Příklad: kolejnice na vozíkách

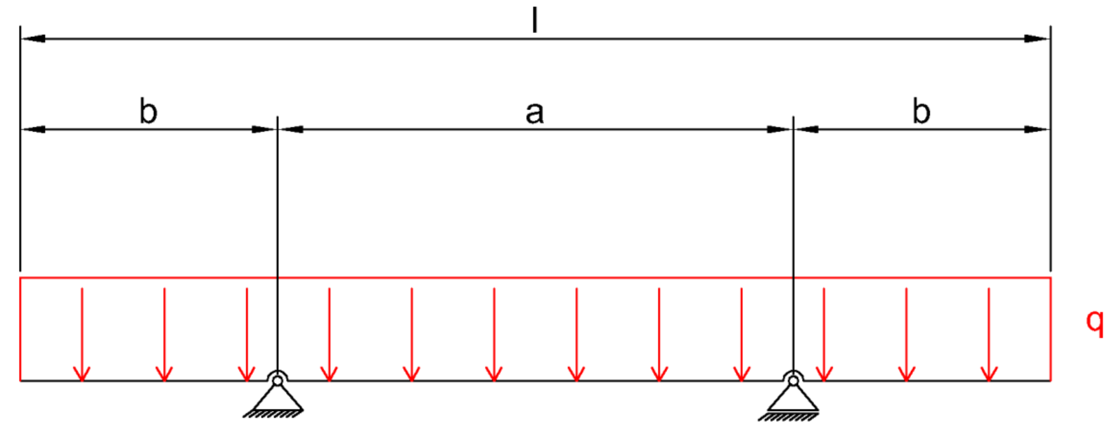
a) Kolejnice jsou v polovině „vagonu“ prohnuty dolů

b) Kolejnice jsou v polovině „vagonu“ prohnuty nahoru

Proč?

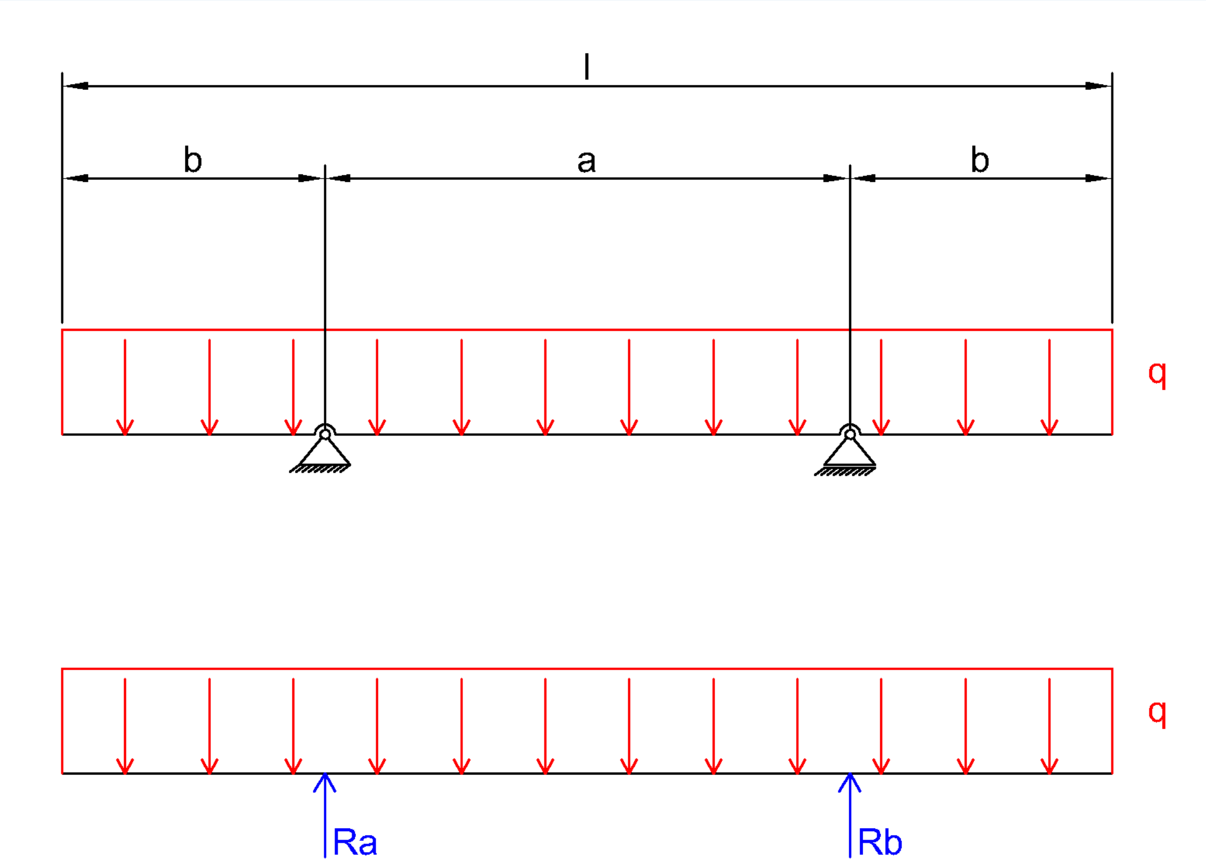
Odpověď lze nalézt analýzou VSÚ

Úlohu uvažujeme jako nosník na dvou podporách se dvěma převislými konci, po celé délce zatížený konstantním spojitým zatížením. Oba převislé konce předpokládáme stejně dlouhé.



$D: q, l, a, b = \frac{l-a}{2}$

U: VSÚ, podmínky pro prohnutí v polovině vagonu, optimální momentové zatížení



Určení reakcí:

$x: \quad R_{Ax} = 0$

$y: \quad R_A + R_B = q \cdot l$

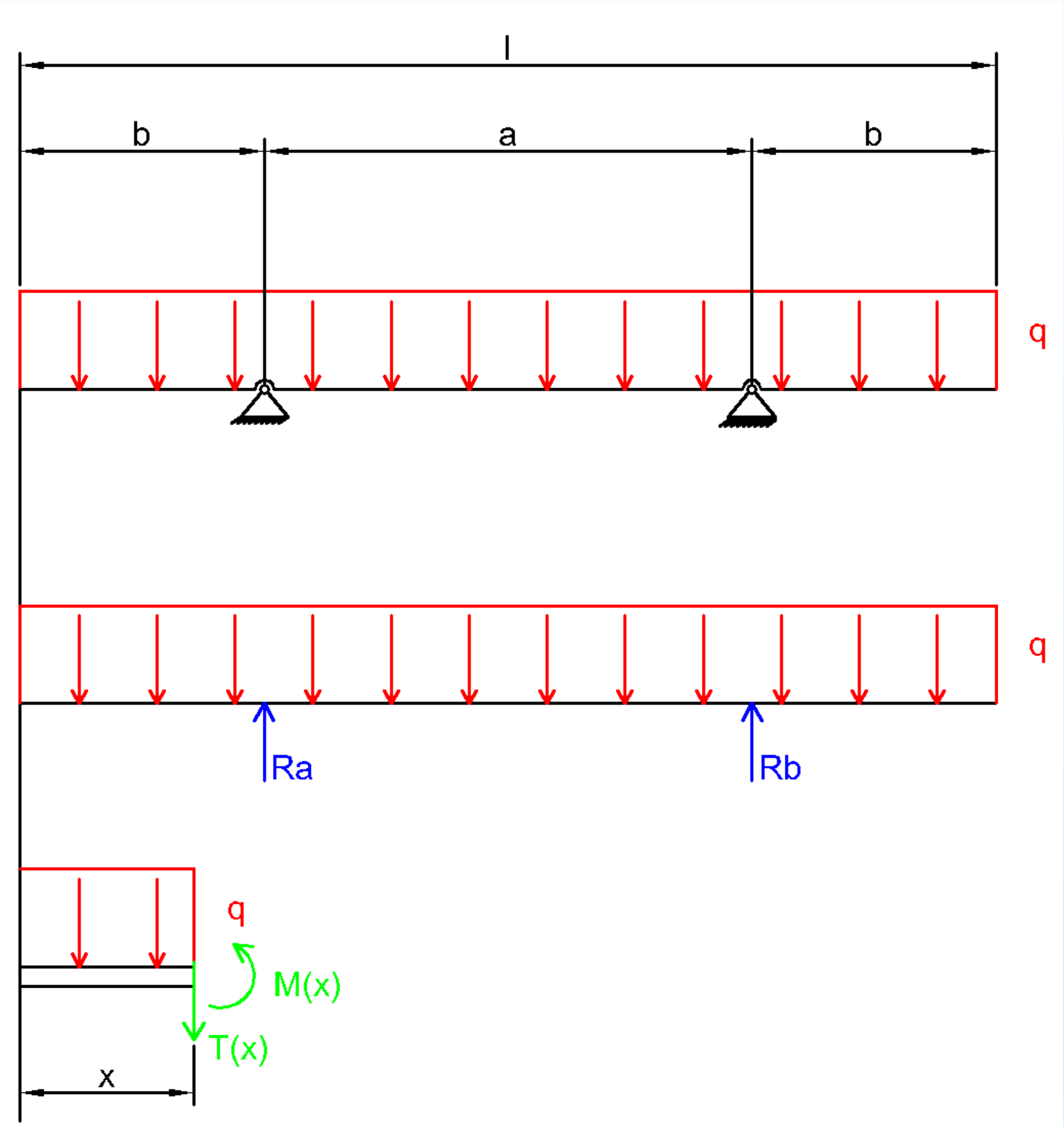
$$A: \frac{q(a+b)^2}{2} - \frac{q \cdot b^2}{2} - R_B \cdot a = 0$$

$$q \cdot a^2 + 2 \cdot q \cdot a \cdot b + q \cdot b^2 - q \cdot b^2 = 2 \cdot R_B \cdot a$$

$$q \cdot a + 2 \cdot q \cdot b = 2 \cdot R_B$$

$$R_B = q\frac{a+2b}{2} = q\frac{l}{2}$$

$$R_A = q \cdot l - q\frac{l}{2} = q\frac{l}{2}$$



Průběhy VSÚ:

$x \in \langle 0; b\rangle$

$T(x) = -q \cdot x$ - Lineární funkce klesající

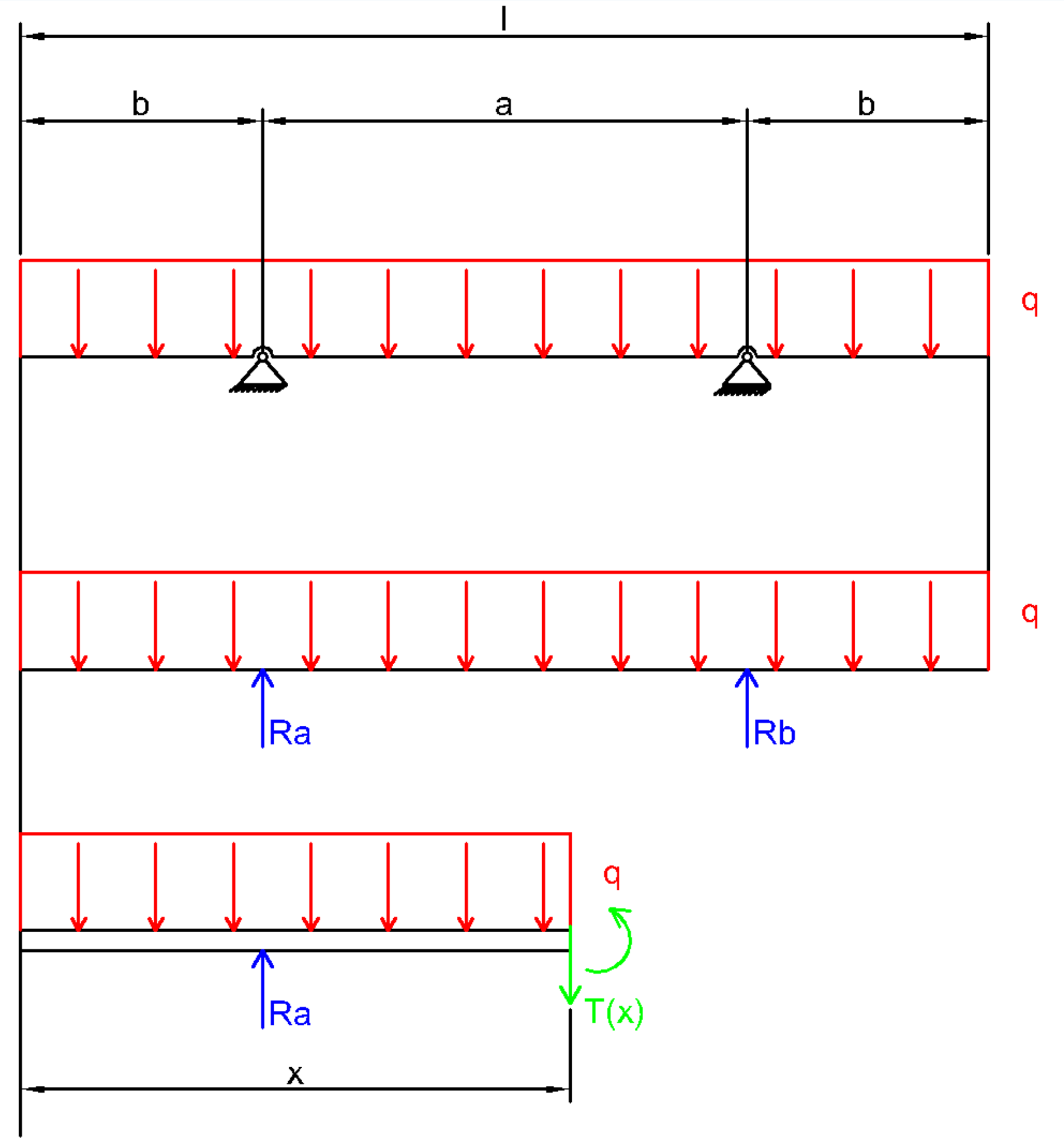
$M(x) = -q \cdot \frac{x}{2}$ - kvadratická funkce klesající

Hodnoty na okrajích intervalu:

$T(0) = 0; T(0) = -q \cdot b = \frac{q}{2}(l-a)$ - kladná hodnota $l > a$

$M(0) = 0,$

$M(b) = -q\frac{b^2}{2} = -\frac{q}{8}(l-a)^2$ - záporná hodnota $l > a$



Průběhy VSÚ:

$x \in \langle b; a+b \rangle$

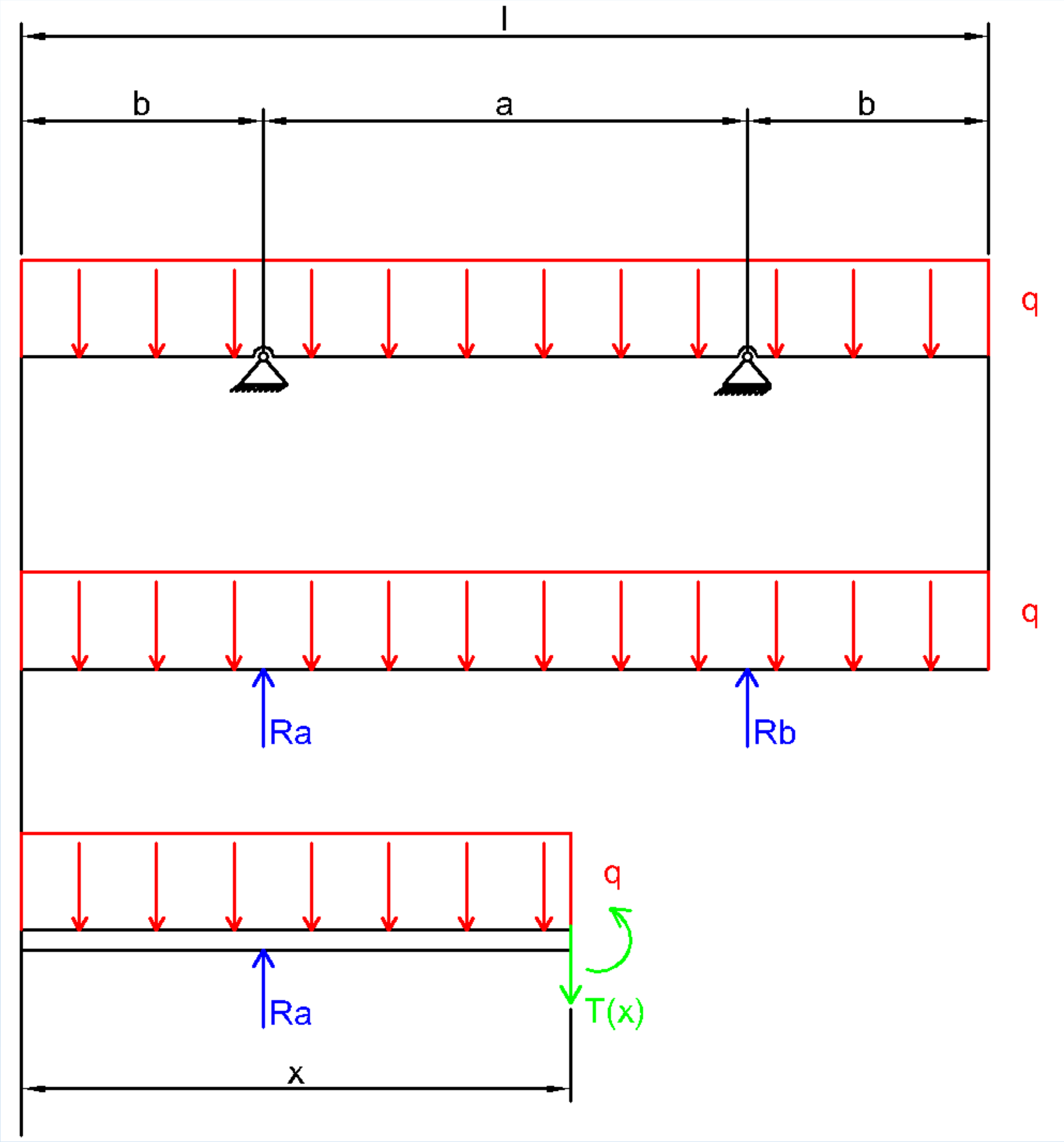
$T(x) = R_A - q \cdot x = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$ - lineární funkce klesající

$M(x) = \frac{q \cdot l}{2}(x-b) - \frac{q}{2}x^2 = \frac{q}{2}(l \cdot x - l \cdot b - x^2)$

Kvadratická funkce, v $x = \frac{l}{2}$ je lokální maximum,

neboť $T\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \ \cap T'\left(\frac{l}{2}\right) < 0$

$T'(x) < 0$ v celém intervalu, funkce je konkávní. Pro $x < \frac{l}{2}$ je funkce rostoucí pro $x > \frac{l}{2}$ je funkce klesající.



Hodnoty na okrajích intervalu $x \in \langle b; a+b \rangle$:

$T(b) = q\left(\frac{l}{2} - b\right) = q\left(\frac{l}{2} - \frac{l-a}{2}\right) = q\,\frac{a}{2}$; kladná

$T(a+b) = q\left(\frac{l}{2} - a - b\right) = q\left(\frac{l}{2} - a - \frac{l-a}{2}\right) = -q\,\frac{a}{2}$ záporná

$M(b) = \frac{q}{2}(l \cdot b - l \cdot b - b^2) = -\frac{q}{2}b^2 = -\frac{q}{8}(l-a)^2$ záporná

$$M(a+b) = \frac{q}{2}[l(a+b) - l \cdot b - (a+b)^2] =$$

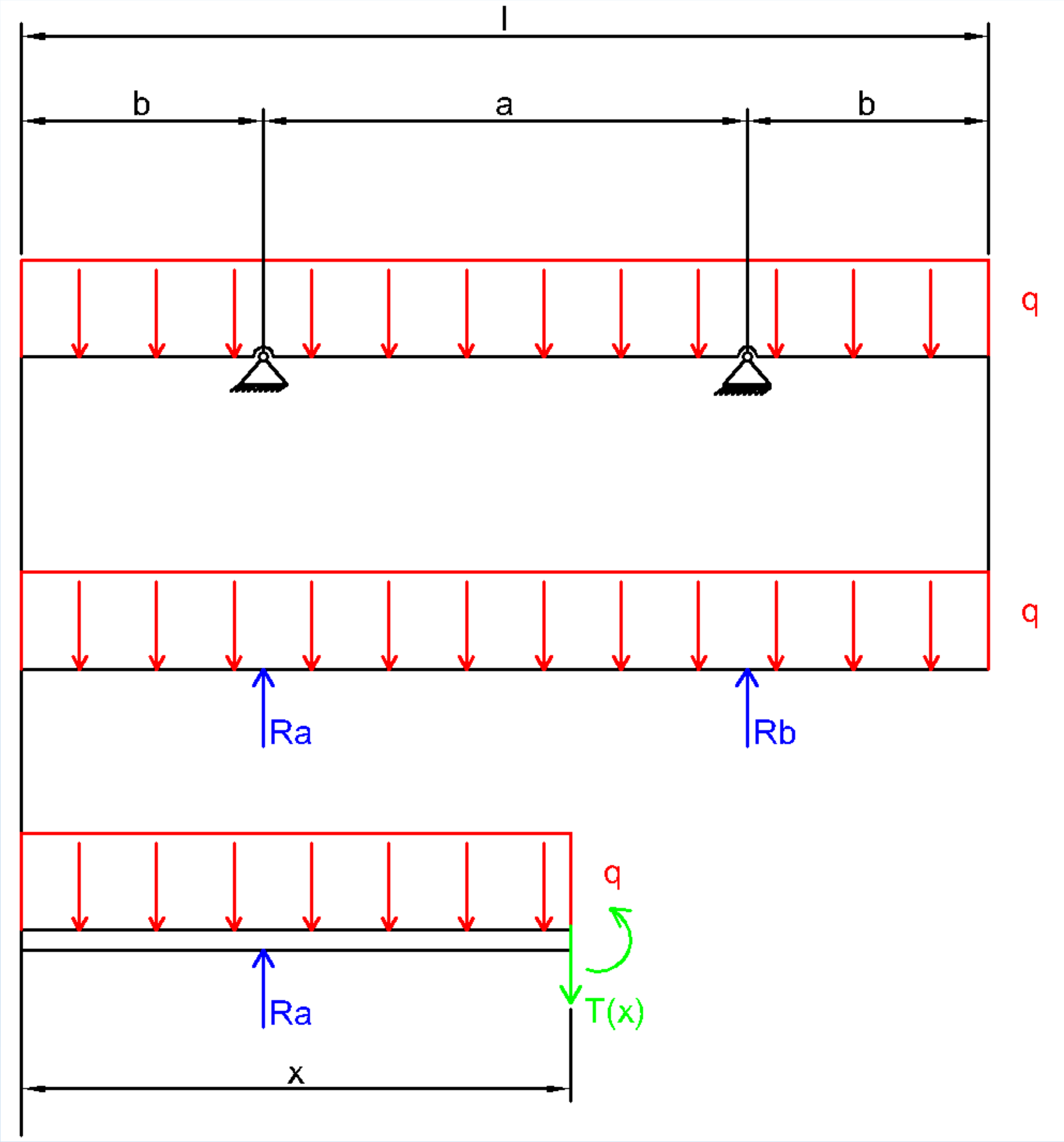
$$= \frac{q}{2}(l \cdot a + l \cdot b - l \cdot b - a^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2) =$$

$$= \frac{q}{2}\left(l \cdot a - a^2 - 2 \cdot a\frac{l-a}{2} - \frac{(l-a)^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{q}{2}\left(l \cdot a - a^2 - a \cdot l + a^2 - \frac{l^2}{4} - \frac{l \cdot a}{2} - \frac{a^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{q}{2}\left(\frac{l \cdot a}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{q}{8}(-l^2 + 2 \cdot l \cdot a - a^2) =$$

$= -\frac{q}{8}(l-a)^2$ záporná



Hodnota momentu uprostřed nosníku

$$M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{q}{2}\left(l\cdot\frac{l}{2}-l\cdot b-\frac{l^2}{4}\right)=\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4}-l\cdot b\right)=\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4}-l\cdot\frac{l-a}{2}\right)=$$

$$=\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4}-l\cdot\frac{l-a}{2}\right)=\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4}-\frac{l^2}{2}+\frac{la}{2}\right)=\frac{q}{2}\left(\frac{la}{2}-\frac{l^2}{4}\right)=\frac{q}{8}(2la-l^2)$$

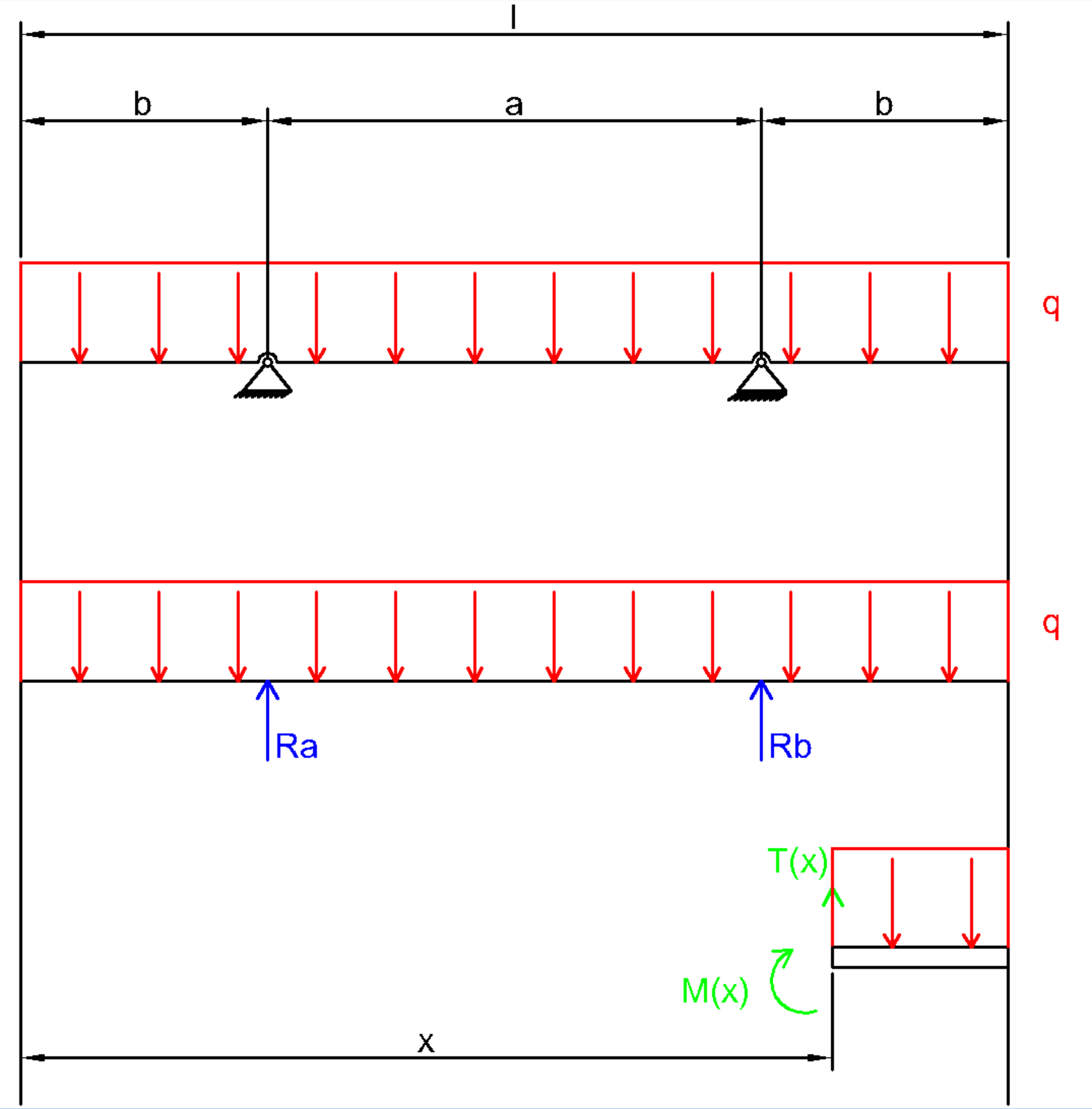
$$M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{q}{8}(2la-l^2)$$

Z rovnice je patrné, že vnitřní ohybový moment může v polovině nosníku nabývat kladných i záporných hodnot a také hodnoty nulové, tj. podmínka pro tvar prohnutí v polovině vagonu

$$M\left(\frac{l}{2}\right)>0\Leftrightarrow 2al>l^2\Rightarrow a>\frac{l}{2}$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right)<0\Leftrightarrow 2al<l^2\Rightarrow a<\frac{l}{2}$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2al=l^2\Rightarrow a=\frac{l}{2}$$



Průběhy VSÚ:

$x \in \langle a+b; l \rangle$

$T(x) = q(l-x)$ - lineární funkce klesající, kladná v intervalu

$M(x) = -\frac{q}{2}(l-x)^2$ - kvadratická funkce rostoucí

Hodnoty na okrajích intervalu:

$T(a+b) = q(l-a-b) = q\left(l-a-\frac{l-a}{2}\right) = \frac{q}{2}(l-a)$ kladná hodnota

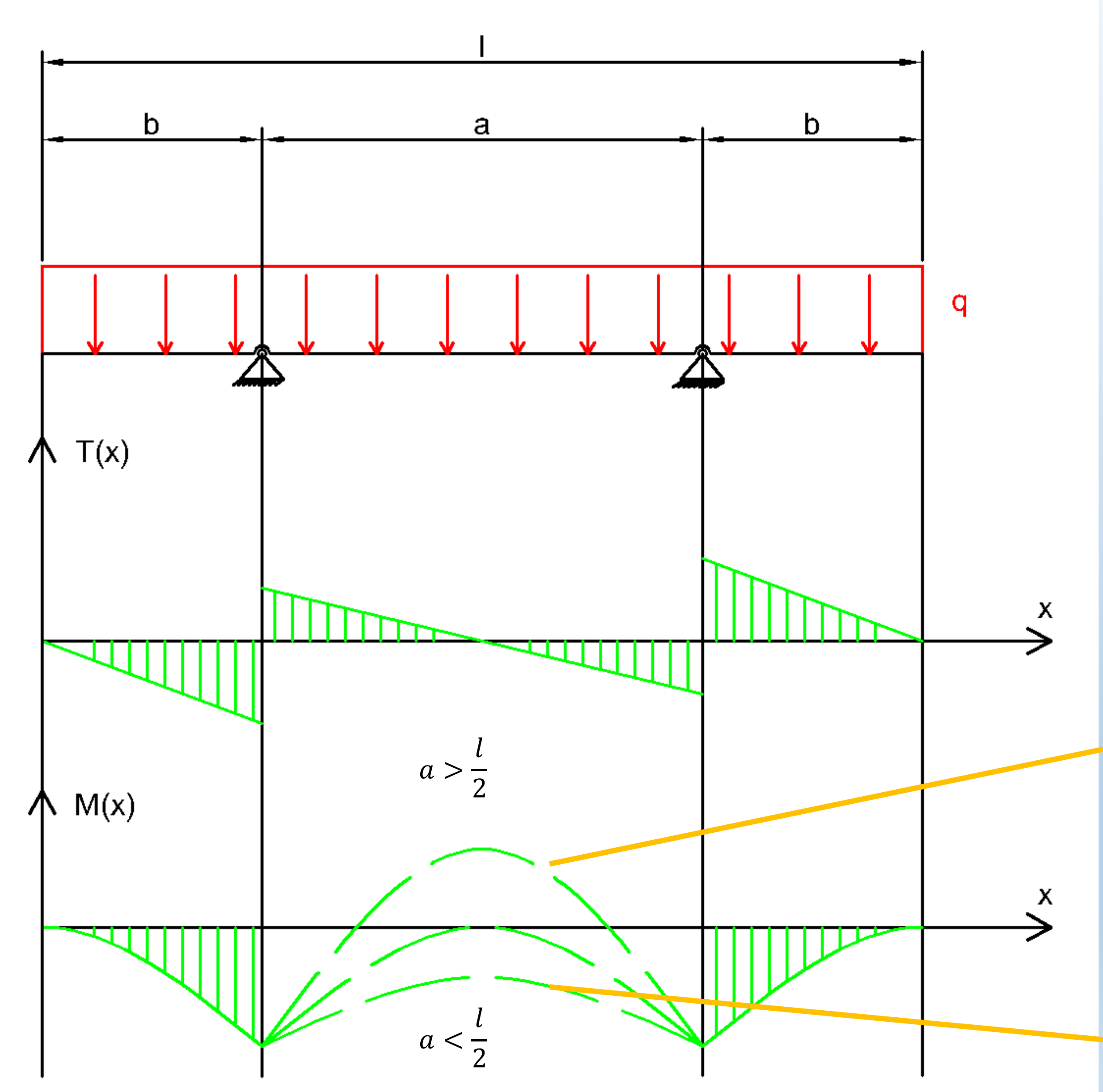
$T(l) = 0$

$$M(a+b) = -\frac{q}{2}(l-a-b)^2 = -\frac{q}{2}\left(l-a-\frac{l-a}{2}\right)^2 =$$

$= -\frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{q}{8}(l-a)^2$ záporná hodnota

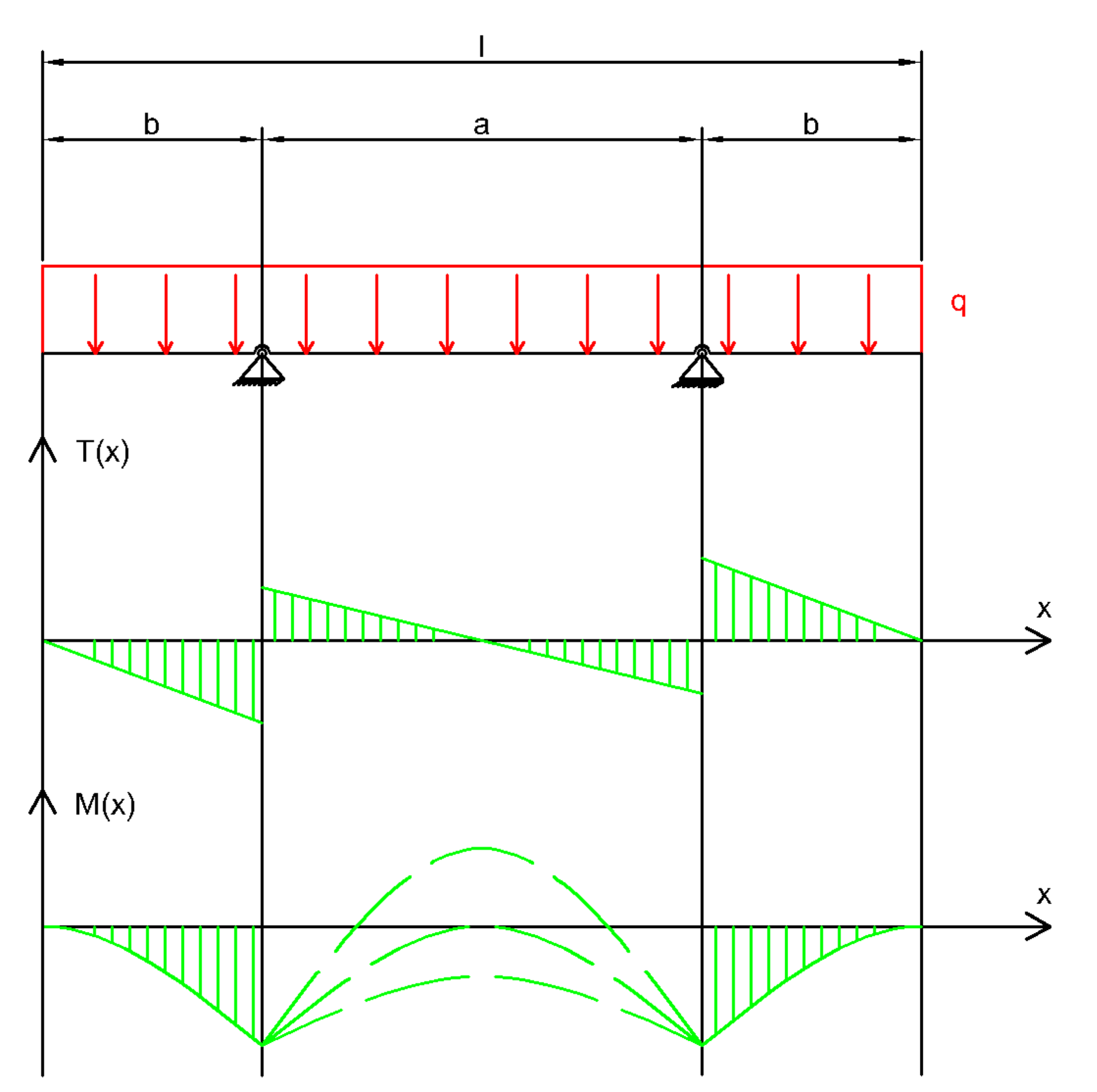
$M(0) = 0$

Výsledné grafy průběhů:



Prohnutí nosníku souvisí s orientací vnitřního ohybového momentu. Kladný moment ohýbá nosník do „úsměvu“, záporný do „úšklebku“. Jak je uvedeno, pokud $a = \frac{l}{2}$, je moment uprostřed nosníku nulový. Pro $a > \frac{l}{2}$ je moment kladný a pro $a < \frac{l}{2}$ záporný. Toto je důvod, proč mohou být kolejnice uprostřed prohnuty dolu, nebo nahoru.

Optimální momentové zatížení

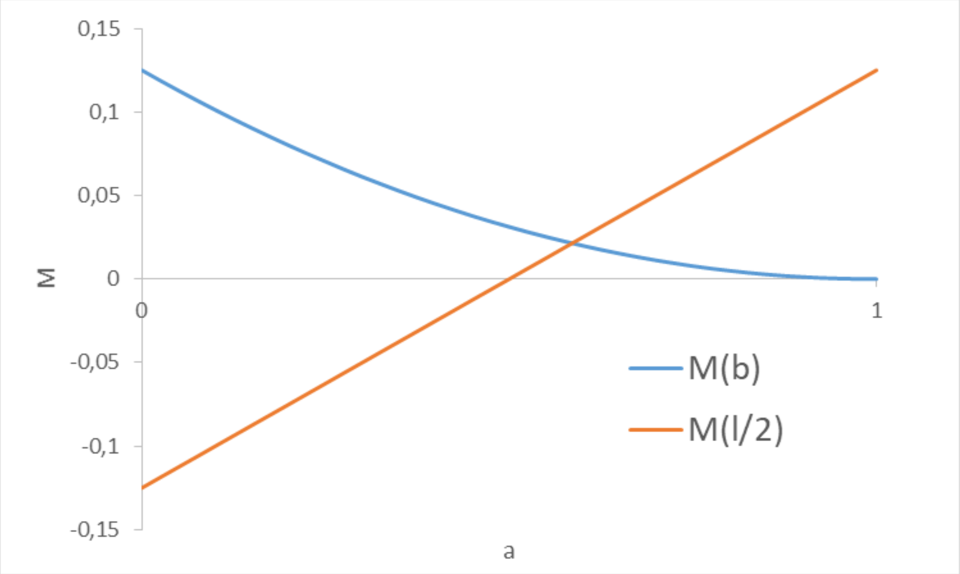


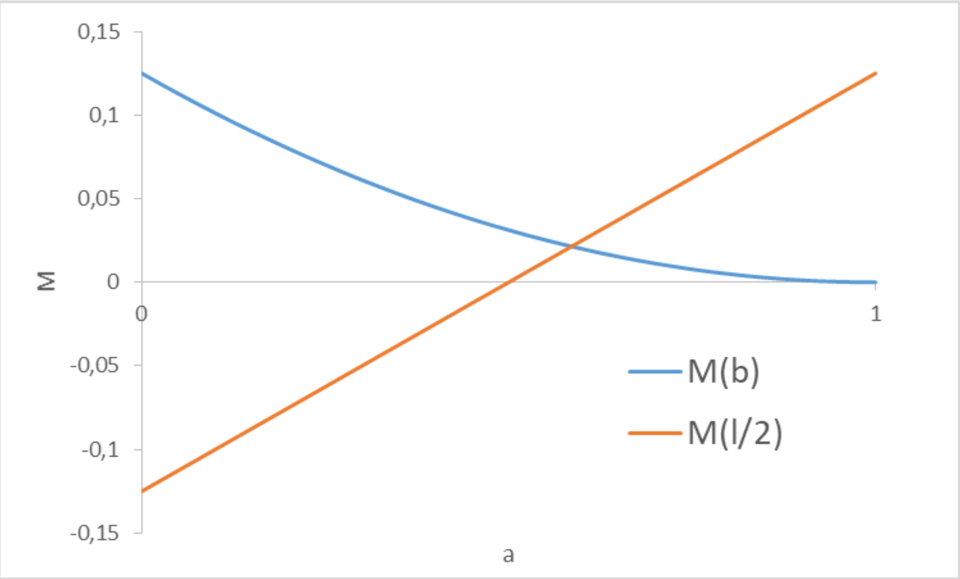
$$M\left(\frac{l}{2}\right)= \frac{q}{8}(2la - l^2)$$

$$M(b) = -\frac{q}{8}(l-a)^2$$

$$M(a+b) = -\frac{q}{8}(l-a)^2$$

Jak je patrné, velikost momentu v místě $x = b$ s rostoucí hodnotou vzdálenosti podpor ***a*** kvadraticky klesá a v místě $x = \frac{l}{2}$ moment s rostoucí hodnotou vzdálenosti podpor ***a*** lineárně roste.





Lze nalézt optimální vzdálenost, kdy velikosti momentů v obou místech budou stejné, což odpovídá průsečíku obou funkcí.

Řešení je následující:

$$|M(b)| = M\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$\frac{q}{8}(l-a)^2 = \frac{q}{8}(2la - l^2)$$

$$l^2 - 2la + a^2 = 2la - l^2$$

$$a^2 - 4la + 2l^2 = 0$$

$$\mathrm{D} = 16l^2 - 8l^2 = 8l^2;\ \sqrt{D} = 2\sqrt{2}l$$

$a = \frac{4l \pm 2\sqrt{2}l}{2} = 2l \pm \sqrt{2}l = \left(2 \pm \sqrt{2}\right)l$ Vzdálenost ***a*** nemůže být větší než ***l***, proto volíme mínus.

$a = \left(2 - \sqrt{2}\right)l \doteq 0{,}586l$ - Toto je optimální vzdálenost podpor, kdy dochází k nejmenšímu namáhání v nosníku. V praxi lze také aplikovat například při zavěšení žebříku na dva háky, nebo při položení tyčových polotovarů na dvou konzolách.