Příklady k zápočtu z Matematiky II (KMD/MA2) KS (1. část)

Rozhodněte, zda lze vektor $\mathbf{x}$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, v kladném případě určete příslušné koeficienty:

1. $\mathbf{x} = (-1, 0, 2, 3),\ \mathbf{u} = (1, -1, 0, 2),\ \mathbf{v} = (1, 2, 0, 3),\ \mathbf{w} = (1, -4, 2, 1)$,

2. $\mathbf{x} = (4, 4, -6, -18),\ \mathbf{u} = (1, 1, 0, 1),\ \mathbf{v} = (0, -1, 2, 7),\ \mathbf{w} = (2, -1, 0, 1)$,

3. $\mathbf{x} = (8, 3, 2),\ \mathbf{u} = (4, 1, 1),\ \mathbf{v} = (1, 1, -1),\ \mathbf{w} = (2, 0, 3)$,

Zjistěte, zda jsou níže uvedené vektory lineárně nezávislé:

4. $(2, 3, -5),\ (1, -1, 1),\ (3, 2, -2)$ v $\mathbb{R}^3$,

5. $(2, 0, 3),\ (1, -1, 1),\ (0, -2, -1)$ v $\mathbb{R}^3$,

6. $(1, -1, 1, 2),\ (1, 8, 7, -7),\ (1, 2, 3, -1),\ (1, 5, 5, -4)$ v $\mathbb{R}^4$,

Spočtěte dimenzi vektorového prostoru V, jestliže:

7. $V = \langle (1, 1, 2, 0),\ (2, 1, -1, 1),\ (1, 2, 1, -1),\ (1, 3, 0, -2) \rangle$,

8. $V = \langle (1, 2, 1, -1),\ (1, 1, -1, 2),\ (1, 0, -3, 5),\ (2, 3, 0, 1) \rangle$,

9. $V = \langle (1, 1, -1, 1),\ (2, 1, 1, -1),\ (1, 0, 2, -2),\ (3, 2, 1, -1) \rangle$,

Určete souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$:

10. $\mathbf{x} = (1, 1, 1),\ \mathbf{u} = (1, 0, -1),\ \mathbf{v} = (2, 1, -2),\ \mathbf{w} = (1, 2, 0)$,

11. $\mathbf{x} = (1, 3, 6),\ \mathbf{u} = (1, 1, 2),\ \mathbf{v} = (2, 1, -1),\ \mathbf{w} = (1, 2, 1)$,

12. $\mathbf{x} = (4, 4, -6, -18),\ \mathbf{u} = (1, 1, 0, 1),\ \mathbf{v} = (0, -1, 2, 7),\ \mathbf{w} = (2, -1, 0, 1)$,

13. Nechť jsou zadány matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete matici

a) $\mathbb{A} + \mathbb{B} =$ b) $3\mathbb{B} =$ c) $\mathbb{A}\mathbb{B} =$ d) $\mathbb{B}\mathbb{A} =$ $\left[\text{c) } \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 6 \\ -8 & -8 \end{pmatrix} \text{ d) není definováno}\right]$

14. Nechť jsou zadány matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete matici

a) $\mathbb{A} + \mathbb{B} =$ b) $3\mathbb{B} =$ c) $\mathbb{A}\mathbb{B} =$ d) $\mathbb{B}\mathbb{A} =$ $\left[\text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ d) } \begin{pmatrix} 21 & 21 & 21 \\ -9 & -9 & -9 \\ -12 & -12 & -12 \end{pmatrix}\right]$

15. Nechť jsou zadány matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete matici

a) $\mathbb{A}+\mathbb{B} =$ b) $3\mathbb{B} =$ c) $\mathbb{A}\mathbb{B} =$ d) $\mathbb{B}\mathbb{A} =$ $\left[\text{c)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 6 & -2 & 21 \\ 12 & -14 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 16 & -16 \\ 21 & -2 \end{pmatrix}\right]$

16. Nechť jsou zadány matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete matici

a) $\mathbb{A}+\mathbb{B} =$ b) $3\mathbb{B} =$ c) $\mathbb{A}\mathbb{B} =$ d) $\mathbb{B}\mathbb{A} =$ $\left[\text{c)} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 8 & 10 & 0 \\ 12 & -15 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}\right]$

17. Spočtěte hodnost matice $\mathbb{A}$, jestliže:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) = 3] b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) = 4]

18. Rozhodněte o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic a v kladném případě určete množinu všech řešení této soustavy:

a) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$ $\left[2-2u,\ -\frac{1}{2},\ u,\ 2t-1,\ t\right]$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 8x_6 &= 0 \end{aligned}$$ $[-t+v-3u,\ t,\ -2v,\ u,\ v,\ 0]$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 6x_4 &= 7 \end{aligned}$$ [soustava nemá řešení]

d) $$\begin{aligned} -4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 &= -11 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5 &= 4 \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 &= -3 \\ -6x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 - 12x_5 &= -7 \end{aligned}$$ $[4-u+v,\ v,\ -4-u,\ 1+2u,\ u]$

19. Spočtěte nálsledující determinanty, jestliže:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ [6] b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ [1]

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ [2] d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ [0]

20. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A}$.

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\lambda_1 = 1,\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 21 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 2,\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = 3,\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ $\left[\lambda_{1,2} = 1,\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = 2,\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}\right]$

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\left[\lambda_{1,2} = -1,\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = 3,\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda_4 = 7,\ \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 24 \\ 40 \end{pmatrix}\right]$