Matematika II (KMD/MA2) - cvičení 7

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2019/2020 a vyšší)

Příklad 1. Určete vektor grad f v obecném bodě a v daných bodech:

a) $f(x,y) = 4xy^2 - 6xy + 5,\ A = [1,-1],$ $\qquad \left[\operatorname{grad} f = (4y^2 - 6y;\, 8xy - 6x)\right]$

b) $f(x,y) = \dfrac{2x+3y-5}{x-y+2},\ A = [2,0],$ $\qquad \left[\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{9-5y}{(x-y+2)^2};\, \dfrac{5x+1}{(x-y+2)^2}\right)\right]$

c) $f(x,y) = \ln(e^x + 2x - 3y),\ A = [1,-1],$ $\qquad \left[\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{e^x+2}{e^x+2x-3y};\, \dfrac{-3}{e^x+2x-3y}\right)\right]$

Příklad 2. Určete, ve kterých bodech je vektor grad f nulový:

a) $f(x,y) = 3x^2 - 5xy + 4y^2 - 6x + 5y,$ $\qquad [[1;0]]$

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + 2x + y^2 - 4xy + 4y + 6),$ $\qquad \left[\left[\dfrac{5}{3}; \dfrac{4}{3}\right]\right]$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4},$ $\qquad [\operatorname{grad} f(x,y) \neq (0;0)\ \forall [x;y] \in D_f]$

Příklad 3. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě $T = [x_T, y_T, f(x_T, y_T)]$, je-li:

a) $f(x,y) = 3x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - 6x + 5y + 10,\ T = [1,-1,?],$ $\qquad [12x - 7y - z - 10 = 0]$

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y},\ T = [1,1,?],$ $\qquad [x - y - z + 1 = 0]$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ T = [4,-3,?],$ $\qquad [4x - 3y - 5z = 0]$

d) $f(x,y) = 2x^2 + y^2,\ T = [1,1,?],$ $\qquad [4x + 2y - z - 3 = 0]$

e) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y},\ T = [1,1,?],$ $\qquad [-2x + 2y + 4z - \pi = 0]$

f) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x,\ T = [1,?,2],$ $\qquad [5x + y - z - 3 = 0]$

g) $f(x,y) = xy,\ T = [?,2,2],$ $\qquad [2x + y - z - 2 = 0]$

Příklad 4. Určete rovnici tečné roviny ke grafu fukce $f(x,y)$, která je rovnobežná s rovinou ρ, je-li:

a) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 + 5,\ \rho: 4x - 12y + z = 3,$ $\qquad [4x - 12y + z + 5 = 0]$

b) $f(x,y) = 2x^2y + 5,\ \rho: 8x + 2y - z = 0,$ $\qquad [8x + 2y - z - 3 = 0,\ 8x + 2y - z + 13 = 0]$

Příklad 5. Určete rovnici tečné roviny ke grafu fukce $f(x,y)$, která je kolmá na přímku p, je-li:

$f(x,y) = xy,\ p: X = [-2,-2,1] + t(2,1,-1),$ $\qquad [2x + y - z - 2 = 0]$

Příklad 6. Určete, zda funkce $f(x,y)$ v bodě A ve směru vektoru $\vec{u}$ roste či klesá a určete rychlost změny, je-li

a) $f(x,y) = \ln(x^2y + 1),\ A = [1;2],\ \vec{u} = (1;-1),$ $\qquad \left[\text{roste rychlostí } \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

b) $f(x,y) = x^2 - 2y^2,\ A = [3;4],\ \vec{u} = (1;1),$ $\qquad \left[\text{klesá rychlostí } \dfrac{-10}{\sqrt{2}}\right]$

c) $f(x,y) = \dfrac{2x+3y-5}{x-y+2},\ A = [2;0],\ \vec{u} = (2;-3),$ $\qquad \left[\text{klesá rychlostí } \dfrac{-15}{16\sqrt{13}}\right]$

Příklad 7. Pro funkci $f(x,y)$ určete směr $\vec{s}$, ve kterém funkce v bodě A nejvíce roste a určete rychlost růstu, je-li

a) $f(x,y) = 2x^2 - 3y + 5,\ A = [1;2],$ $\qquad \left[\vec{s} = \dfrac{1}{5}(4;-3),\ \text{rychlost je } 5\right]$

b) $f(x,y) = e^{x^2-y},\ A = [1;-1],$ $\qquad \left[\vec{s} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2;-1),\ \text{rychlost je } e^2\sqrt{5}\right]$

c) $f(x,y) = \arcsin(2x+y),\ A = \left[\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right]$ $\qquad \left[\vec{s} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2;1),\ \text{rychlost je } 2\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right]$

Příklad 8. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v obecném bodě a vyčíslete je v daných bodech:

a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2),\ A = [1;0]$,
$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2-y},\ A = [-2;3]$,
$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-y}{\sqrt{(x^2-y)^3}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{x}{2\sqrt{(x^2-y)^3}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{4\sqrt{(x^2-y)^3}}\right]$$

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy),\ A = [1;-1]$,
$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}\right]$$