Matematika II (KMD/MA2) - cvičení 6

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2019/2020 a vyšší)

Příklad 1. Určete a načrtněte definiční obory funkcí více proměnných:

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{25 - x^2 - y^2}$ [rovina $I\!R^2$ bez kružnice se středem $[0;0]$ a poloměrem 5]

b) $f(x,y) = \sqrt{3x} - \dfrac{2}{\sqrt{y}}$ [I. kvadrant včetně kladné poloosy y]

c) $f(x,y) = \dfrac{2}{\sqrt{xy}}$ [I. a III. kvadrant]

d) $f(x,y) = \dfrac{\pi}{6} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$ [dva výseky roviny $I\!R^2$ vymezené přímkami $y = \pm x$, obsahující osu x včetně přímek $y = \pm x$]

e) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}\right)$ [část roviny $I\!R^2$ vně dvou jednotkových kružnic se středy $[\pm 1; 0]$]

f) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ [čtverec s vrcholy $[\pm 1; \pm 1]$]

g) $f(x,y) = \arcsin(x + y)$ [rovinný pás vymezený dvěma rovnoběžnými přímkami $y = -x \pm 1$ včetně přímek $y = -x \pm 1$]

Příklad 2. Najděte řezy grafu funkce $z = f(x,y)$ rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami ρ_{yz} (tj. $x = 0$) a ρ_{xz} (tj. $y = 0$), jestliže:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ [$x = h : z = h^2 - y^2$ (paraboly), $y = h : z = x^2 - h^2$ (paraboly)]

b) $f(x,y) = xy^2$ [$x = h : z = hy^2$ (paraboly), $y = h : z = h^2 x$ (přímky)]

Příklad 3. Nalezněte konstantní hladiny a vrstevnice (popř. popište graf) následujících funkcí:

a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ [soustředné kružnice a počátek O, (grafem kulová hemisféra)]

b) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2$ [soustředné elipsy a počátek O, (eliptický paraboloid)]

c) $f(x,y) = xy$ [soustředné hyperboly a souřadnicový kříž]

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ [soustředné kružnice a bod $[1;0]$, (rotační paraboloid)]

e) $f(x,y) = x + y$ [rovnoběžné přímky, (rovina)]

f) $f(x,y) = x^2 - y^2$ [hyperboly]

g) $f(x,y,z) = x + y + z$ [roviny]

Příklad 4. Utvořte složenou funkci $f = h(g_1, g_2)$, je-li:

a) $g_1(x,y) = x + 2y$, $g_2(x,y) = x^y$, $h(x,y) = x + y$ [$x + 2y + x^y$]

b) $g_1(x,y) = 3xy$, $g_2(x,y) = x^2 - y^2$, $h(x,y) = \sin x + \sqrt{y}$ [$\sin(3xy) + \sqrt{x^2 - y^2}$]

c) $g_1(x,y) = x - y$, $g_2(x,y) = x + y$, $h(x,y) = \sqrt{xy}$ $\left[\sqrt{x^2 - y^2}\right]$

d) $g_1(x,y) = y \operatorname{arctg} x$, $g_2(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $h(x,y) = y + \ln x$ [$\sqrt{x^2 + y^2} + \ln(y \operatorname{arctg} x)$]

Příklad 5. Vypočtěte parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných v obecném bodě a vyčíslete je v daném bodě A, je-li:

a) $f(x,y) = \frac{\pi}{3}x^2y,\ A = [4,6],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\pi}{3}xy,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pi}{3}x^2\right]$

b) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},\ A = [1,1],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right]$

c) $f(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{x^4},\ A = [1,1],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5},\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4}\right]$

d) $f(x,y) = x\sin^2 y,\ A = [1,\pi],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \sin^2 y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x\sin y\cos y\right]$

e) $f(x,y) = e^x\sin(2y),\ A = [0,0],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = e^x\sin(2y),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^x\cos(2y)\right]$

f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y},\ A = [1,0],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\right]$

g) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y},\ A = [1,-1],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\right]$

h) $f(x,y) = x^y,\ A = [2,-1],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^y\ln x\right]$

Příklad 6. Vypočtěte parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných v obecném bodě a vyčíslete je v daném bodě A, je-li:

a) $f(x,y,z) = 2x^2yz + 3xy^2 + 6xz - 5,\ A = [1,-1,2],$

$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 4xyz + 3y^2 + 6z,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2z + 6xy,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2x2y + 6x\right]$

b) $f(x,y,z) = \cos(3x - 5y + 6z - 2),\ A = [0,\pi,2],$

$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = -3\sin(3x-5y+6z-2),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 5\sin(3x-5y+6z-2),\ \frac{\partial f}{\partial z} = -6\sin(3x-5y+6z-2)\right]$

c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ A = [1,-1,2],$

$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$

d) $f(x,y,z) = x^2y^2\sqrt{z} + \frac{y^2}{x^4},\ A = [-1,-1,1],$

$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{z} - \frac{4y^2}{x^5},\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\sqrt{z} + \frac{2y}{x^4},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2y^2}{2\sqrt{z}}\right]$

Příklad 7. Vypočtěte parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných v obecném bodě a vyčíslete je v daném bodě A, je-li:

a) $f(x,y,z,u) = \ln(x^2+y^2+z^2+u^2),\ A = [3,2,1,0],$

$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2+u^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2+u^2},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2+u^2},\ \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2u}{x^2+y^2+z^2+u^2}\right]$