1 Determinant matice

1.1 Výpočet determinantu malých matic

S pojmem determinant matice jste se už možná setkali. Nejprve si připomeneme mnemotechnické pomůcky pro výpočet determinantů malých matic a poté se podíváme na další možnosti, jak determinant počítat. Nakonec si ukážeme několik aplikací determinantu v úlohách, kterými jsme se již zabývali.

Determinant je pravidlo, pomocí kterého čtvercové matici přiřazujeme reálné číslo. Mohli bychom také říkat, že je to zobrazení. Pro matice 2×2 a 3×3 se toto pravidlo často vykládá pomocí schémat udávajících, jak determinant spočítat. Buď $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. Determinant matice $\mathbf{A}$ označujeme $\det \mathbf{A}$, pokud chceme napsat celou matici, používáme dvě následující značení:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Buď před matici napíšeme prostě det nebo použijeme místo hranatých (kulatých) závorek závorku rovnou (jako u absolutní hodnoty). Obě tato značení se běžně používají. Jak již bylo uvedeno, determinant znamená, že matici přiřazujeme číslo. Determinant matice, tedy např. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ už není matice, ale jedno reálné číslo. Jak toto číslo získáme? Pro matice 2×2 počítáme podle tzv. křížového pravidla. Vynásobíme nejprve prvky na hlavní diagonále a od výsledku odečteme součin prvků na vedlejší diagonále (zprava nahoře doleva dolů):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} {\color{red}a_{1,1}} & {\color{blue}a_{1,2}} \\ {\color{blue}a_{2,1}} & {\color{red}a_{2,2}} \end{vmatrix} = {\color{red}a_{1,1}} \cdot {\color{red}a_{2,2}} - {\color{blue}a_{1,2}} \cdot {\color{blue}a_{2,1}}.$$

Barevné znázornění součinu, který bereme se znaménkem plus (červený), a součinu, který bereme se znaménkem mínus (modrý), ukazuje důvod názvu křížové pravidlo. Konkrétně počítáme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} {\color{red}1} & {\color{blue}3} \\ {\color{blue}2} & {\color{red}7} \end{vmatrix} = {\color{red}1} \cdot {\color{red}7} - {\color{blue}2} \cdot {\color{blue}3} = 1.$$

Pro matice typu 3×3 je pravidlo pro výpočet determinantu podobné. Je ale trošku složitější a nazývá se Sarrusovo pravidlo. Toto pravidlo předvedeme nejdřív rovnou na konkrétní matici: chceme spočítat determinant matice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro začátečníka je výhodné si pod matici (jakoby do čtvrtého a pátého řádku) opsat první a druhý řádek:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podobně, jako u křížového pravidla pro matice 2×2 budeme násobit prvky na hlavní diagonále. Po sepsání dvou řádků (což je jenom pomůcka pro lepší přehlednost) vidíme v matici pod hlavní diagonálou další dvě diagonály. I prvky na těchto diagonálách vynásobíme a výsledky sečteme.

Poté budeme ještě něco odečítat. Dostaneme:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

resp. v nerozšířené podobě

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a $\det \mathbf{B} = 2 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 2 - (\dots) = 14 + 0 + 6 - (\dots) = 20 - (\dots)$. To co se odečítá dostaneme podobně jako u křížového pravidla tak, že budeme brát diagonály v druhém směru:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

resp. v nerozšířené podobě

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a $\det \mathbf{B} = 20 - (1 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 2) = 20 - (7 + 0 + 6) = 20 - 13 = 7$. To je tzv. Sarrusovo pravidlo pro výpočet determinantu, které říká obecně pro matici $\mathbf{B}$:

$$\det \mathbf{B} = b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3} + b_{2,1}b_{3,2}b_{1,3} + b_{3,1}b_{1,2}b_{2,3} - (b_{1,3}b_{2,2}b_{3,1} + b_{1,1}b_{2,3}b_{3,2} + b_{1,2}b_{2,1}b_{3,3}).$$

Není potřeba si toto zapamatovat jako vzorec, spíš je vhodné naučit se schéma znázorněné barevně v předchozím postupu: tři diagonály v jednom směru minus tři diagonály v druhém směru.

Podobnost křížového a Sarrusova pravidla by mohla naznačovat, že pro matici 4×4 bude postup podobný. Ukazuje se ale, že determinant matic větších než 3×3 se tímto způsobem vůbec počítat nedá! Je proto vhodné najít i jiné cesty, jak determinanty počítat. Odlišné způsoby výpočtu determinantu jsou založené na jeho přesné definici. Ta používá tzv. permutace a v tomto kurzu ji nebudeme uvádět. Prohlédněte si ale schémata na křížové a Sarrusovo pravidlo a všimněte si, že v součinu v jednotlivých sčítancích vybíráme prvky vždy právě jeden z každého řádku a každého sloupce tak, že nikdy nenásobíme prvky ležící v matici vedle sebe nebo nad sebou. (U Sarrusova pravidla je třeba hledat v původní matici, nikoliv v té, kde jsou přidány dva řádky. I tam je ale vidět, že prvky, které násobíme a jsou stejnou barvou, nejsou nikdy vedle sebe ani nad sebou.) Odpověď na kombinatorickou úlohu, kolika způsoby lze v matici $n \times n$ vybrat n prvků tak, aby žádné dva neležely ve stejném řádku nebo ve stejném sloupci, je $n!$ způsobů. Vykřičník značí tzv. faktoriál a pro přirozené n platí $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Ve výpočtu determinantu použijeme všechny tyto způsoby, takže v determinantu matice $n \times n$ sčítáme vždy $n!$ sčítanců. Opravdu $2! = 2$ a v křížovém pravidlu sčítáme dva součiny. $3! = 6$ a v Sarrusově pravidlu sčítáme (a odečítáme) 6 součinů. Faktoriál ovšem rychle roste a $4! = 24$. Pro výpočet determinantu matice 4×4 potřebujeme sečíst 24 součinů. Na to už žádné snadné mnemotechnické pravidlo nevymyslíte.

Odpověď na otázku, jak počítat determinanty bez ohledu na velikost matice, může naznačit následující příklad. Chceme spočítat

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Takovýto determinant zatím spočítat neumíme. Na základě toho, co jsme uvedli, ale víme, že bychom potřebovali vypsat všech 24 možností výběru čtveřic prvků takových, že žádné neleží vedle sebe nebo nad sebou (najděte si několik takových čtveřic). Prvky v našem výběru se pak vždy násobí. Vykytuje-li se ale v součinu nula, je celý součin roven nule. Ukazuje se, že v zadané matici bude obsahovat nulu 23 výběrů (a ty tak výslednou hodnotu determinantu neovlivní) a jediný možný výběr neobsahující nulu je hlavní diagonála. Platí tedy

$$\begin{vmatrix} \color{red}{1} & 3 & 7 & 2 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \color{red}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{5} \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15.$$

Je-li tedy čtvercová matice v odstupňovaném tvaru, je její determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále (a to bez ohledu na velikost matice). Ovšem ne každá matice má odstupňovaný tvar. Na druhou stranu každou matici umíme na odstupňovaný tvar převést eliminační metodou. O výpočtu determinantů pomocí eliminace pojednává další kapitola.

1.2 Výpočet determinantů pomocí eliminační metody

Už víme, že determinant čtvercové matice v odstupňovaném tvaru je roven součinu prvků na její diagonále. Odstupňovaný tvar získáme Gaussovou eliminační metodou. Determinant je ale číslo, které se v průběhu eliminace může měnit. A my potřebujeme determinant matice, která je na začátku eliminace nikoliv na jejím konci. Naštěstí se ukazuje, že změny determinantu v průběhu eliminace jsou předvídatelné a můžeme je kompenzovat tak, aby po celou dobu byla hodnota determinantu stejná.

Ukažme si základní pravidla pro eliminaci při výpočtu determinantu. Buď $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. $\det \mathbf{A} = 2$ podle křížového pravidla. Podívejme se, co se bude s hodnotou determinantu dít, budeme-li provádět jednotlivé typy elementárních úprav. Platí (použijeme výměnu řádků)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$. Determinant změnil znaménko. Je to obecné pravidlo, při výměně řádků otáčí determinant znaménko. V eliminaci píšeme (determinanty jsou čísla, píšeme $=$ nikoliv $\sim$):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \color{red}{-} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Červené minus jsme přidali tak, aby platila rovnost. Výměna řádků totiž otáčí znaménko a přidáme-li tam dodatečně (pro opravu) minus, otočíme znaménko zase zpátky a rovnost opravdu platí: na levé straně je 2, na pravé straně $\color{red}{-}(-2) = 2$.

Další elementární úpravou je vynásobení řádku číslem. V matici **A** vynásobíme první řádek třemi a dostaneme
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$
A opět si ilustrujeme obecnou vlastnost: $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 6 = 3 \cdot 2$. Vynásobením řádku třemi se hodnota determinantu vynásobila třemi. Při vynásobení řádku matice číslem se tímto číslem násobí i hodnota determinantu této matice. Pro kompenzaci tedy musíme touto hodnotou dělit. Píšeme
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}.$$
Číslo $\frac{1}{3}$ přidáváme jako korekci. Vynásobení řádku třemi ztrojnásobilo determinant. Vydělením třemi jsme zpátky na původní správné hodnotě 2.

Další elementární úpravou je přičtení násobku řádku k jinému řádku. Přičteme li (-2)-krát první řádek ke druhému řádku, dostaneme
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Takto bychom postupovali v "opravdové"eliminaci. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ podle křížového pravidla nebo podle pravidla, že v odstupňované matici je determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále. Přičtení násobku řádku k jinému řádku hodnotu determinantu nemění:
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Poslední elementární úpravou je vyškrtnutí nulového řádku. Tuto úpravu v determinantu neprovádíme, protože determinanty počítáme ze čtvercových matic.Pokud se ale v matici během eliminace objeví nulový řádek, je její determinant roven nule.

Při eliminaci v determinantu lze elementární úpravy aplikovat i na sloupečky. Můžeme tedy prohazovat sloupečky, násobit sloupeček nenulovou konstantou nebo přičítat násobek sloupečku k jinému sloupečku. Pozor, tyto úpravy v eliminaci při řešení soustav nedávají smysl a provádět je nesmíme. Důvodem, proč v determinantu tyto úpravy provádět lze, je následující vlastnost:
$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T.$$
$\mathbf{A}^T$ přitom značí tzv. transponovanou matici k matici **A**. Transponovaná matice vznikne z původní matice tak, že řádky původní matice **A** tvoří sloupečky transponované matice $\mathbf{A}^T$. Pro
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
je transponovaná matice
$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Díky tomu, že transponování nemění hodnotu determinantu, můžeme matici, ze které determinant počítáme, kdykoliv transponovat a pokračovat v eliminaci s tím, co byly původně sloupečky. Můžeme tedy transponování vynechat a provádět elementární úpravy i se sloupci.

Shrnutí pravidel pro eliminaci v determinantu:

1. Pokud matice $\mathbf{B}$ vznikne z $\mathbf{A}$ prohozením dvou jejích různých řádků, platí $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.
2. Vznikne-li $\mathbf{B}$ z $\mathbf{A}$ vynásobením řádku $\mathbf{A}$ konstantou α, platí $\det \mathbf{B} = \alpha \det \mathbf{A}$.
3. Vznikne-li $\mathbf{B}$ z $\mathbf{A}$ přičtením násobku řádku $\mathbf{A}$ k jinému jejímu řádku, je $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.
4. Všechna tato pravidla platí i pro práci se sloupci. Např. prohození dvou různých sloupečků otáčí znaménko determinantu.

Spočítáme eliminační metodou determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Matici, ze které determinant počítáme, převedeme na odstupňovaný tvar. Nejprve odečteme první řádek od druhého. Přičtení násobku řádku k jinému řádku determinant nemění, dostáváme:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Třetí řádek vynásobíme dvěma:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

tento krok musíme korigovat vynásobením $\frac{1}{2}$, protože vynásobení řádku konstantou způsobí vynásobení hodnoty determinantu touto konstantou. Teď od třetího řádku odečteme první řádek, tato úprava determinant nemění:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

V posledním kroku přičteme ke třetímu řádku druhý řádek vynásobený $\frac{3}{4}$. Tato úprava opět determinant nemění (přičtení násobku řádku k jinému řádku):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{vmatrix}.$$

Determinant odstupňované matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále, dostáváme

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{7}{4} = 7.$$

Stejný výsledek jsme dostali v předchozí kapitole za pomocí Sarrusova pravidla. To je asi pro matici 3×3 příjemnější na výpočet než eliminace. Výhoda eliminace je v tom, že není nijak omezena velikostí matice a můžeme tak počítat i determinanty matic 4×4 a větších.

Máme-li spočítat

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix},$$

nemáme v tuto chvíli jinou možnost, než eliminovat. Musíme začít výměnou řádků, což je krok, který otáčí znaménko, musíme proto znaménko otočit zpátky:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Teď můžeme minus jedna násobek prvního řádku přičíst ke třetímu a rovnou i ke čtvrtému řádku. Přičtení násobku řádku k jinému řádku hodnotu determinantu nemění, nemusíme tedy nijak korigovat:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

V dalším kroku přičteme minus jeden krát druhý řádek ke třetímu a čtvrtému. Opět beze změny hodnoty determinantu:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Výsledek je tedy 1 (součin prvků na hlavní diagonále; nezapomeneme na znaménko před determinantem).

1.3 Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupečku

Rozvoj determinantu je vlastně jiný přepis definice determinantu, asi šikovnější na výpočet. My jsme sice obecnou definici neuváděli, vrátíme se ale k Sarrusovu pravidlu. Uváděli jsme totiž aspoň následující obecný vztah pro výpočet determinantu matice $\mathbf{B}$ typu 3×3:

$$\det \mathbf{B} = b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3} + b_{2,1}b_{3,2}b_{1,3} + b_{3,1}b_{1,2}b_{2,3} - (b_{1,3}b_{2,2}b_{3,1} + b_{1,1}b_{2,3}b_{3,2} + b_{1,2}b_{2,1}b_{3,3}).$$

Vytkneme prvky prvního řádku $b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}$ a dostaneme

$$\det \mathbf{B} = b_{1,1}(b_{2,2}b_{3,3} - b_{2,3}b_{3,2}) + b_{1,2}(b_{3,1}b_{2,3} - b_{2,1}b_{3,3}) + b_{1,3}(b_{2,1}b_{3,2} - b_{2,2}b_{3,1}).$$

Píšeme to takto proto, že výrazy v závorkách vypadají jako křížové pravidlo pro determinant 2×2. Znázorněme si v matici první člen $b_{1,1}(b_{2,2}b_{3,3} - b_{2,3}b_{3,2})$:

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Na tento první člen můžeme tedy pohlížet jako na součin prvku $b_{1,1}$ a determinantu 2×2, který vznikne z původního determinantu vypuštěním prvního řádku a prvního sloupce (těch, ve kterých leží $b_{1,1}$):

$$\begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Stejným způsobem by se daly interpretovat i zbývající dva členy (pozor u druhého na znaménko).

Z důvodů ilustrovaných předcházejícími výpočty zavádíme pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ následující značení: $\mathbf{A}_{i,j}$ bude označovat matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z původní matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Jako tzv. algebraický doplněk k pozici (i, j) pak označujeme číslo $D_{i,j} = (-1)^{(i+j)} \det \mathbf{A}_{i,j}$. Máme-li matici

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pak jako $\mathbf{C}_{1,2}$ označujeme matici, která vznikne z $\mathbf{C}$ vypuštěním 1. řádku a 2. sloupečku.

$$\mathbf{C}_{1,2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a příslušný algebraický doplněk je

$$D_{{\color{red}1},{\color{blue}2}} = (-1)^{({\color{red}1}+{\color{blue}2})} \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -4.$$

Napišme ještě třeba $\mathbf{C}_{3,3}$:

$$\mathbf{C}_{3,3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

a příslušný doplněk je

$$D_{{\color{red}3},{\color{blue}3}} = (-1)^{({\color{red}3}+{\color{blue}3})} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = 2.$$

Když použijeme toto značení, můžeme psát místo

$$\det \mathbf{B} = b_{1,1}(b_{2,2}b_{3,3} - b_{2,3}b_{3,2}) + b_{1,2}(b_{3,1}b_{2,3} - b_{2,1}b_{3,3}) + b_{1,3}(b_{2,1}b_{3,2} - b_{2,2}b_{3,1})$$

mnohem lépe zapamatovatelné

$$\det \mathbf{B} = b_{1,1}D_{1,1} + b_{1,2}D_{1,2} + b_{1,3}D_{1,3}.$$

Tento vztah se nazývá rozvoj determinantu podle prvního řádku. Podle prvního řádku proto, že algebraické doplňky se násobí postupně prvky $b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}$, jako bychom procházeli první řádek. Můžeme použít libovolný řádek a dokonce také libovolný sloupeček. Navíc tento způsob výpočtu determinantu funguje na determinant libovolného typu. Vždy projíždíme celý příslušný řádek (nebo sloupec) a prvky násobíme odpovídajícími algebraickými doplňky. Výsledky pak sčítáme. Obecně pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ vypadá vztah pro rozvoj podle r-tého řádku takto:

$$\det \mathbf{A} = a_{r,1}D_{r,1} + a_{r,2}D_{r,2} + \cdots + a_{r,n}D_{r,n}.$$

Rozvoj podle s-tého sloupečku pak analogicky:

$$\det \mathbf{A} = a_{1,s}D_{1,s} + a_{2,s}D_{2,s} + \cdots + a_{n,s}D_{n,s}.$$

Zmiňme ještě tzv. falešný rozvoj. Použijeme-li v rozvoji podle řádku (a podle sloupce by to bylo stejné) prvky z jiného řádku než doplňky, vyjde 0. Pro $r \neq t$ platí

$$0 = a_{r,1}D_{t,1} + a_{r,2}D_{t,2} + \cdots + a_{r,n}D_{t,n}.$$

Vraťme se k determinantu

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

o kterém víme, že vyjde 7. Spočítali jsme ho Sarrusovým pravidlem a také eliminací. Rozvojem tohoto determinantu podle prvního řádku dostaneme:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 + 3\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot(-7) = 7.$$

Můžeme zkusit ještě rozvoj podle druhého sloupce:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 7(-1)^{(2+2)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{(3+2)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 0 + 7\cdot 1 + 0\cdot(-1)\cdot 2 = 7.$$

Další determinant, který jsme již počítali je

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Když aplikujeme rozvoj podle prvního řádku, dostaneme

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Takovýto rozvoj nám sice umožňuje použít Sarrusovo pravidlo, které na původní determinant matice 4×4 použít nešlo, nicméně musíme počítat 4 determinanty matic 3×3, což není úplně lákavě. Klíčem k chytrému použití je první sčítanec rozvoje odpovídající prvku 0. Jakmile se totiž v součinu vyskytuje 0, je nula celý součin a determinant nemusíme vyčíslovat. Pro rozvoj si proto vybíráme řádek nebo sloupec obsahující co nejvíce nul. Ještě lepší je kombinovat obě metody, které jsme si pro výpočet determinantu ukázali: eliminaci a rozvoj: pomocí eliminační metody si v nějakém řádku nebo sloupečku vyrobíme co nejvíce nul a poté tento řádek (sloupec) použijeme pro rozvoj. V naší matici nejprve přičteme druhý řádek vynásobený (-2) ke třetímu řádku (přičtení násobku řádku k jinému řádku determinant nezmění) a pak napíšeme rozvoj podle třetího řádku:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -1(-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Členy násobené (modrými) nulami už jsme nepsali. Takto se nám podařilo pomocí kombinace eliminace a rozvoje poměrně jednoduše matici, ze které počítáme determinant, zmenšit z 4×4 na 3×3. Determinant pak už můžeme spočítat Sarrusovým pravidlem. Můžeme také pokračovat v podobných úpravách jako před chvílí. K druhému řádku přičteme (-1) násobek prvního a ke třetímu (-2) násobek prvního. Ani jedna tato úprava hodnotu determinantu nezmění. Dostaneme

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -1(-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Z toho tvaru se asi vyplatí dodělat eliminaci: odečteme druhý řádek od třetího:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -1(-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Determinant odstupňované matice jsme spočítali jako součin prvků na diagonále. (Nezapomeneme na znaménko minus před determinantem.) Mohli jsme také místo dokončení eliminace použít rozvoj podle prvního sloupečku:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

1.4 Využití determinantu

1.4.1 Determinant a lineární(ne)závislost

Viděli jsme, jakým způsobem můžeme vyčíslit determinant pomocí eliminace. Při eliminaci je přitom v různých souvislostech důležité, zda vyjde nulový řádek nebo nevyjde. Máme-li matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ a při eliminaci nevyjde nulový řádek, víme, že $h(\mathbf{A}) = n$. To znamená, že řádky matice $\mathbf{A}$ jsou coby aritmetické vektory lineárně nezávislé. Nemáme-li v matici v odstupňovaném tvaru nulový řádek, znamená to, že všechna čísla na hlavní diagonále jsou nenulová. Nenulový je tak i jejich součin, který je roven determinantu. Matice $\mathbf{A}$ má tedy nenulový determinant. Nevzniknutí nulového řádku je důležité při výpočtu inverzní matice. Taková matice má inverzní matici a nazývá se regulární. Obráceně, vznikne-li při eliminaci v matici $\mathbf{B}$ typu $n \times n$ nulový řádek, znamená to, že $h(\mathbf{B}) < n$ a řádky matice jsou coby aritmetické vektory lineárně závislé. Protože v odstupňovaném tvaru takové matice je na diagonále určitě nula, je determinant takové matice roven nule. Matice také nemá inverzní matici a je tzv. singulární. Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ tedy nastávají dvě možnosti a uvedené vlastnosti jsou ekvivalentní:

- $h(\mathbf{A}) = n, \det \mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{A}$ je regulární,
- $h(\mathbf{A}) < n, \det \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}$ je singulární.

Determinant můžeme použít k rozhodnutí, zda je matice regulární nebo singulární. Pomocí determinantu můžeme také zjišťoval lineární závislost a nezávislost skupiny n vektorů z prostoru $\mathbb{R}^n$. Máme-li rozhodnout o lineární závislosti a nezávislosti vektorů (na $\mathbb{R}^3$) $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3), \boldsymbol{b} = (2, 0, 2), \boldsymbol{c} = (1, -2, -1)$, můžeme postupovat také tak, že spočítáme determinant matice, jejíž řádky tvoří zkoumané vektory. Bude-li determinant 0, je daná skupina lineárně závislá. A bude-li determinant nenulový, jsou vektory lineárně nezávislé. Protože

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

jsou naše vektory lineárně závislé (opravdu, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$).

1.4.2 Determinant a inverzní matice

Souvislost mezi determinantem a inverzní maticí jsme částečně popsali už v předchozí kapitole: regulární matice mají nenulový determinant, singulární matice mají determinant 0. V této kapitole si ukážeme, že pomocí determinantu lze dokonce inverzní matici spočítat. Zatím pro nalezení inverzní matice používáme algoritmus Gaussovy-Jordanovy eliminace.

V části o rozvoji determinantu jsme zavedli značení, které teď budeme také potřebovat: pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ značíme $\mathbf{A}_{i,j}$ matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z původní matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Jako tzv. algebraický doplněk k pozici (i,j) pak označujeme číslo $D_{i,j} = (-1)^{(i+j)} \det \mathbf{A}_{i,j}$. Každé pozici v matici můžeme přiřadit tento algebraický doplněk. Už jsme spočítali, že k matici

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

je

$$D_{1,2} = (-1)^{(1+2)} \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -4$$

a

$$D_{3,3} = (-1)^{(3+3)} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = 2.$$

Dáme si tu práci a dopočítáme zbývající doplňky:

$$D_{1,1} = (-1)^{(1+1)} \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 7,$$

$$D_{1,3} = (-1)^{(1+3)} \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -3,$$

$$D_{2,1} = (-1)^{(2+1)} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -2,$$

$$D_{2,2} = (-1)^{(2+2)} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$D_{2,3} = (-1)^{(2+3)} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$D_{3,1} = (-1)^{(3+1)} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = -7,$$

$$D_{3,2} = (-1)^{(3+2)} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 4.$$

Všechny tyto doplňky uspořádáme do matice, označme jí třeba $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} \\ D_{3,1} & D_{3,2} & D_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dá se ukázat, že platí

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{C}} \mathbf{D}^T.$$

Připomeňme, že $\mathbf{D}^T$ je tzv. transponovaná matice k $\mathbf{D}$ a vznikne záměnou řádků a sloupců původní matice $\mathbf{D}$. Spočítáme ještě $\det \mathbf{C} = -1$ a můžeme psát

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{C}} \mathbf{D}^T = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} 7 & -2 & -7 \\ -4 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vynásobením $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C}^{-1}$ snadno provedeme zkoušku. Naznačme tímto násobením v obecných maticích, proč to takto funguje.

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{C}\cdot\frac{1}{\det\mathbf{C}}\,\mathbf{D}^T=\frac{1}{\det\mathbf{C}}\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3}\\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3}\\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{2,1} & D_{3,1}\\ D_{1,2} & D_{2,2} & D_{3,2}\\ D_{1,3} & D_{2,3} & D_{3,3}\end{bmatrix}.$$

Výsledkem by měla být jednotková matice. Spočítáme, co bude ve výsledku na pozici $(1,1)$. Matice násobíme klasicky "řádek krát sloupec". Na pozici $(1,1)$ ve výsledku bude tedy

$$\frac{1}{\det\mathbf{C}}(c_{1,1}D_{1,1}+c_{1,2}D_{1,2}+c_{1,3}D_{1,3}).$$

Výraz v závorce je rozvoj determinantu matice $\mathbf{C}$ podle prvního řádku, je proto roven $\det\mathbf{C}$ a dostáváme

$$\frac{1}{\det\mathbf{C}}(c_{1,1}D_{1,1}+c_{1,2}D_{1,2}+c_{1,3}D_{1,3})=\frac{\det\mathbf{C}}{\det\mathbf{C}}=1,$$

což odpovídá jednotkové matici. Úplně stejně by se ověřily pozice $(2,2)$ a $(3,3)$. Na ostatních pozicích vyjde tzv. falešný rozvoj, o kterém jsme již zmiňovali, že je roven nule. Opravdu tedy vychází jednotková matice.

Daný výsledek se dá zformulovat obecně: pro regulární matici $\mathbf{A}$ typu $n\times n$ spočítáme inverzní matici jako

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\,\mathbf{D}^T,$$

kde $\mathbf{D}$ je matice algebraických doplňků k matici $\mathbf{A}$. Víme, že regulární matice mají nenulový determinant, takže determinant ve jmenovateli je v pořádku. Poznamenejme ale, že tento vzorec má spíše teoretický význam jako explicitní vyjádření inverzní matice. Z výpočetního hlediska je pro matice větší než 2×2 méně pracné počítat inverzní matice eliminací. Radši budu počítat jednu (Gaussovu-Jordanovu) eliminaci matice 4×4 než $4\cdot 4=16$ doplňků neboli determinantů matic 3×3.

1.4.3 Cramerovo pravidlo

Podívejme se nyní na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Pokud se jedná o soustavu se čtvercovou regulární maticí, lze sloupec neznámých $\boldsymbol{x}$ přímo vyjádřit jako $\boldsymbol{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}$. Za inverzní matici přitom můžeme dosadit dle předchozí sekce $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\,\mathbf{D}^T$ a dostaneme

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\,\mathbf{D}^T\cdot\boldsymbol{b}.$$

Pokračujme dále jenom pro soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé s regulární maticí $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}.$$

Protože

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\,\mathbf{D}^T=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2}\\ D_{2,1} & D_{2,2}\end{bmatrix}^T=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{2,1}\\ D_{1,2} & D_{2,2}\end{bmatrix},$$

pro řešení soustavy dostaneme

$$\boldsymbol{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{2,1}\\ D_{1,2} & D_{2,2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} D_{1,1}b_1+D_{2,1}b_2\\ D_{1,2}b_1+D_{2,2}b_2\end{bmatrix}.$$

Neznámá x z prvního řádku je

$$x=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\,(D_{1,1}b_1+D_{2,1}b_2).$$

Výraz v závorce napravo vypadá jako rozvoj determinantu podle prvního sloupečku. Místo původních prvků matice jsou tam ale čísla z pravé strany soustavy b_1 a b_2. Jedná se tak o rozvoj podle prvního řádku determinantu matice $\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{bmatrix}$, která vznikla z původní matice $\mathbf{A}$ výměnou jejího prvního sloupce za sloupec neznámých $\boldsymbol{b}$. Na doplňky k uvedeným pozicím tato výměna nemá vliv. Neznámá x je tedy vyjádřena jako

$$x = \frac{\det \mathbf{A}_x}{\det \mathbf{A}}.$$

Zcela analogicky dostaneme

$$y = \frac{\det \mathbf{A}_y}{\det \mathbf{A}},$$

kde matice $\mathbf{A}_y$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ výměnou jejího druhého sloupce za sloupec neznámých $\boldsymbol{b}$: $\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{bmatrix}$. Zde záleží na pořadí neznámých – pořadí coby souřadnice ve vektoru neznámých $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Pro výpočet první neznámé x nahrazujeme v matici první sloupec a dostaneme matici $\mathbf{A}_x$ a pro výpočet druhé neznámé y nahrazujeme v matici druhý sloupec a dostaneme matici $\mathbf{A}_y$. Toto vyjádření neznámých jako podílu dvou determinantů se nazývá Cramerovo pravidlo. Podmínkou je regulárnost matice $\mathbf{A}$, která zajistí nenulovost determinantu ve jmenovateli. Pro soustavy se singulární maticí Cramerovo pravidlo užít nelze.

Cramerovo pravidlo se dá formulovat pro libovolně velkou soustavu: Je-li $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ soustava lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí soustavy $\mathbf{A}$, platí pro i-tou složku vektoru neznámých $\boldsymbol{x}$:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}},$$

kde matice $\mathbf{A}_i$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ výměnou jejího i-tého sloupce za sloupec pravých stran $\boldsymbol{b}$.

Pomocí Cramerova pravidla vyřešíme soustavu zadanou

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determinant matice soustavy je nenulový ($\det \mathbf{A} = -2$), takže matice soustavy je regulární. K výpočtu první neznámé x budeme v čitateli potřebovat determinant matice, ve které první sloupec nahradíme sloupcem $\boldsymbol{b}$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{10}{-2} = -5.$$

Nahradíme-li v matici **A** druhý sloupec, můžeme spočítat druhou neznámou y:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-2} = 5.$$

A konečně pro neznámou z dostaneme náhradou třetího sloupce:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-2} = 4.$$

I když i Cramerovo pravidlo má svoje uplatnění, podobně jako u výpočtu inverzní matice paltí také zde, že pro běžné výpočty je výhodnější používat eliminaci. Všimněme si, že pro vyřešení předchozí soustavy jsme museli spočítat 4 determinanty z matic 3×3. To je jednak pracné a jednak při ručním výpočtu dost náchylné na početní chyby.

1.5 Příklady

1. Spočítejte determinanty

   (a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

   (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

   (d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

2. Vyřešte rovnice a nerovnice:

   (a) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$

   (b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

   (c) $\begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 2 & 1 & x \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$

3. Pomocí determinantů nalezněte inverzní matice k maticím:

   (a)
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

   (b)
   $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Pomocí Cramerova pravidla vyřešte

   (a)
   $$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x - 2y &= -8 \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Řešení:

Doporučuji vyzkoušet WolframAlpha a

```
determinant {{3,1,9},{1,0,3},{3,6,9}}
```

1. (a) 32
   (b) 0
   (c) -15
   (d) -12
2. (a) Nejprve spočteme determinant. Determinant s parametrem (který je neznámou v zadané rovnici) vypočítáme naprosto standardním způsobem. Máme násobit prvky na hlavní diagonále: $x \cdot x = x^2$ a celý determinant je dle křížového pravidla $x^2 - 4$. Řešíme tedy rovnici $x^2 - 4 = 0$. Výsledek je $x = \pm 2$.
   (b) $x_1 = 1, x_2 = 2$
   (c) $x \in (-1, 0)$
3. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
   (b) $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -3 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
4. (a) $x = -1, y = 3$
   (b) $x = 2, y = -\frac{1}{3}, z = -\frac{2}{3}$