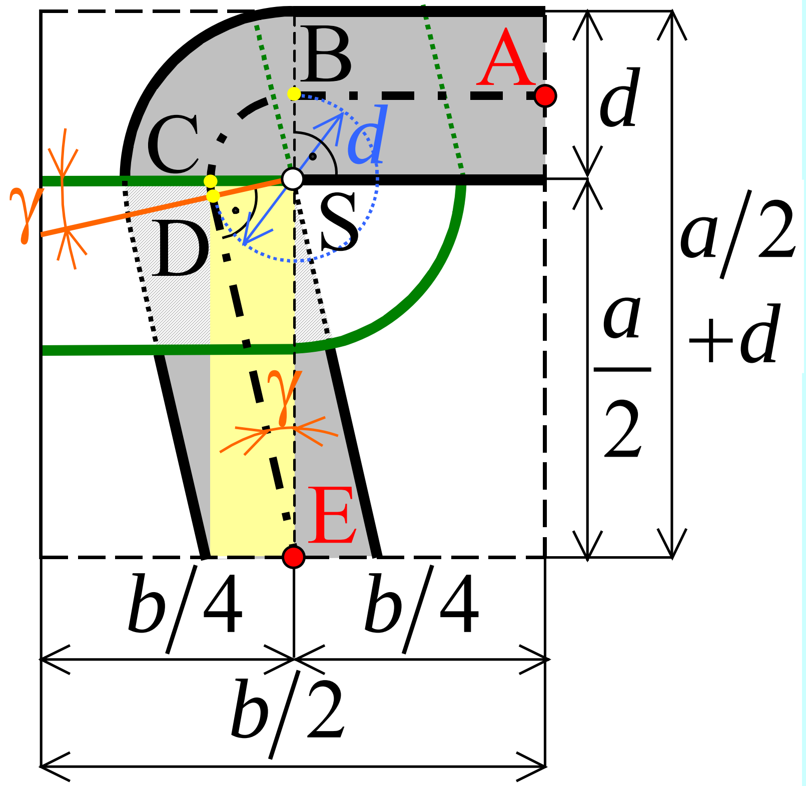


$$\boxed{\overline{DE}=\frac{\sqrt{a^2-d^2}}{2}}$$

Pro úhel γ platí

$$\sin\gamma = \overbrace{\overline{DS}}^{=d/2} \Big/ \overbrace{\overline{ES}}^{=a/2}, \qquad \boxed{\sin\gamma = \frac{d}{a}}$$

$$\boxed{\gamma = \arcsin\frac{d}{a}}$$



Pozn.: Protože $\overline{ES} \perp \overline{SC}$, $\overline{ED} \perp \overline{DS}$

platí $\sphericalangle DES = \sphericalangle DSC = \gamma$

Délka oblouku $\overset{\frown}{CD}$ je tedy

$$\overset{\frown}{CD} = \overbrace{\overline{DS}}^{=d/2} \; \overbrace{\gamma}^{=\arcsin(d/a)}, \qquad \boxed{\overset{\frown}{CD} = \frac{d}{2}\arcsin\frac{d}{a}}$$

Užitím odvozených vztahů $\dfrac{l}{4} = \overbrace{\overline{AB}}^{=\frac{b}{4}} + \overbrace{\overset{\frown}{BC}}^{=\frac{\pi d}{4}} + \overbrace{\overset{\frown}{CD}}^{=\frac{d}{2}\arcsin\frac{d}{a}} + \overbrace{\overline{DE}}^{=\frac{\sqrt{a^2-d^2}}{2}}$,

$$\frac{l}{4}=\frac{b}{4}+\frac{\pi d}{4}+\frac{d}{2}\arcsin\frac{d}{a}+\frac{\sqrt{a^2-d^2}}{2},\qquad l=b+\pi d+2d\arcsin\frac{d}{a}+2\sqrt{a^2-d^2},$$

Délka očka (modelová)... $\boxed{l=d\left[\frac{b}{d}+\pi+2\arcsin\frac{d}{a}+2\sqrt{\frac{a^2}{d^2}-1}\right]}$

<u>Zavedeme označení pro poměrné (bezrozměrné) veličiny</u>:

Poměrná délka očka... $\lambda=l/d$

Poměrná rozteč řádku... $\alpha=a/d=1/(H_\mathrm{r}d)$

Poměrná rozteč sloupku. $\beta=b/d=1/(H_\mathrm{s}d)$

Rovnici pro l můžeme nyní zapsat tvarem

$$\overbrace{l/d}^{=\lambda}=\overbrace{b/d}^{=\beta}+\pi+2\arcsin\left(\overbrace{d/a}^{=1/\alpha}\right)+2\sqrt{\left(\overbrace{a/d}^{=\alpha}\right)^2-1},$$

Poměrná (modelová) **délka očka** je tedy

$$\lambda = \beta + \pi + 2\arcsin\left(1/\alpha\right) + 2\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

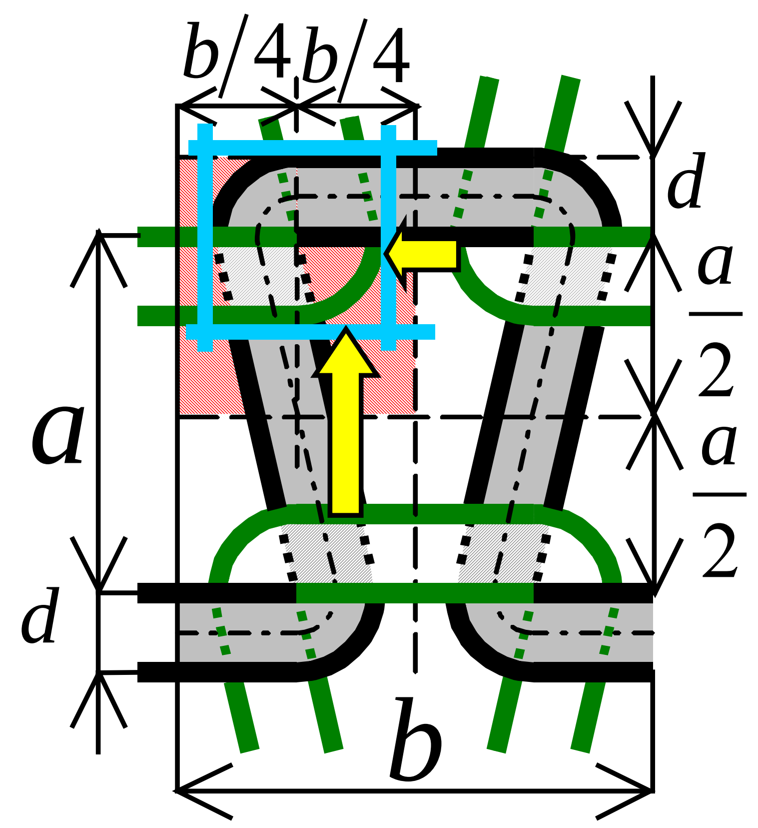
Poměrná délka očka λ je funkcí jen
poměrné rozteče řádku α a poměrné rozteče sloupku β.

Pozn.: Pro výpočet poměrné délky očka z posledního výrazu je nutné znát hodnoty α, β (tj. hodnoty H_r, H_s, d). Vypočtená – modelová - hodnota λ bude patrně o něco menší, než hodnota nalezená experimentálně. Oblouk BCD jsme totiž uvažovali jako část kruhu, zatímco ve skutečnosti je prostorovou křivkou. (Ve složitějších modelech je někdy uvažována jako část šroubovice.) Také úseky AB a ED, v modelu chápané jako úsečky, jsou ve skutečnosti jisté (mírně prohnuté) oblouky.

Mezní hustota řádků a sloupků

Pleteniny mohou mít různé hustoty, tj. různé hodnoty a, b.

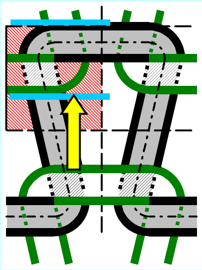
1. Zmenšujme rozteč řádku a. Pak dolní zelené očko se bude přibližovat k hornímu zelenému očku (⇧), až na něj „narazí“ (vodorovná modrá čára).
2. Zmenšujme rozteč sloupku b. Pak pravé zelené očko se bude přibližovat k levému zelenému očku (⇦), až na něj „narazí“ (svislá modrá čára).



Existují nejmenší přípustné hodnoty a, b (největší přípustné hodnoty H_r, H_s.)

MEZNÍ ROZTEČ ŘÁDKU

Při mezní rozteči řádku má čtvrtina očka AE tvar dle obrázku (bílá část). Platí



$\Rightarrow$

$a/2 = d,$ $\boxed{a = 2d,\ \ H_r = 1/(2d)}$

$\overbrace{a/d}^{=\alpha} = 2,$ $\boxed{\alpha = 2}$

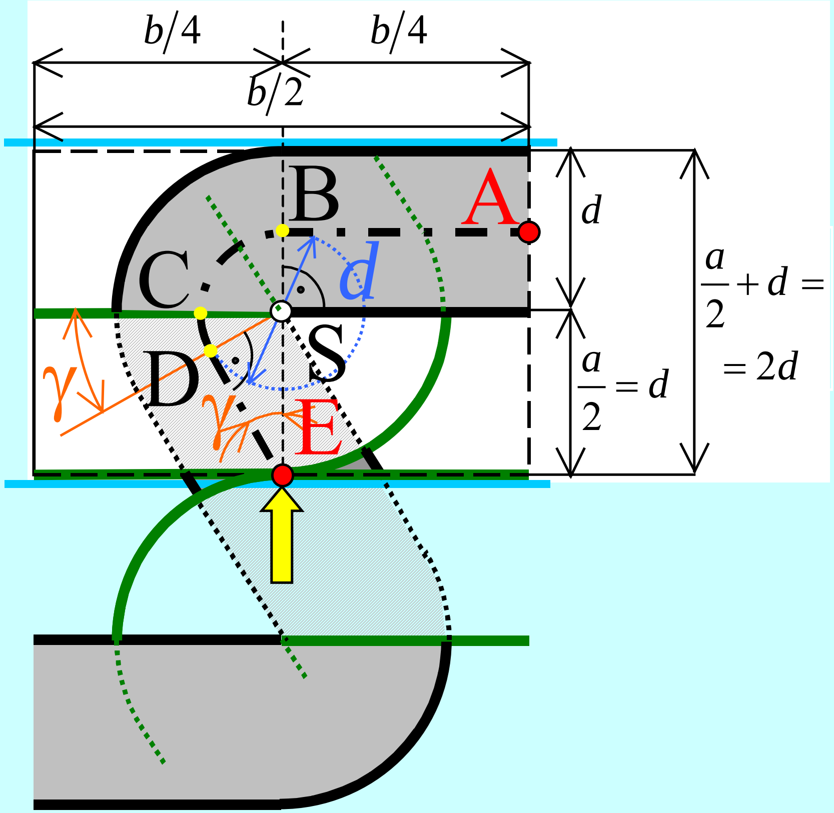
Potom

$\gamma = \arcsin\overbrace{(d/a)}^{=1/\alpha} = \arcsin\overbrace{\left(1/\overbrace{\alpha}^{=2}\right)}^{=\pi/6},$ $\boxed{\gamma = \pi/6}$

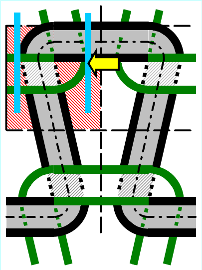
$\lambda = \beta + \pi + 2\arcsin\overbrace{\left(1/\overbrace{\alpha}^{=2}\right)}^{=\pi/6} + 2\sqrt{\underbrace{\left(\overbrace{\alpha}^{=2}\right)^2 - 1}_{=3}} =$

$= \beta + \overbrace{\pi + 2\pi/6}^{=4\pi/3} + 2\sqrt{3},$

$$\boxed{\lambda = \beta + \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}}$$



MEZNÍ ROZTEČ SLOUPKŮ



$\Rightarrow$

Při mezní rozteči sloupků má čtvrtina očka AE tvar dle obrázku (bílá část). Platí

$$b/2 = 2d,$$

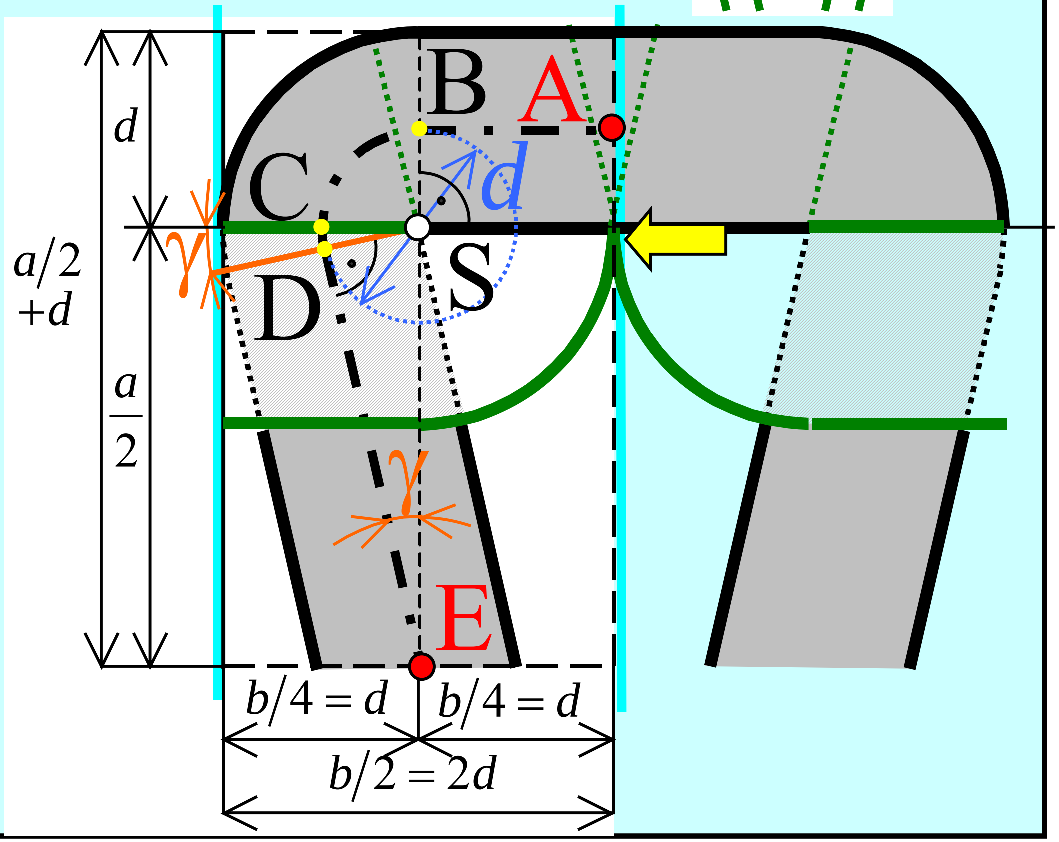
$$\boxed{b = 4d,\ \ H_s = 1/(4d)}$$

$$\overbrace{b/d}^{=\beta} = 4, \qquad \boxed{\beta = 4}$$

Potom

$$\lambda = \overbrace{\beta}^{=4} + \pi + 2\arcsin(1/\alpha) + +2\sqrt{\alpha^2 - 1},$$

$$\boxed{\lambda = 4 + \pi + +2\arcsin(1/\alpha) + +2\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$



MEZNÍ (NEJHUSTŠÍ) PLETENINA

V mezní (nejhustší) pletenině má čtvrtina očka AE tvar dle obrázku (bílá část). Platí že rozteč řádků i sloupků jsou mezní současně. Pak

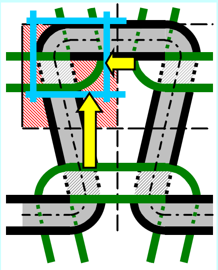
$a = 2d,\ \ H_r = 1/(2d)$

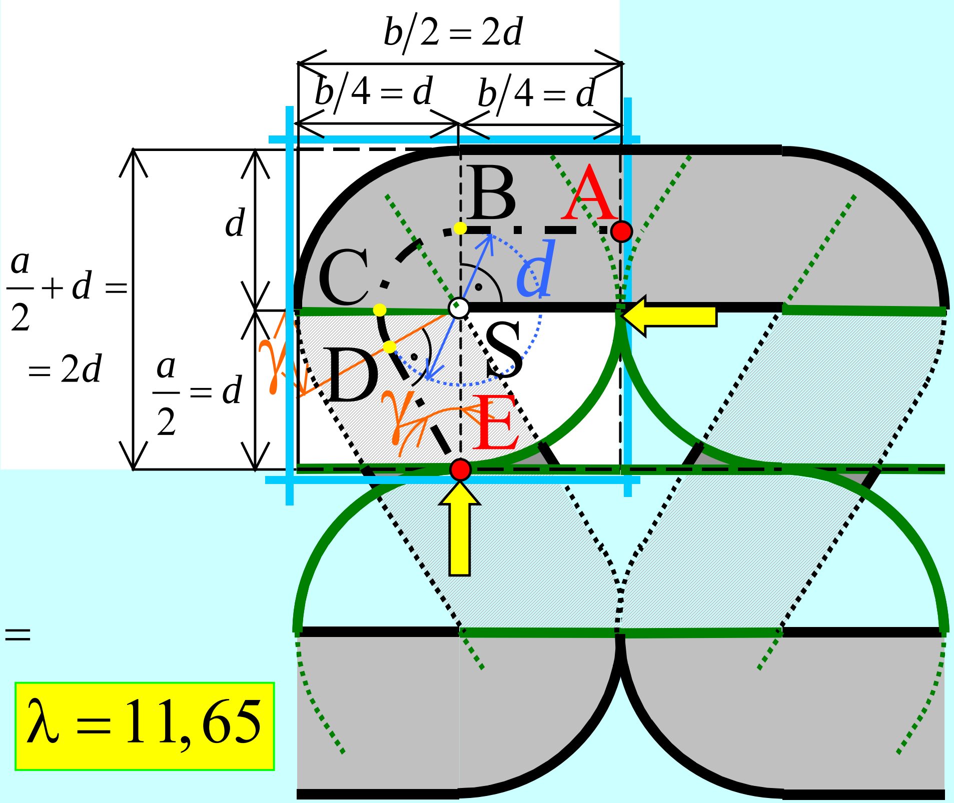
$\alpha = 2$

$\gamma = \pi/6$

$b = 4d,\ \ H_s = 1/(4d)$

$\beta = 4$





$$\lambda = \overbrace{\beta}^{=4} + \pi + 2\overbrace{\arcsin\left(1/\overbrace{\alpha}^{=2}\right)}^{=\pi/6} + 2\sqrt{\underbrace{\left(\overbrace{\alpha}^{=2}\right)^2 - 1}_{=3}} =$$

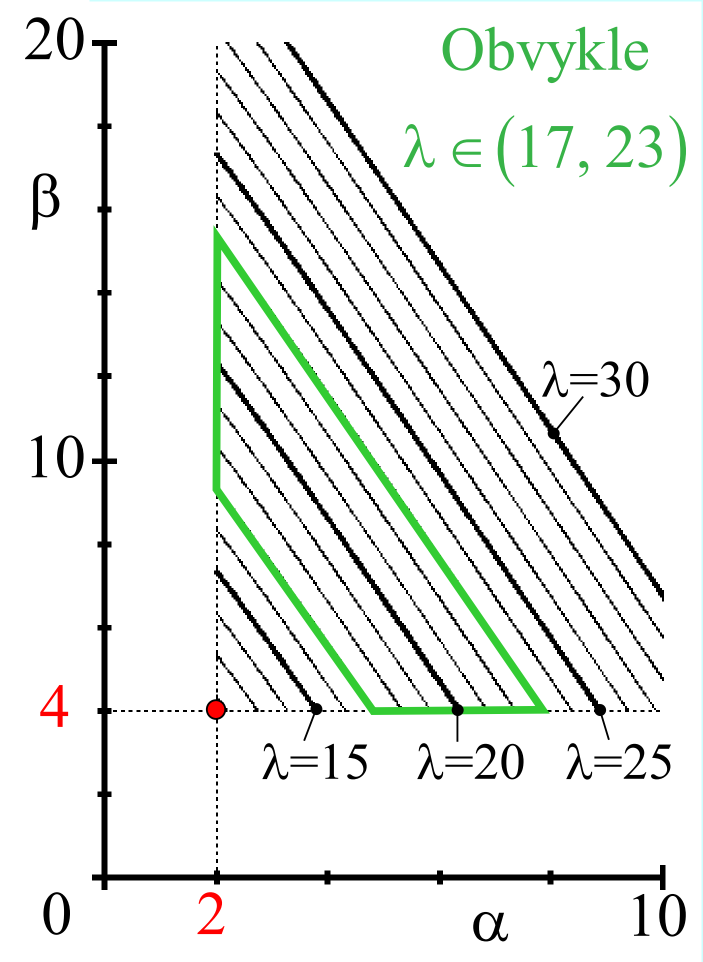
$$= 4 + \overbrace{\pi + 2\pi/6}^{=4\pi/3} + 2\sqrt{3} = 4 + \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3},\quad \lambda = 11{,}65$$

Závislost λ na α a β, tj. funkci

$$\lambda = \beta + \pi + 2\arcsin\left(1/\alpha\right) + 2\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

charakterizuje graf:

(● … mezní pletenina)



Je zřejmé, že existuje mnoho dvojic α, β (resp. a, b, nebo H_r, H_s), které vyhovují stejné (relativní) délce očka.

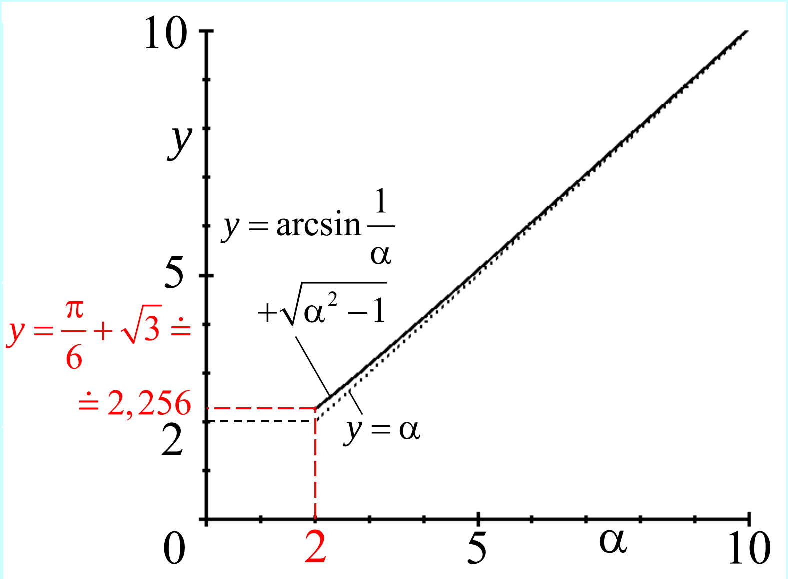
Pozn.: Protože třecí síly v křížení nití nebývají příliš velké, „tatáž" pletenina mívá mnoho různých „výchozích" stavů. (To teoreticky neplatí jen pro mezní pleteninu.)

Křivky v předchozím grafu byly <u>téměř lineární</u> $\Rightarrow$ *aproximace.*

Platí $\lambda = \beta + \pi + 2\arcsin(1/\alpha) + 2\sqrt{\alpha^2 - 1} =$

$$= \beta + \pi + 2\Big[\overbrace{\arcsin(1/\alpha) + \sqrt{\alpha^2 - 1}}^{=y}\Big],$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda = \beta + \pi + 2y, \\ &y = \arcsin(1/\alpha) + \sqrt{\alpha^2 - 1} \end{aligned}}$$



… <u>plná čára</u> v grafu.

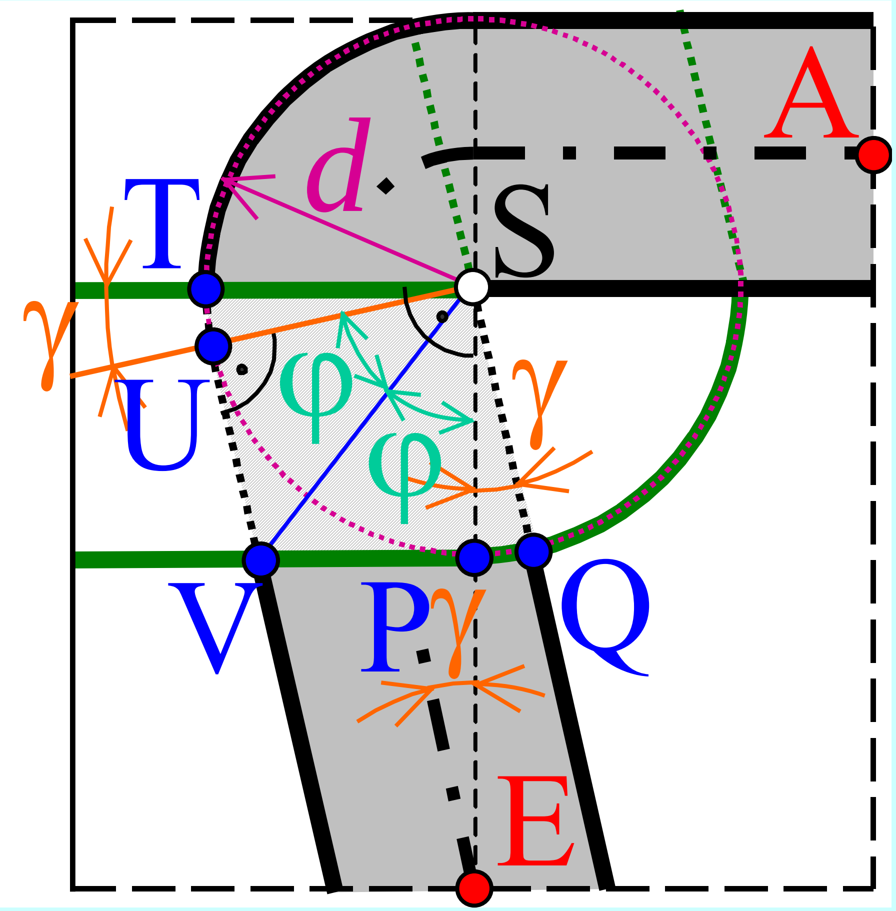
Pro <u>velké hodnoty α</u> platí $\arcsin(1/\alpha) \to 0,\ \sqrt{\alpha^2 - 1} \to \alpha$,

takže pak $y = \overbrace{\arcsin(1/\alpha)}^{\doteq 0} + \overbrace{\sqrt{\alpha^2 - 1}}^{\doteq \alpha}$, $\boxed{y \doteq \alpha}$ … <u>tečkovaná čára</u>

Aproximační vztah pro λ je tedy

$\boxed{\lambda \doteq \beta + \pi + 2\alpha}$ … lineární vazba mezi α a β.

Zakrytí pleteniny



PLOCHA PŘEKŘÍŽENÍ NITÍ

Ve vyšrafované ploše jsou nitě (šedá a zelená) překříženy (plocha STUVPQ).

STU a SPQ…dvě shodné kruhové výseče s poloměrem ST=SU=SP=SQ=d a úhlem γ.

Platí
$$\gamma = \arcsin\frac{d}{a} = \arcsin\frac{1}{\alpha}$$

- SVU a SVP…dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnou SU=SP=d a znázorněným úhlem φ

Plocha kruhové výseče

$$\mathrm{STU}=\mathrm{SPQ}=\pi d^2\frac{\gamma}{2\pi},$$

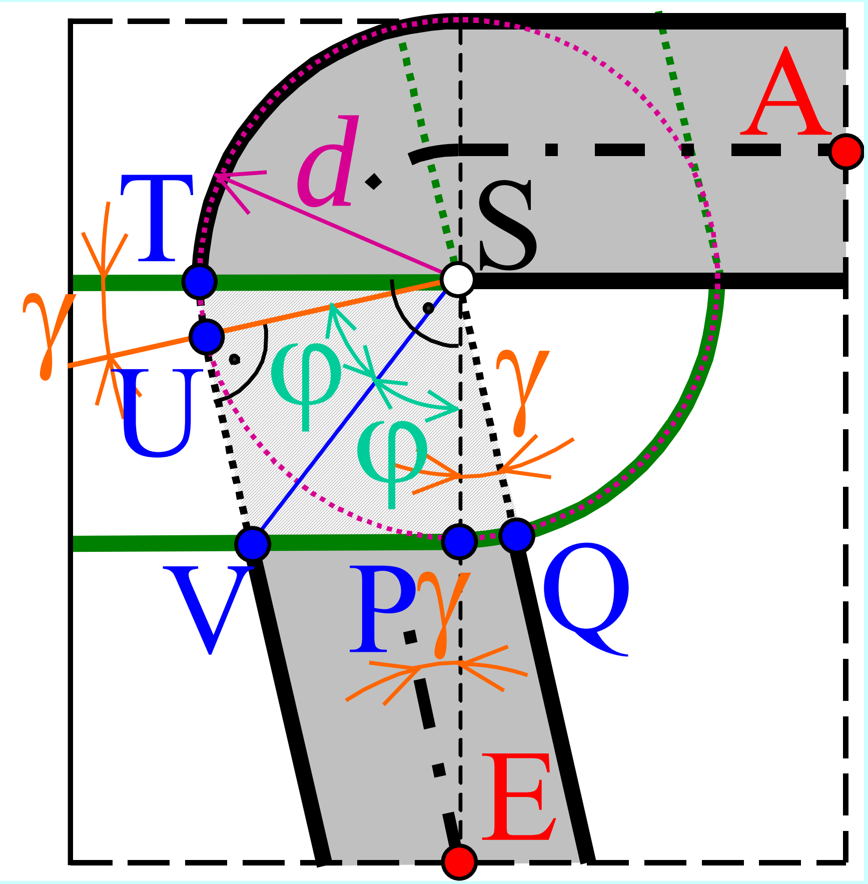
$$\boxed{\mathrm{STU}=\mathrm{SPQ}=\frac{d^2}{2}\gamma}$$

Platí

$$\underbrace{\sphericalangle \mathrm{TSU}}_{=\gamma}+\underbrace{\sphericalangle \mathrm{USV}}_{=\varphi}+\underbrace{\sphericalangle \mathrm{VSP}}_{=\varphi}=\pi/2,$$

$$\gamma+2\varphi=\pi/2,\quad \varphi=\frac{\pi/2-\gamma}{2},$$

$$\boxed{\varphi=\pi/4-\gamma/2}$$



$$\operatorname{tg}\varphi=\overline{\mathrm{UV}}\Big/\underbrace{\overline{\mathrm{US}}}_{=d},\quad \overline{\mathrm{UV}}=d\operatorname{tg}\varphi,$$

Plocha trojúhelníku

$$\mathrm{SVU}=\mathrm{SVP}=\underbrace{\overline{\mathrm{SU}}}_{=d}\cdot\underbrace{\overline{\mathrm{UV}}}_{=d\operatorname{tg}\varphi}\Big/2$$

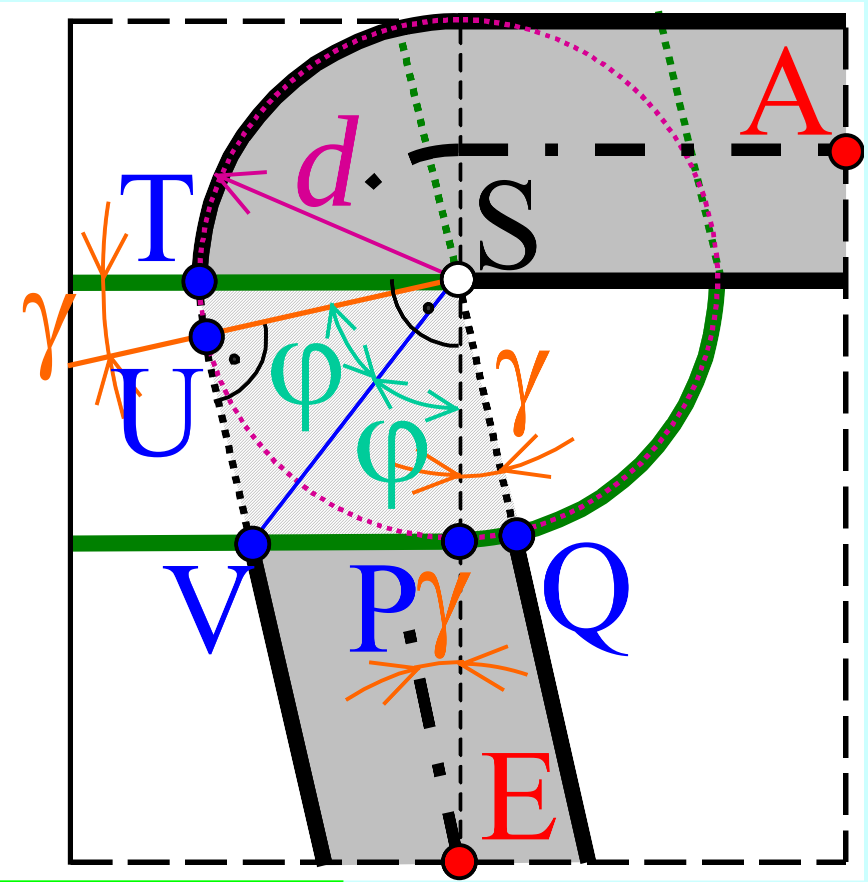
$$SVU = SVP = \frac{d^2}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

Plochu překřížení nití A tvoří 2 trojúhelníky a dvě výseče

$$A = 2\left(\overbrace{\frac{d^2}{2}\mathrm{tg}\varphi}^{\text{plocha trojúhelníku}}\right) + 2\left(\overbrace{\frac{d^2}{2}\gamma}^{\text{plocha výseče}}\right) =$$

$$= d^2\,\mathrm{tg}\overbrace{\varphi}^{=\pi/4-\gamma/2} + d^2\gamma =$$

$$= d^2\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\overbrace{\gamma}^{=\arcsin(1/\alpha)}}{2}\right) + \overbrace{\gamma}^{=\arcsin(1/\alpha)}\right],$$

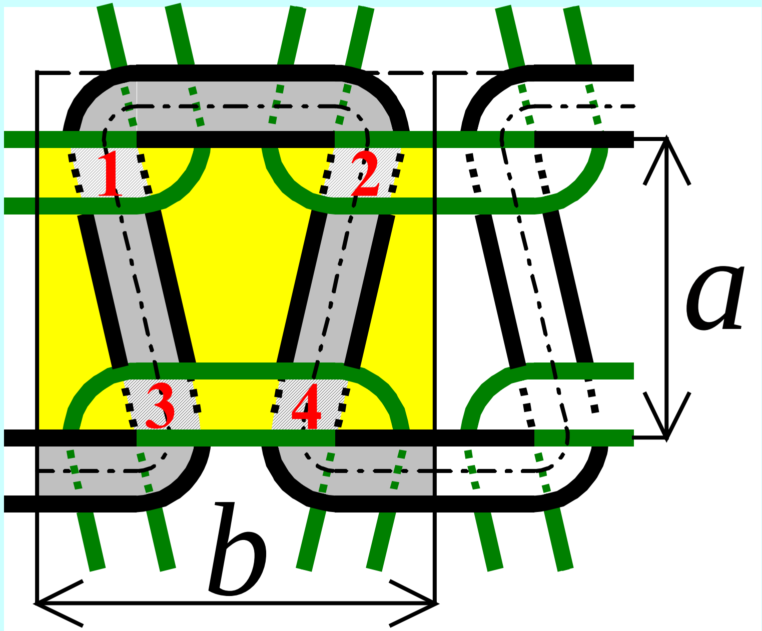


$$A = d^2\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\alpha}\right) + \arcsin\frac{1}{\alpha}\right]$$

ZAKRYTÍ PLETENINY

Plocha (žluté) strukturní jednotky pleteniny je ab. V ní je délka nitě l, plocha nitě je ld. Ve 4 překříženích (4x plocha A) kryje nit dvakrát totéž místo. Plocha zakrytá nití je tak $ld-4A$

Zakrytí pleteniny je pak



$$Z=\frac{ld-4\overbrace{A}^{=d^2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\alpha}\right)+\arcsin\frac{1}{\alpha}\right]}}{ab}=\frac{ld-4d^2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\alpha}\right)+\arcsin\frac{1}{\alpha}\right]}{ab}=$$

$$=\frac{\overbrace{(l/d)}^{=\lambda}\overbrace{(d/d)}^{=1}-4\overbrace{\left(d^2/d^2\right)}^{=1}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\alpha}\right)+\arcsin\frac{1}{\alpha}\right]}{\underbrace{(a/d)}_{=\alpha}\underbrace{(b/d)}_{=\beta}},$$

$$Z=\frac{\lambda-4\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\alpha}\right)+\arcsin\frac{1}{\alpha}\right]}{\alpha\beta}$$

Z dříve odvozené rovnice $\lambda=\beta+\pi+2\arcsin(1/\alpha)+2\sqrt{\alpha^2-1}$ plyne $\beta=\lambda-\pi-2\arcsin(1/\alpha)-2\sqrt{\alpha^2-1}$, a tedy

$$Z=\frac{\lambda-4\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\alpha}\right)+\arcsin\frac{1}{\alpha}\right]}{\alpha\left[\lambda-\pi-2\arcsin\frac{1}{\alpha}-2\sqrt{\alpha^2-1}\right]}$$

… zakrytí Z jako funkce α a λ

V jiné úpravě dosadíme za λ.

$$Z=\frac{\overbrace{\lambda}^{=\beta+\pi+2\arcsin(1/\alpha)+2\sqrt{\alpha^2-1}}-4\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\alpha}\right)+\arcsin\frac{1}{\alpha}\right]}{\alpha\beta},$$

$$Z=\frac{\left[\beta+\pi+2\arcsin\frac{1}{\alpha}+2\sqrt{\alpha^2-1}\right]-4\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\alpha}\right)+\arcsin\frac{1}{\alpha}\right]}{\alpha\beta}=$$

$$=\frac{\beta+\pi+2\arcsin\frac{1}{\alpha}+2\sqrt{\alpha^2-1}-4\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\alpha}\right)-4\arcsin\frac{1}{\alpha}}{\alpha\beta},$$

$$\boxed{Z=\frac{\beta+\pi+2\sqrt{\alpha^2-1}-4\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\alpha}\right)-2\arcsin\frac{1}{\alpha}}{\alpha\beta}}$$

...zakrytí Z jako funkce α a β

Pro <u>mezní zakrytí</u> $Z_{\text{mezní}}$ ($\alpha=2$ a $\beta=4$) platí

$$Z_{\text{mezní}}=\frac{4+\pi+2\sqrt{2^2-1}-4\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}\right)-2\arcsin\frac{1}{2}}{2\cdot 4},\qquad \boxed{Z_{\text{mezní}}=0,906}$$

PLETENINY 1

Vztahy ilustruje graf:

Pozn.: Pro dané λ je nejmenší zakrytí při-bližně při poměru $\alpha:\beta = 1:2$.