Matematika 2

Petr Salač
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz

2020

Aritmetické vektory

Definice
Uspořádanou n-tici čísel $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazýváme řádkový aritmetický vektor

a uspořádanou n-tici čísel $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sloupcový aritmetický vektor.

Definice (v terminologii maticového počtu)
Matici typu $(1, n)$ nazveme řádkovým vektorem a matici typu $(n, 1)$ sloupcovým vektorem.

Operace s aritmetickými vektory

Sčítání aritmetických vektorů

Součet řádkových aritmetických vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je řádkový aritmetický vektor

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)\,.$$

Součet sloucových aritmetických vektorů $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$

je sloupcový aritmetický vektor

$$\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ \vdots \\ c_n + d_n \end{pmatrix}.$$

Operace s aritmetickými vektory

Násobení aritmetického vektoru konstantou
Násobek řádkového aritmetického vektoru $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a konstanty k je řádkový aritmetický vektor

$$k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)\,.$$

Násobek sloupcového aritmetického vektoru $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ a konstanty k

je sloupcový aritmetický vektor

$$k\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} kc_1 \\ kc_2 \\ \vdots \\ kc_n \end{pmatrix}\,.$$

Poznámka
Aritmetické operace s vektory jsou definovány analagicky jako operace u matic.

Operace s aritmetickými vektory

Skalární součin vektorů

Skalární součin řádkových aritmetických vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je číslo

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n \,.$$

Skalární součin sloucových aritmetických vektorů $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ je číslo

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d} = c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2 + \cdots + c_n \cdot d_n \,.$$

Poznámka

Skalární součin je v maticové terminologii maticový součin řádkového a sloupcového vektoru.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice
Říkáme, že vektor $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_r$$

lze-li jej vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{a}_r\ ,$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_r$ jsou vhodná čísla.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

Zjistěte zda je vektor $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -23 \\ 22 \\ -59 \\ 15 \end{pmatrix}$ lineární kombinací vektorů

$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Řešení

Hledáme tedy konstanty $\alpha_1,\ \alpha_2$ a α_3 takové, aby

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 22 \\ -59 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Pokud má soustava řešení, potom je vektor $\boldsymbol{b}$ lineární kombenací $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$.
$(\alpha_1 = -3,\ \alpha_2 = 6,\ \alpha_3 = -1)$.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice

Říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1, \ \boldsymbol{a}_2, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé, lze-li alespoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. V opačném případě říkáme, že jsou vektory $\boldsymbol{a}_1, \ \boldsymbol{a}_2, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_p$ lineárně nezávislé.

Poznámka

Jsou-li vektory $\boldsymbol{a}_1, \ \boldsymbol{a}_2, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_p$ lineárně závislé, potom některý z nich můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních, tedy

$$\boldsymbol{a}_i = k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + k_p\boldsymbol{a}_p \ .$$

Převedeme-li vektor $\boldsymbol{a}_i$ na pravou stranu rovnosti dostaneme

$$0 = k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} - \boldsymbol{a}_i + k_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + k_p\boldsymbol{a}_p \ .$$

To vede k následující charakterizaci lineární závislosti

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Věta (charakterizace lineární závislosti)
Vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když lze najít taková čísla $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_p$ z nichž alespoň jedno je různé od nuly, že platí

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{a}_p = 0\ . \tag{1}$$

Poznámka
Tato charekterizace "odstraňuje" problém, že nevíme, který vektor se dá vypočítat z ostatních vektorů.

Poznámka
Soustavu (1) řešíme nejefektivněji pomocí Gaussovy eliminační metody (viz příští přednáška).

Vektorový prostor

Definice
Vektor $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ nazýváme nulový vektor.
Je-li $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nenulový vektor, potom vektor $-\boldsymbol{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ nazveme opačným vektorem k vektoru $\boldsymbol{a}$.

Definice
Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).
Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:
1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)
2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)
3) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (distributivní zákon)
4) $(k_1 + k_2)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$ (distributivní zákon)
5) $k_1(k_2\boldsymbol{u}) = (k_1 k_2)\boldsymbol{u}$
6) existuje prvek $\mathbf{0} \in V$ takový, že $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$
7) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

kde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ a $k, k_1, k_2 \in R$. Pak V nazýváme vektorovým prostorem nad R.
Prvky vektorového prostoru se nazývají vektory. Vektor $\mathbf{0} \in V$ se nazývá nulový vektor.

Vektorový prostor

Příklady

1) Množina všech n-rozměrných aritmetických vektorů je vektorovým prostorem.
2) Množina všech čtvercových matic řádu n je vektorovým prostorem.
3) Množina všech polynomů s reálnými koeficienty spolu s obvyklými operacemi sčítání a násobení reálným číslem je vektorový prostor.

Příklad

Vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýše čtyři

$$\boldsymbol{V} = \{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\,;\ \text{kde } a,\ b,\ c,\ d,\ e \in R\}\ .$$

Uvažujeme koeficienty polynomu čtvrtého stupně - místo s polynomem $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ můžeme pracovat s aritmetickým vektorem $(a, b, c, d, e)^T$.

Vektorový prostor

Definice
Řekneme, že množina vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_q$$

generuje vektorový prostor V , jestliže je možné vyjádřit libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in V$ ve tvaru lineární kombinace těchto vektorů, tj.

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{q} k_i \boldsymbol{a}_i$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_q$ jsou vhodná čísla.

Příklad
Prostor $V = R^4$
Vektory $(1,0,0,0),\ (0,1,0,0)$ negenerují R^4.
Vektory $(1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,1,1,0),\ (1,1,1,1)$ generují R^4.

Vektorový prostor

Definice
Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá a generuje V.

Příklad 1.
Prostor $V = R^4$
Množina vektorů $\{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),(0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$ je báze R^4.

Příklad 2.
Prostor $V = R^4$
Množina vektorů $\{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),(0,0,1,0),\ (1,1,1,0)\}$ neni báze R^4.
(neboť vektor $(0,0,0,1)$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),(0,0,1,0),\ (1,1,1,0)$.

Definice
Buď $V \neq \mathbf{0}$ vektorový prostor. Dimenzí vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze.
Značíme: dim$V$ = číslo.

Triviální vektorový prostor $V = \mathbf{0}$ má dimenzi 0.

Vektorový prostor

Předpokládáme, že množina vektor $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p\}$ je baze vektorového prostoru a vektor $\boldsymbol{u}$ lze zapsat ve tvaru lineární kombinace

$$\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{a}_p\ . \tag{2}$$

Koeficienty $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_p$ budeme nazývat souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k bazi $\mathcal{A}$.

Souřadnice budeme psát do sloupce a budeme používat značení ${}^{\mathcal{A}}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{pmatrix}.$

Poznámka (v terminologii maticového počtu)
V maticovém zápisu budeme používat značení ${}^{\mathcal{A}}\boldsymbol{u} = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_p)^T$.

Vektorový prostor

Množinu vektorů

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(vektor $\boldsymbol{e}_i$ má v i-tém řádku jedničku a v ostatních nuly) budeme nazývat kanonickou bazí a značit $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{e}_1, \; \boldsymbol{e}_2, \; \ldots, \; \boldsymbol{e}_n\}$.

Poznámka

Uvědomte si, že vektor $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ je jejich lineární kombinací

$$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \tag{3}$$

a že složky $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektoru $\boldsymbol{u}$ jsou zároveň jeho souřadnicemi vzhledem ke kanonické bazi.

Vektorový prostor

Příklad

Vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýše čtyři

$$\boldsymbol{V} = \{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\,;\ \text{kde}\ a,\, b,\, c,\, d,\, e \in R\}\ .$$

Bazi tvoří např. možina polynomů $\mathcal{B} = \{1,\, x,\, x^2,\, x^3,\, x^4\}$.
Určete souřadnice polynomu (vektor) $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ vzhledem k bazi $\mathcal{B}$.

Řešení:

$$^{\mathcal{B}}\boldsymbol{P}(x) = (-1,\, 2,\, -5,\, 3,\, 0)^T.$$

Vektorový prostor

Definice
Předpokládáme, že $\boldsymbol{V}$ je vektorový prostor a $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p \in \boldsymbol{V}$ je skupina vektorů.
Lineární obal skupiny vektorů $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ je množina všech lineárních kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$.
Značíme $\langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p \rangle$.
Lineární obal konečné množiny $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p\}$ ztotožňujeme s lineárním obalem skupiny vektorů $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$.
Lineární obal nekonečné množiny $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{V}$ je sjednocení lineárních obalů všech konečných podmnožin množiny $\boldsymbol{M}$.
Značíme $\langle \boldsymbol{K} \rangle$, resp. $\langle \boldsymbol{M} \rangle$.