Matematika 2.

Soustavy lineárních rovnic

Petr Salač
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz

3. Přednáška

Soustavy lineárních rovnic

Řešte soustavu dvou lineárních algebraických rovnic.

$$
\begin{array}{rcll}
7x_1 + 3x_2 & = & 5 & \\
x_1 - x_2 & = & 2 & |(\cdot 3) \\
\hline
7x_1 + 3x_2 & = & 5 & \multirow{2}{*}{$\Big\}\ (+)$} \\
3x_1 - 3x_2 & = & 6 & \\
\hline
10x_1 & = & 11 & \\
x_1 & = & \frac{11}{10} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{11}{10} - x_2 & = & 2 \\
-x_2 & = & 2 - \frac{11}{10} \\
x_2 & = & -\frac{9}{10}
\end{array}
$$

Elementární úpravy soustavy lineárních algebraických rovnic
(provedením těchto úprav se nemění řešení soustavy)

1. Záměna pořadí rovnic.
2. Vynásobení rovnice nenulovým číslem.
3. Přičtení nenulového násobku jedné rovnice k jiné rovnici.

Soustavy lineárních rovnic

Řešení soustavy lineárních rovnic je numerická úloha využívající poznatků z teorie matic.

Definice.
Soustavu m lineárních rovnic s n neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zapisujeme obecně ve tvaru

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} . \qquad (1)$$

První index i koeficientu a_{ij} je pořadové číslo rovnice, druhý index j značí, že a_{ij} je koeficientem u neznámé x_j.
a_{ij} nazveme koeficienty soustavy ,
b_i nazveme pravé strany soustavy .

Soustavy lineárních rovnic

Matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

jejíž prvky tvoří koeficienty u neznámých nazveme matice soustavy (1).
Matici

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

nazveme sloupec pravých stran.
Matici

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

která vznikne z matice $\mathbf{A}$ přidáním sloupce pravých stran, nazveme rozšířená matice soustavy (1).

Soustavy lineárních rovnic

Jsou-li pravé strany všech rovnic rovny nule, tj. $\mathbf{b} = 0$, nazývá se taková soustava homogenní.
Je-li alespoň jedno z čísel $b_1, b_2, \ldots, b_m$ různé od nuly, mluvíme o nehomogenní soustavě rovnic.
Řešením soustavy lineárních rovnic (1) se rozumí n-tice čísel $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, která je řešením každé rovnice, tj. platí

$$\begin{array}{rcl} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n & = & b_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n & = & b_2 \\ \cdots & & \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n & = & b_m \end{array}.$$

Má-li soustava řešení (jedno nebo nekonečně mnoho), řekneme, že je řešitelná.
Má-li jediné řešení, řekneme, že je jednoznačně řešitelná.
Jestliže soustava nemá řešení, řekneme, že je neřešitelná.

Soustavy lineárních rovnic

Věta. (Frobeniova věta o řešitelnosti)
Pro soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s n neznámými platí:
1) Je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, soustava má jediné řešení.
2) Je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$, soustava má nekonečně mnoho řešení. (obecné řešení závisí na $n - h(\mathbf{A})$ parametrech)
3) Je-li $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, soustava je neřešitelná.

Příklad.
Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 6 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 - 7x_2 - x_3 - 16x_4 &= 10 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení
$x_1 = \frac{155}{48} - \frac{9}{4}t, \quad x_2 = \frac{11}{16} - \frac{7}{4}t, \quad x_3 = t, \quad x_4 = \frac{1}{12}$, kde $\quad t \in R$.

Výpočet inverzní matice

Elementární řádkové úpravy matice jsou:
1. Změna pořadí řádků matice.
2. Vynásobení řádku matice nenulovým číslem.
3. Přičtení nenulového násobku jednoho řádku matice k jejímu jinému řádku.

Výpočet inverzní matice Jordanovou metodou.
1. Danou matici rozšíříme jednotkovou maticí téhož typu.
2. V rozšířené matici pomocí elementárních úprav eliminujeme prvky pod i nad hlavní diagonálou.
3. Dělíme řádek pomocí, něhož jsme provedli eliminaci, jeho diagonálním prvkem.
4. Po dokončení eliminace je na místě původní matice $\mathbf{A}$ jednotková matice a na místě jednotkové matice matice inverzní $\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$