Matematika II (KMA/MA2) - cvičení 2

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2023/2024 a vyšší)

Příklad 1. Rozhodněte, zda lze vektor $\mathbf{x}$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, v kladném případě určete příslušné koeficienty:

a) $\mathbf{x} = (-1, 0, 2, 3),\ \mathbf{u} = (1, -1, 0, 2),\ \mathbf{v} = (1, 2, 0, 3),\ \mathbf{w} = (1, -4, 2, 1)$ [nelze]

b) $\mathbf{x} = (8, 3, 2),\ \mathbf{u} = (4, 1, 1),\ \mathbf{v} = (1, 1, -1),\ \mathbf{w} = (2, 0, 3)$ [ano, $\mathbf{x} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$]

c) $\mathbf{x} = (1, -1),\ \mathbf{u} = (-14, 3),\ \mathbf{v} = (5, -1),\ \mathbf{w} = (1, 7)$ [ano, nekonečně mnoho LK]

Příklad 2. Zjistěte, zda jsou níže uvedené vektory lineárně nezávislé:

a) $(2, 3, -5),\ (1, -1, 1),\ (3, 2, -2)$ v $I\!R^3$ [ano]

b) $(2, 0, 3),\ (1, -1, 1),\ (0, -2, -1)$ v $I\!R^3$, [ne]

c) $(1, -1, 1, 2),\ (1, 8, 7, -7),\ (1, 2, 3, -1),\ (1, 5, 5, -4)$ v $I\!R^4$ []

d) $(2, 1, -1, 2, -1),\ (-4, 3, 2, -1, 1),\ (3, 5, -2, 1, -2),\ (2, 2, -1, 3, -1),\ (-1, 2, 3, 1, 3)$ v $I\!R^5$ []

Příklad 3. Určete pro která $a \in I\!R$ jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $(a, -4, -1),\ (4, -6, -3),\ (1, 1, -a)$ v $I\!R^3$ []

b) $(1, a, 1),\ (2, 2, a),\ (1, 1, 1)$ v $I\!R^3$ [$a \neq 1, a \neq 2$]

Příklad 4. Z vektorů níže vyberte nějakou bázi jejich lineárního obalu:

a) $(5, 7, -1, 3),\ (1, -3, 8, 2),\ (9, 17, -10, 4),\ (-2, 6, -16, -4) \in I\!R^4$,
[]

b) $(1, 0, 2, -3),\ (3, 2, 1, -5),\ (-1, 2, 1, -2),\ (-3, 0, 2, 0) \in I\!R^4$,
[$(1, 0, 2, -3),\ (3, 2, 1, -5),\ (-1, 2, 1, -2)$]

Příklad 5. Rozhodněte, zda vektor $\mathbf{x}$ patří do lineárního obalu množiny M (značeno $\langle M \rangle$):

a) $\mathbf{x} = (1, -1, 2, 1),\ M = \{(1, 0, 2, 2),\ (0, 1, 0, 2)\}$ [$\mathbf{x} \notin \langle M \rangle$]

b) $\mathbf{x} = (1, 4, -4, -1),\ M = \{(0, 1, -3, 4),\ (2, 2, 2, 2),\ (1, -1, 3, 7)\}$ [$\mathbf{x} \in \langle M \rangle$]

Příklad 6. Rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi prostoru $I\!R^3$:

a) $(1, 0, 1),\ (3, 1, 0),\ (5, 2, 1)$ [ano]

b) $(1, 2, 3),\ (2, 0, 1),\ (5, 2, 5)$ [ne]

c) $(1, 4, -1),\ (0, 2, 3)$ [ne]

Příklad 7. Spočtěte dimenzi vektorového prostoru V, jestliže:

a) $V = \langle (1, 1, 2, 0),\ (2, 1, -1, 1),\ (1, 2, 1, -1),\ (1, 3, 0, -2) \rangle$ [$\dim(V) = 3$]

b) $V = \langle (1, 2, 1, -1),\ (1, 1, -1, 2),\ (1, 0, -3, 5),\ (2, 3, 0, 1) \rangle$ [$\dim(V) = 2$]

c) $V = \langle (1, 1, -1, 1),\ (2, 1, 1, -1),\ (1, 0, 2, -2),\ (3, 2, 1, -1) \rangle$ [$\dim(V) = 3$]

Příklad 8. Pro která $p \in I\!R$ je vektor $\mathbf{u}$ prvkem lineárního obalu množiny M? Nalezněte nějakou bázi prostoru $\langle M \rangle$ a určete jeho dimenzi.

a) $\mathbf{u} = (7, -2, p),\ M = \{(2, 3, 5),\ (3, 7, 8),\ (1, -6, 1)\}$ [$p = 15$]

b) $\mathbf{u} = (p, 6, 0),\ M = \{(2, 3, 0),\ (1, 1, 1),\ (1, 1, 0)\}$ [$p \in I\!R$]

Příklad 9. Určete souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$:

a) $\mathbf{x} = (1, 1, 1),\ \mathbf{u} = (1, 0, -1),\ \mathbf{v} = (2, 1, -2),\ \mathbf{w} = (1, 2, 0)$ [$[5, -3, 2]$]

b) $\mathbf{x} = (1, 3, 6),\ \mathbf{u} = (1, 1, 2),\ \mathbf{v} = (2, 1, -1),\ \mathbf{w} = (1, 2, 1)$ [$[2, -1, 1]$]

c) $\mathbf{x} = (4, 4, -6, -18),\ \mathbf{u} = (1, 1, 0, 1),\ \mathbf{v} = (0, -1, 2, 7),\ \mathbf{w} = (2, -1, 0, 1)$ [$[2, -3, 1]$]