Středisko soustavy vázaných rovnoběžných sil; Těžiště

David Cirkl

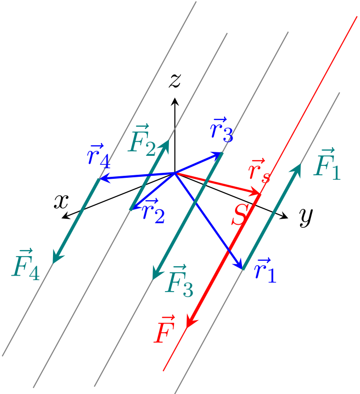
TKMOST

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Středisko soustavy rovnoběžných sil

Představíme-li si soustavu rovnoběžných sil $\vec{F}_i$ v prostoru, které jsou vázány k působištím A_i, můžeme nalézt působiště výslednice této soustavy sil a nazveme ho *střediskem soustavy rovnoběžných sil*.



Středisko soustavy rovnoběžných sil

Bodu A_i odpovídá polohový vektor $\vec{r}_i$, středisku soustavy S vektor $\vec{r}_s$, pak pro soustavu rovnoběžných sil platí následující rovnice

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

$$\vec{r}_s \times \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i \right).$$

Za předpokladu shodného směru sil F_i můžeme vyjádřit

$$\vec{r}_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\vec{r}_i F_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}$$

Středisko soustavy rovnoběžných sil

Poloha bodu S (střediska soustavy rovnoběžných sil) nezávisí na směru vektorů $\vec{F}_i$. Poslední rovnici vyjádříme ve skalárních směrech x, y a z

$$x_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i F_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}, \quad y_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i F_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}, \quad z_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(z_i F_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i},$$

kde výrazy v čitatelích, tj. součiny vzdálenosti nositelky síly od rovin yz, xy a xy a velikosti síly F_i, nazýváme statické momenty sil.

Těžiště

Termínem *těžiště* (též hmotné středisko) lze označit bod, do kterého můžeme soustředit celou hmotnost m (resp. tíhu) tělesa.

Budeme-li určovat těžiště tělesa, hledáme středisko soustavy tíhových sil, které jsou rovnoběžné.

Těžiště

Za předpokladu, že za sílu $\vec{F}$, resp. $\vec{F}_i$ dosadíme tíhovou sílu $\vec{G}$, resp. $\vec{G}_i$ a aplikujeme vztah $\vec{G} = m\vec{g}$, kde $\vec{g}$ je gravitační zrychlení, pak pro soustavu n hmotných bodů lze rovnice přepsat do tvaru

$$x_s m = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i, \quad \text{nebo} \quad x_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{m},$$

$$y_s m = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i, \qquad y_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i m_i}{m},$$

$$z_s m = \sum_{i=1}^{n} z_i m_i, \qquad z_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i m_i}{m},$$

kde $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ je celková hmotnost soustavy n hmotných bodů, m_i je hmotnost i-tého hmotného bodu a x_i, y_i, z_i jsou jeho vzdálenosti od rovin v souřadnicovém systému xyz.

Těžiště

Těleso si představujeme jako útvar složený z velkého množství velmi malých částic o nekonečně malé (infinitezimální) hmotnosti $\mathrm{d}m_i$. Statický moment i-tého elementu např. k rovině yz je definován vztahem

$$\mathrm{d}U_{yz_i} = x_i \mathrm{d}m_i,$$

kde index i značí i-tý element. Celkový statický moment tělesa je dán algebraickým součtem statických momentů n částic (elementů) ke stejné rovině

$$U_{yz} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i$$

a v integrální formě

$$U_{yz} = \int_{(m)} x \mathrm{d}m.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Těžiště

Na základě uvedeného můžeme sumační vztahy pro určení souřadnice těžiště útvaru vyjádřit rovněž v integrálním tvaru

$$x_s = \frac{\int\limits_{(m)} x \mathrm{d}m}{m}, \quad y_s = \frac{\int\limits_{(m)} y \mathrm{d}m}{m}, \quad z_s = \frac{\int\limits_{(m)} z \mathrm{d}m}{m},$$

kde celkovou hmotnost útvaru lze získat jako

$$m = \int\limits_{(m)} \mathrm{d}m.$$

Pro homogenní těleso za předpokladu, že hustota $\rho \left[\mathrm{kg}/m^3\right]$ je konstantní, $m = \rho V$ a celkový objem útvaru je $V = \int_{(V)} \mathrm{d}V$, jsou vztahy pro určení těžiště následující

$$x_s = \frac{\int\limits_{(V)} x\rho \mathrm{d}V}{\rho V} = \frac{\int\limits_{(V)} x \mathrm{d}V}{V}, \quad y_s = \frac{\int\limits_{(V)} y\rho \mathrm{d}V}{\rho V} = \frac{\int\limits_{(V)} y \mathrm{d}V}{V}, \quad z_s = \frac{\int\limits_{(V)} z\rho \mathrm{d}V}{\rho V} = \frac{\int\limits_{(V)} z \mathrm{d}V}{V}.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Těžiště

Pro určení těžiště plošného rovinného útvaru se používají vztahy

$$x_s = \frac{\int\limits_{(S)} x \mathrm{d}S}{S}, \quad y_s = \frac{\int\limits_{(S)} y \mathrm{d}S}{S},$$

kde celková plocha S je dána vztahem $S = \int\limits_{(S)} \mathrm{d}S$.

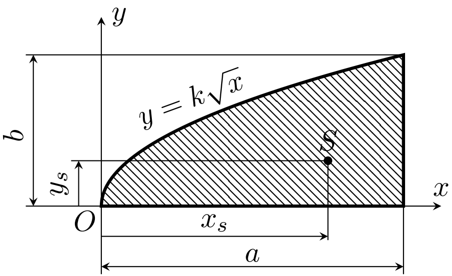
Obdobné vztahy platí i pro určení těžiště křivky či lomené čáry rovinné nebo prostorové

$$x_s = \frac{\int\limits_{(L)} x \mathrm{d}L}{L}, \quad y_s = \frac{\int\limits_{(L)} y \mathrm{d}L}{L}, \quad z_s = \frac{\int\limits_{(L)} z \mathrm{d}L}{L}.$$

Pro dvou resp. jednorozměrný případ stačí určit dvě resp. jednu souřadnici těžiště. Pokud má těleso nebo útvar rovinu symetrie, pak těžiště leží v této rovině a stačí určit výpočtem zbývající souřadnice.

Příklad - těžiště plošného útvaru

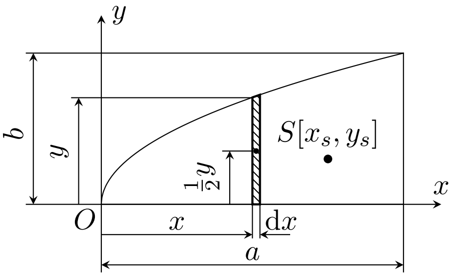
Určíme souřadnice těžiště $[x_s, y_s]$
Dáno: a, b, $y = k\sqrt{x}$



Nejprve stanovíme konstantu k. Platí

$$b = k\sqrt{a},\ \text{tedy}\ k = \frac{b}{\sqrt{a}}.$$

Příklad - těžiště plošného útvaru



Zvolíme elementární plochu

$$\mathrm{d}S = y\mathrm{d}x = k\sqrt{x}\mathrm{d}x.$$

Celková plocha tedy je

$$S = \int\limits_{(S)} \mathrm{d}S = k\int\limits_0^a \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}k\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{2}{3}k\sqrt{a^3} = \frac{2}{3}\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{a^3} = \frac{2}{3}ba.$$

Příklad - těžiště plošného útvaru

x-ová souřadnice těžiště

$$x_s S = \int\limits_{(S)} x \mathrm{d}S$$

Statický moment plochy k ose y

$$\begin{aligned} U_y &= \int\limits_{(S)} x \mathrm{d}S = \frac{b}{\sqrt{a}} \int\limits_0^a x\sqrt{x} \mathrm{d}x = \frac{b}{\sqrt{a}} \int\limits_0^a x^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{b}{\sqrt{a}} \frac{2}{5} \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^a = \frac{b}{\sqrt{a}} \frac{2}{5} \sqrt{a^5} \\ &= \frac{2}{5} b a^2 \end{aligned}$$

a tedy

$$x_s = \frac{U_y}{S} = \frac{\frac{2}{5} b a^2}{\frac{2}{3} b a} = \frac{3}{5} a.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad - těžiště plošného útvaru

y-ová souřadnice těžiště

$$y_s S = \int\limits_{(S)} \frac{1}{2} S \mathrm{d}S.$$

$$\begin{aligned}
U_x &= \int\limits_{(S)} \frac{1}{2} S \mathrm{d}S = \frac{1}{2} \int\limits_0^a y^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} k^2 \int\limits_0^a x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} k^2 \frac{1}{2} \left[x^2\right]_0^a = \frac{1}{4} k^2 a^2 = \frac{1}{4} \frac{b^2}{a} a^2 \\
&= \frac{1}{4} a b^2.
\end{aligned}$$

$$y_s = \frac{U_x}{S} = \frac{\frac{1}{4} a b^2}{\frac{2}{3} a b} = \frac{3}{8} b.$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad - těžiště plošného útvaru

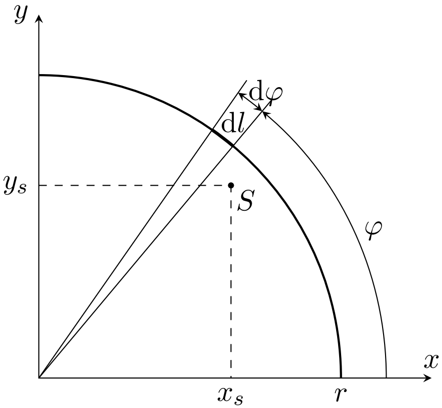
Poloha těžiště je

$$S = \left[\frac{3}{5}a; \frac{3}{8}b\right]$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad - těžiště křivky

Křivkou je čtvrtina kružnice o poloměru r.



Pro element délky $\mathrm{d}l$ platí $\mathrm{d}l = r\mathrm{d}\varphi$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad - těžiště křivky

Délka křivky je

$$l = \int_{(l)} \mathrm{d}l = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = r\left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r}{2}.$$

Určení x-ové souřadnice těžiště.
Rovnice statických momentů

$$x_s l = \int_{(l)} x \,\mathrm{d}l$$

Statický moment křivky k ose y

$$U_y = \int_{(l)} x\,\mathrm{d}l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi = r^2\left[\sin(\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right) = r^2$$

Příklad - těžiště křivky

hledaná souřadnice je

$$x_s = \frac{U_y}{l} = \frac{r^2}{\frac{\pi r}{2}} = \frac{2r}{\pi}.$$

Určení y-ové souřadnice.

Jelikož je křivka symetrická podle přímky procházející počátkem souř. systému skloněné pod úhlem 45° platí

$$x_s = y_s.$$

Souřadnice těžiště křivky je

$$S = \left[\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right].$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ