Inverzní matice

$A \sim B$ znamená, že matice B vznikne z A konečným počtem elementárních úprav (kroků GEM):

1) výměna řádků
2) vynásobení řádku nenulovou konst.
3) přičtení násobku řádku k jinému ř.
4) vyškrtnutí nulového řádku.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (-2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \end{array} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{\text{jednotková matice}}$$

$x = 1$

$y = 1$

$z = 1$

$$2x = 6 \quad (:2)$$

$$x = 3$$

$$2x = 6 \quad \cdot \frac{1}{2} = 2^{-1} \qquad 2 \cdot 2^{-1} = 1$$

$$1x = 3$$

Nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$ a E je jednotková matice téhož typu. Matici (také typu $n \times n$), kterou označíme A^{-1}, nazveme inverzní maticí k matici A, jestliže $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Máme $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ a hledáme A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+2d+g & 2b+2e+h & 2c+2f+i \\ a-d-3g & b-e-3h & c-f-3i \\ a+2d+2g & b+2e+2h & c+2f+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2a+2d+g &= 1 \\ a-d-3g &= 0 \\ a+2d+2g &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2b+2e+h &= 0 \\ b-e-3h &= 1 \\ b+2e+2h &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2c+2f+i &= 0 \\ c-f-3i &= 0 \\ c+2f+2i &= 1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{A}\left|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E}\right] \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-2) \end{matrix} \sim \left[\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -3 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{matrix}\right]\right. \begin{matrix} \\ \\ 2 \end{matrix} \sim \left[\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{matrix}\right]\right. \begin{matrix} \\ \\ (-7)\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -2 & 2 & 4 \\ -20 & 12 & 28 \\ 3 & -2 & -4 \end{matrix}\right]\right. \begin{matrix} (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{matrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -16 & 8 & 20 \\ -20 & 12 & 28 \\ 3 & -2 & -4 \end{matrix}\right]\right. \begin{matrix} \cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ \cdot\left(\frac{1}{4}\right) \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E}\left|\underbrace{\begin{matrix} 4 & -2 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & -4 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right]\right.$$

$a = 4$ $\quad b = -2$ $\quad c = -5$

$d = -5$ $\quad e = 3$ $\quad f = 7$

$g = 3$ $\quad h = -2$ $\quad i = -4$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Gaussova-Jordanova eliminace: algoritmus nalezení inverzní matice

$$[A|E] \sim [E|A^{-1}]$$

zkouška:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Příklad: Hledáme B^{-1} pro $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2) \\ (-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

nemá řešení

B nemá inverzní matici

Singulární matice je (čtvercová) matice, která nemá inverzní matici

Regulární matice —||— má —||—

Pro matici $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ a $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ hledáme matici X (2×2)

aby platilo

$$A \cdot X = B \quad / \cdot A^{-1} \text{ zleva}$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

inverzní pro A:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-2) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

zk: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot X = B \quad / \cdot A^{-1} \text{ zprava}$$

$$A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$\cancel{A^{-1} \cdot A \cdot X = B \cdot A^{-1}}$$

Pro matici $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ vyřešte rovnici

$$C \cdot X = O \quad / \cdot C^{-1} \text{ zleva}$$

$$\underbrace{C^{-1} \cdot C}_{E} \cdot X = C^{-1} \cdot O$$

$$X = O$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

C je singulární!

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a - c = 0 \quad b - d = 0$

$a = c = t \ (t \in \mathbb{R})$

$b = d = r \ (r \in \mathbb{R})$

$$X = \begin{bmatrix} t & r \\ t & r \end{bmatrix}$$