Vnitřní statické účinky

doc. Ing. David Cirkl, Ph.D.
katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

david.cirkl@tul.cz

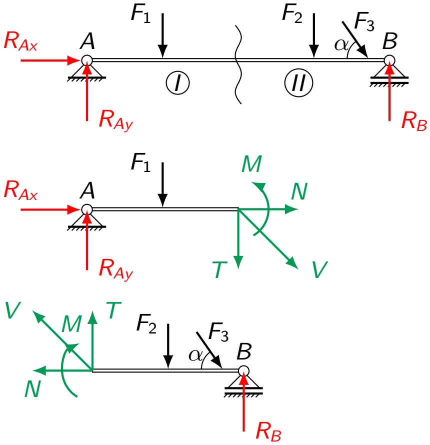
TKMOST

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vnitřní statické účinky tělesa

Uvažujme jako těleso nosník na dvou podporách. Nosníkem nazýváme těleso výrazně podlouhlého tvaru, nejčastělji stálého průřezu.



Metodou myšleného řezu rozdělíme nosník v libovolném místě na dvě části I a II.

V místě řezu působí obě části na sebe stejně velkými opačně orientovanými silami. Tyto síly nazýváme vnitřními silami.

Vnitřní silové účinky

Je výhodné rozdělit výslednou sílu $\vec{V}$ působící v průřezu na složku tečnou $\vec{T}$ a normálovou $\vec{N}$.

Posouvající síla T:
: Leží v rovině myšleného řezu, reprezentuje smykové zatížení.

Normálová síla N:
: Je kolmá k rovině myšleného řezu, představuje tahové nebo tlakové zatížení.

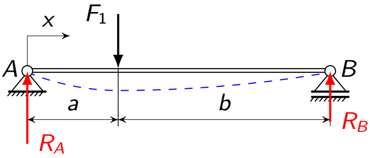
Ohybový moment M:
: Odpovídá ohybovému zatížení

Dodržujeme konvenci o kladných smyslech vnitřních statických účinků.

Uvolňovací metoda

Příklad:

Metoda myšleného řezu je vhodná pro nosníky zatížené spíše osamělými silami a momenty nebo jednoduchým spojitým zatížením.



Vnitřní ohybový moment považujeme za kladný, jestliže spodní vlákno nosníku je namáháno na tah.
(Kladný moment ohýbá nosník do úsměvu.)

Výpočet reakcí

$$(1) \qquad y : R_A + R_B - F = 0$$

$$(2) \qquad \overset{\curvearrowleft}{M} : Fb - R_A(a+b) = 0$$

$$R_A = F\frac{b}{a+b}$$

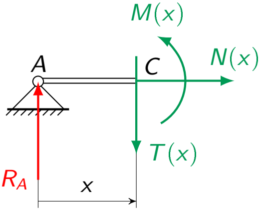
$$R_B = F\frac{a}{a+b}$$

Uvolňovací metoda

Výpočet vnitřních statických účinků rozdělíme do dvou intervalů

I. Interval $x \in < 0, a >$

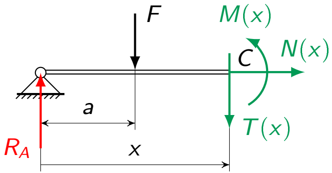
$$
\begin{aligned}
&(3) \qquad && x : N(x) = 0 \\
&(4) \qquad && y : R_A - T(x) = 0 \\
& && \Rightarrow T(x) = R_A \\
&(5) \qquad && \overset{\curvearrowleft}{M_C} : M(x) - R_A x = 0 \\
& && \Rightarrow M(x) = R_A x
\end{aligned}
$$



Uvolňovací metoda

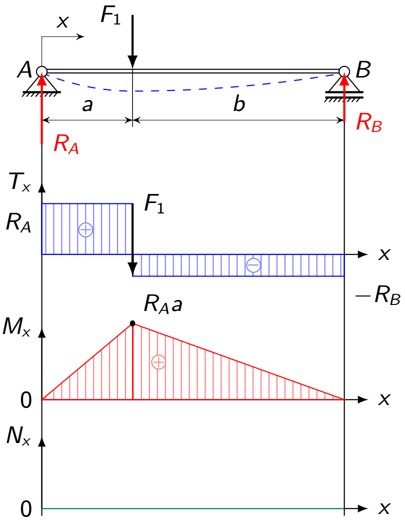
II. Interval $x \in < a, a+b >$

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad & x : N(x) = 0 \\
(7) \qquad & y : R_A - F - T(x) = 0 \\
& \Rightarrow T(x) = R_A - F = -R_B \\
(8) \qquad & \overset{\curvearrowleft}{M_C} : M(x) + F(x-a) - R_A x = 0
\end{aligned}
$$



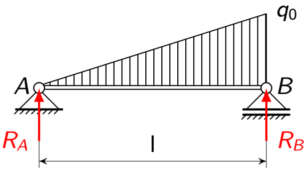
$$
\begin{aligned}
M(x) &= R_A x - F(x-a) = \\
&= (R_A - F)x + Fa = Fa - R_B x
\end{aligned}
$$

Grafické znázornění vnitřních statických účinků



Další příklad na metodu myšleného řezu

D: q_0, l
U: N, T, M



Zatěž. síla ekvivalentní spojitému zatížení:

$$Q = \int_0^l q(x)\mathrm{d}x = \frac{q_0}{l} x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{q_0}{2l}[x^2]_0^l = \frac{q_0 l^2}{2l} = \frac{1}{2} q_0 l$$

Rovnice rovnováhy nosníku

$$(1) \quad y: \quad R_A + R_B - \frac{1}{2} q_0 l = 0,$$

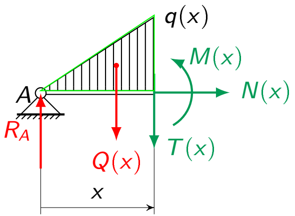
$$(2) \quad \overset{\curvearrowleft}{M_B}: \quad - R_A l + \frac{1}{2} q_0 l \frac{1}{3} l = 0,$$

slouží pro stanovení reakcí

$$R_A = \frac{1}{6} q_0 l \quad R_B = \frac{1}{3} q_0 l.$$

Metoda myšleného řezu

Určení vnitřních statických účinků



Nosník rozdělíme myšleným řezem v místě x a zavedeme vnitřní síly.

$$(3) \quad x: \quad N(x) = 0$$

$$(4) \quad y: \quad R_A - T(x) - \frac{q_0}{l}\int_0^x x \mathrm{d}x = 0$$

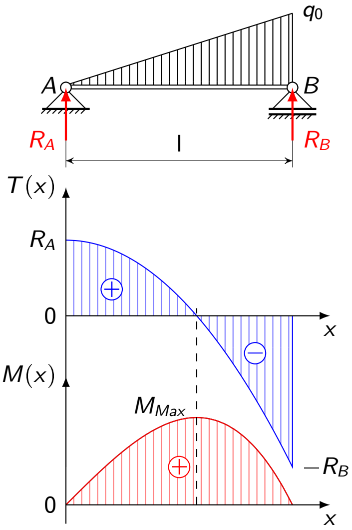
$$(5) \quad \overset{\curvearrowleft}{M_C}: \quad -R_A x + M(x) + \int_0^x x q(x) \mathrm{d}x = 0$$

$$T(x) = \frac{1}{6} q_0 l - \frac{q_0}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^x =$$

$$= \frac{1}{6} q_0 l - \frac{q_0}{2l} x^2$$

$$M(x) = -R_A x + \frac{q_0}{l} \int_0^x x^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{6} q_0 l x - \frac{q_0}{6l} x^3$$



Polohu maximálního ohybového momentu určíme jako polohu maxima funkce $M(x)$.

$$M(x) = -R_A x + \frac{q_0}{l}\int_0^x x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{6}q_0 l x - \frac{q_0}{6l}x^3$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = 0 = \frac{1}{6}q_0 l - \frac{q_0}{2l}x^2$$

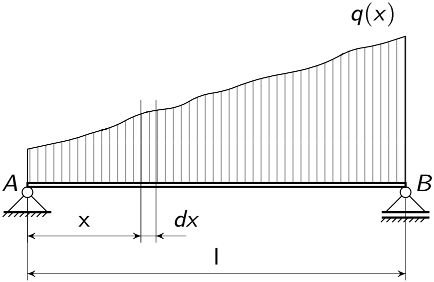
$$\frac{1}{6}q_0 l = \frac{q_0}{2l}x^2$$

$$\frac{2}{6}l^2 = \frac{q_0}{2l}x^2$$

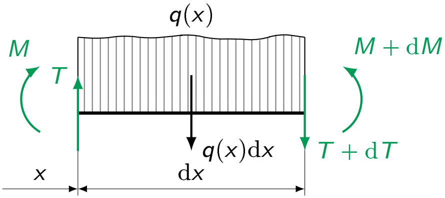
$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} \doteq \frac{l}{1.72} \doteq 0.58l$$

Schwedlerovy věty

Vhodné pro spojitě zatížené nosníky.
Mějme obecně spojitě zatížený nosník.
Pro určení statické rovnováhy budeme uvažovat část vymezenou řezy ve vzdálenosti x a $x + dx$.



Schwedlerovy věty



Napíšeme rovnice rovnováhy pro vytknutý element:

$$T - q\mathrm{d}x - T - \mathrm{d}T = 0$$

$$q = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

Momentová rovnováha ke středu elementu:

$$T\frac{\mathrm{d}x}{2} + M + T\frac{\mathrm{d}x}{2} + \underbrace{\mathrm{d}T\frac{\mathrm{d}x}{2}}_{\text{zanedbáme, jde o součin dvou nekonečně malých veličin}} - M - \mathrm{d}M = 0$$

$$T\mathrm{d}x = \mathrm{d}M \Rightarrow T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}$$

Schwedlerovy věty tedy jsou

$$(1) \qquad q(x) = -\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$(2) \qquad T(x) = -\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}$$

Dosazením (2) do (1) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2} = -q(x)$$

Okrajové podmínky pro T a M

levý konec nosníku | pravý konec nosníku

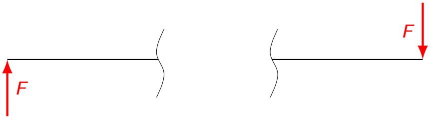
a)

$T(0) = 0$
$M(0) = 0$
$x = 0$

$T(l) = 0$
$M(l) = 0$
$x = l$

b)

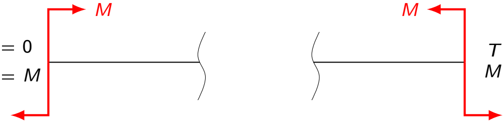
$T(0) = F$
$M(0) = 0$



$T(l) = F$
$M(l) = 0$

c)

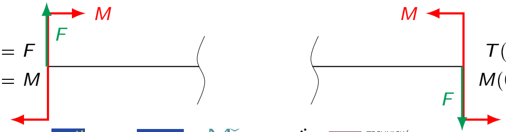
$T(0) = 0$
$M(0) = M$



$T(l) = 0$
$M(l) = 0$

d)

$T(0) = F$
$M(0) = M$



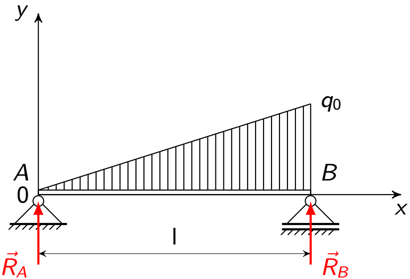
$T(l) = F$
$M(0) = M$

Aplikace Schwedlerových vět

Dáno: $Q, l, q(x)$
Určit: $T(x), M(x)$

Z předchozího příkladu víme, že:

$$R_A = \frac{1}{6} q_0 l$$
$$R_B = \frac{1}{3} q_0 l$$



1.Schwedlerova věta zní:

$$q(x) = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

Po separaci proměnných napíšeme:

$$\int_{R_A}^{T(x)} \mathrm{d}T = -\int_0^x q(x)\mathrm{d}x$$

a zintegrujeme

$$-R_A + T(x) = \frac{q_0}{l}\int_0^x x\mathrm{d}x = \frac{q_0}{2l}\left[x^2\right]_0^x = \frac{q_0}{2l}x^2$$

$$T(x) = \frac{q_0}{2l}x^2 + \frac{1}{6}q_0 l$$

Užijeme 2. Schwedlerovu větu

$$T(x) = -\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{6}q_0 l - \frac{q_0}{2l}x^2$$

$$\int_0^{M(x)} \mathrm{d}M = \int_0^x \left(\frac{1}{6}q_0 l - \frac{q_0}{2l}x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$M(x) = \frac{1}{6}q_0 lx - \frac{q_0}{6l}x^3$$