

Matematika 2.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Cauchyova úloha

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnici rozumíme rovnicí, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.

Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.

Rovnice, v níž se vyskytují derivace neznámé funkce podle více proměnných, nazýváme **parciální diferenciální rovnice**.

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v dané rovnici vyskytuje.

Příklad

Rovnice

$$x^3 y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu.

Řešením diferenciální rovnice (v určitém oboru proměnné x) nazýváme každou takovou funkci $y(x)$, která spolu se svými derivacemi splňuje uvažovanou rovnici identicky (tj. pro všechna x z uvažovaného oboru).

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Rovnice

$$x^3 y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a jejím řešením je např. funkce

$$y = x^2$$

a to v \mathbb{R} .

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = x^3 \cdot 2 + (2x)^3 - x \cdot x^2 - 9x^3 = 2x^3 + 8x^3 - x^3 - 9x^3 = 0.$$

Graf řešení $y(x)$ nazýváme **integrální křivkou** diferenciální rovnice.

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x .$$

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = -9 \sin 3x + 9 \sin 3x .$$

Také ale

$$y = 7 \sin 3x .$$

Také ale

$$y = 8 \cos 3x .$$

Obecně

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení, které v daném bodě x_0 splňuje tzv. **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = b_1, y'(x_0) = b_2, y^{(2)}(x_0) = b_3, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n,$$

kde b_j , $j = 1, 2, \dots, n$ jsou daná reálná čísla.

Cauchyova úloha:

Hledáme řešení y rovnice

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

splňující počáteční podmínky

$$y(x_0) = b_1, y'(x_0) = b_2, y^{(2)}(x_0) = b_3, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n.$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 3 .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x .$$

Derivujeme toto řešení

$$y' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x .$$

Dosadíme $x = 0$ a dostaneme

$$2 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1$$

$$3 = 3C_1 \cdot 1 - 3C_2 \cdot 0$$

Odtud $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Tedy řešení Cauchyovy úlohy je

$$y = \sin 3x + 2 \cos 3x .$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Budeme uvažovat pouze rovnice, které lze rozřešit vzhledem k derivaci, tj.

$$y' = f(x, y). \quad (2)$$

Někdy se zapisuje v tzv. diferenciálním tvaru

$$P(x, y) dx + R(x, y) dy = 0. \quad (3)$$

Užijeme-li, že $y' = \frac{dy}{dx}$, pak lze (3) přepsat na

$$y' = -\frac{P(x, y)}{R(x, y)}$$

a naopak (2) na tvar

$$dy - f(x, y) dx = 0.$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Geometrický význam rovnice (2)

Graf neznámé funkce y je nějaká křivka v rovině xy . Rovnice (2) nám říká, že v každém bodě roviny je dána směrnice tečny hledané křivky procházející daným bodem. Můžeme tedy zakreslit v libovolném bodě (x, y) tečnu se směrnicí $k = y' = f(x, y)$ (tzv. směrové pole).

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)

Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y) ,$$

necht' $f(x, y)$ splňuje následující podmínky

a) $f(x, y)$ je spojitá funkce dvou proměnných na

$$O = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

b)

$$\exists L > 0 \forall (x, y), (x, y_1) \in O \quad |f(x, y_1) - f(x, y)| \leq L|y_1 - y| ,$$

potom v jistém okolí bodu x_0 existuje jediné řešení $y = y(x)$ dané rovnice takové, že $y(x_0) = y_0$.