Matematika 2.
Parciální derivace vyšších řádů, Směrová derivace a gradient, Funkce zadané implicitně

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \ldots, g_p(A)]$, pak je složená funkce $f = h(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ diferencovatelná v bodě A a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(B)\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(A) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(B)\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(A) + \cdots + \frac{\partial h}{\partial y_p}(B)\frac{\partial g_p}{\partial x_j}(A)$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad.
Určete $\frac{\partial f}{\partial x}$ složené funkce $f = h(g_1, g_2, g_3)$, kde h je funkce proměnných u, v, w diferencovatelná na $\boldsymbol{E}_3$,
$g_1(x, y, z) = x \cos y \sin z$,
$g_2(x, y, z) = x \sin y \sin z$,
$g_3(x, y, z) = x \cos z$.

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí, čtvrté, páté a obecně m-té parciální derivace značíme

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_m}} .$$

Příklad.
Určete všechny druhé parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x^2 y + x^4 y^3 \quad \text{definované v } \boldsymbol{E}_2 .$$

Parciální derivace vyšších řádů

Věta 3.5.
Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ diferencovatelné v bodě A, pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(A) \ .$$

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A, pak všechny m-té parciální derivace v bodě A lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovny.

Příklad.
Je-li např. f funkce dvou proměnných třikrát diferencovatelná v bodě A, pak

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} .$$

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) \ .$$

Má-li funkce g_s derivaci v bodě 0, nazýváme ji směrovou derivací funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$ a značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) \quad (= g_s'(0)\,) \ .$$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2,4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{g_s(t)-g_s(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+t\boldsymbol{s})-f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$ popisuje, jak rychle se mění závisle proměnná s pohybem bodu A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$.

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\dots,a_j+t,\dots,a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

$= \lim_{u\to a_j} \frac{f(a_1,a_2,\dots,u,\dots,a_n)-f(A)}{u-a_j} = \lim_{u\to a_j} \frac{g_j(u)-g_j(a_j)}{u-a_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(A),$

tedy parciální derivace jsou zvláštním případem směrových derivací.

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g_s'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme gradient funkce f v bodě A jako n-rozměrný vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right)$$

a označíme jej $\mathrm{grad} f(A)$.

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší, resp. nejmenší, právě když $\alpha = 0$, resp. $\alpha = \pi$.
(tj. $\boldsymbol{s}$ je násobkem gradientu).

Příklad

Určete jednotkový vektor $\boldsymbol{s}$, v jehož směru je směrová derivace

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ největší a zjistěte ji.

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

$$y = f(x)\ .$$

Příklad 1.

$f(x) = \sin x$
$f(x) = x^3 + 2x - 11$

2) Funkce zadaná parametrickým vyjádřením (parametrická funkce) je zadána soustavou rovnic

$$x = f_1(t),\ \ y = f_2(t)\ ,$$

kde t je reálný parametr.

Příklad 2.

$x = 2 + 3t,\ \ y = 1 - t\ \ ,\ \ t \in R\ ,$ přímka
$x = \cos t,\ \ y = \sin t\ \ ,\ \ t \in [0, 2\pi]\ ,$ kružnice
$x = 2\cos t,\ \ y = 5\sin t\ \ ,\ \ t[0, 2\pi]\ ,$ elipsa

Funkce zadané implicitně

3) Funkce zadaná v implicitním tvaru (implicitní funkce) je zadána pomocí funkce dvou reálných proměnných. Ptáme se, kdy rovnice

$$g(x, y) = 0$$

určuje y jako funkci proměnné x.

Příklad 3.

$$y - x - \mathrm{arctg} y = 0 \ .$$

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci g dvou proměnných a označme

$$P = \{[x, y] \in D(g);\ g(x, y) = 0\}\ .$$

Množina P může být prázdná, konečná i nekonečná.
Nás zajímá případ, kdy P je grafem nějaké funkce f jedné proměnné.

Příklad 4.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

Příklad 5.

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Příklad 6.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Funkce zadané implicitně

Příklad 7.

$$g(x, y) = x + y$$

Příklad 8.

$$g(x, y) = xy - |xy|$$

Příklad 9.

$$y - x - \mathrm{arctg} y = 0\ .$$

Příklad 10.

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 4 = 0\ .$$

Příklad 11.

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x + 18 = 0\ .$$

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B a je-li $\frac{\partial g}{\partial y}(B) \neq 0$, pak existuje okolí U bodu a a jediná funkce f jedné proměnné, která má na U spojitou m-tou derivaci, pro každé $x \in U$ platí

$$g(x, f(x)) = 0 \tag{1}$$

a

$$f(a) = b\,. \tag{2}$$

Definice
Funkci f (z Věty 4.1.) nazýváme funkcí zadanou implicitně rovnicí $g(x, y) = 0$ a bodem B.

Funkce zadané implicitně

Poznámka (derivování funkce zadané implicitně)
Rovnost (1) derivujeme podle x s přihlédnutím ke skutečnosti, že v (1) je za druhou proměnnou „dosazena“ funkce proměnné x.
(aplikujeme větu o složené funkci)
Dostaneme

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f'(x) = 0 \tag{3}$$

pokud

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))}$$

Funkce zadané implicitně

dalším derivováním (3) dostaneme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)).f'(x) +$$

$$+ (\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(x, f(x)).f'(x)).f'(x) +$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f''(x) = 0 \ ,$$

odtud vypočítáme

$$f''(x) = \dots$$

podobně postupujeme dále ...

Funkce zadané implicitně

Příklad.
Určete tečnu grafu funkce f zadané implicitně rovnicí

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 4 = 0$$

a bodem $B = [1, 2]$ v bodě B.

Analogicky postupujeme u funkcí více proměnných.

Příklad.
Určete tečnou rovinu grafu funkce $f(x, y)$ dvou proměnných zadané implicitně rovnicí

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x + 18 = 0$$

a bodem $B = [1, 2, 3]$ v bodě B.