Hybnost a energie při vzájemném působení těles

Studijní text FO pro kategorii D

Josef Jírů

Obsah

Úvod

Všude kolem nás na sebe vzájemně působí tělesa a mění svůj pohybový stav. Silovým polem se vzájemně přitahují či odpuzují, srážejí se a odrážejí se při vzájemném dotyku. Budeme se zabývat pohybovými účinky těchto působení a zkoumat základní přeměny energie. Přitom nebudeme popisovat průběh srážky, to znamená dobu působení, působící síly a jejich časový či dráhový průběh, který může být i velmi složitý (např. odpálení tenisového míčku raketou), nýbrž nás bude zajímat pouze pohybový stav těles před vzájemným působením a po něm. Při popisu si vystačíme s dvěma veličinami – s hybností a energií.

S popisovanými jevy se můžeme setkat nejen při chování těles v našem okolí (míčové hry, dopravní nehody, výstřel ze zbraně, exploze granátu, činnost reaktivního motoru, vzájemné přitažení a odstrčení bruslařské dvojice, srážky kulečníkových koulí, zatloukání hřebíku), ale též v oblasti mikrosvěta či vesmíru. V jaderném reaktoru narážejí rychlé neutrony vzniklé při jaderné reakci na jádra atomů, v urychlovačích posíláme proti sobě částice a zkoumáme výsledky vzájemných srážek. Srážejí se molekuly plynu a odrážejí se od stěn nádoby. Při elektrickém výboji dochází ke srážkám urychlovaných elektronů a iontů s neutrálními molekulami.

Modelovým příkladem pro zkoumání srážek těles je ráz koulí. Zabýval se jím i český přírodovědec, lékař a filozof Jan Marek Marci z Lanškrouna (1595 - - 1667). V roce 1639 vychází jeho fyzikální spis *O úměrnosti pohybu …* obsahující systematický výklad poznatků mechaniky včetně původní analýzy rázu pružných a nepružných těles. Jedna z jeho osmi tezí o pružných rázech uvádí např. toto: *„Narazí-li větší koule v pohybu na menší, přičemž poměr hmotností převáží nad impulsem menší koule, odrazí ji a pohybuje se dále.“* Význam Marciho díla vynikne, uvážíme-li, že v té době se fyzikální veličiny teprve vyvíjely (pojem energie znám ještě nebyl) a že Newtonovo stěžejní dílo *Philosophiae naturalis principia mathematica*, které dalo základ klasické mechanice, vyšlo teprve v roce 1687.

Text je určen středoškolským studentům, kteří se seznámili především s Newtonovými pohybovými zákony, s hybností a s mechanickou energií a kteří zvládají základní algebraické úpravy výrazů se zlomky a s druhou mocninou a odmocninou. V textu je minimální množství teorie, naopak závěry jsou většinou vyvozovány přímo v řešených příkladech. U dalších matematických dovedností, jako je užití souřadnic a vektorů, převládá intuitivní přístup.

1 Dokonale nepružný ráz

V izolované soustavě těles, tedy v soustavě, na kterou z vnějšku nepůsobí žádná síla nebo výslednice všech vnějších sil je nulová, platí **zákon zachování hybnosti** (dále jen ZZH). Tělesa v izolované soustavě však na sebe vzájemně působit mohou. Těmito silami se mění jejich hybnosti, avšak celková hybnost soustavy jako celku se nemění.

Také energie se v izolované soustavě těles zachovává. Pokud se přeměňuje pouze mechanická forma energie opět na mechanickou formu energie, platí zákon **zachování mechanické energie**. Jestliže se však přeměňuje mechanická energie na nemechanickou nebo naopak, potom mechanická energie soustavy se změní, ale celková energie soustavy zůstane konstantní. V každé izolované soustavě těles tedy vždy platí zákon **zachování (celkové) energie**.

Příklad 1:
Vagón o hmotnosti $m_1 = 20$ t se pohybuje přímočarým pohybem po vodorovných kolejích rychlostí o velikosti $v_1 = 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a narazí do stojícího vagónu o hmotnosti $m_2 = 30$ t. Po srážce se vagóny automaticky spojí.

a) Určete rychlost (tj. směr rychlosti a velikost rychlosti) soupravy po srážce.
b) Určete, jaká část původní kinetické energie se ve formě kinetické energie po srážce zachovala.

Řešení:
a) Během srážky, která trvá od okamžiku dotyku nárazníků do okamžiku dosažení stejné rychlosti, vagóny na sebe vzájemně působí akcí a reakcí. Jednou silou působí první vagón na druhý a druhou silou stejné velikosti a opačného směru působí druhý vagón na první. Každá z těchto sil má na příslušný vagón pohybový účinek. Tímto účinkem je u prvního vagónu jeho zpomalení a u druhého jeho uvedení do pohybu. Podle ZZH se hybnost soustavy během děje nemění, to znamená, že hybnost soustavy před srážkou a po srážce je stejná (má stejnou velikost a stejný směr). Platí:

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}.$$

Vektorová rovnice říká, že směr obou rychlostí je shodný (hmotnosti jsou kladné), proto pro velikosti hybností platí

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v.$$

Z rovnice plyne

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \tag{1}$$

Se vzorci tohoto typu si můžeme trochu pohrát. Na pravé straně je zlomek udávající poměr nějakých hmotností, tedy číslo bez jednotky, kterým pak násobíme velikost rychlosti. Hodnota zlomku je nezávislá na volbě jednotek. Zlomek *má stejnou hodnotu, ať hmotnosti dosadíme v kilogramech, v tunách nebo třeba v librách. Zvolená jednotka však musí být u každé hmotnosti stejná, nelze je kombinovat. Velikost výsledné rychlosti pak bude mít stejnou jednotku jako je jednotka dosazované velikosti rychlosti, tedy dosadíme-li hodnotu v kilometrech za hodinu, vyjde výsledná velikost rychlosti též v kilometrech za hodinu.*

Pokud ovšem si tyto skutečnosti neuvědomíme nebo nemáme jistotu, raději dosadíme všechny hmotnosti v kilogramech a velikost rychlosti v metrech za sekundu.

Nyní dosadíme, nejprve pouze za hmotnosti, poté i za velikost rychlosti:

$$v = \frac{2}{5}v_1 = 1{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Výsledek po částečném dosazení říká, že velikost rychlosti soupravy tvoří 0,4 násobek velikosti rychlosti prvního vagónu před srážkou.

b) Označme kinetickou energii

před nárazem $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$, po nárazu $E'_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$.

Nyní na základě výsledku úlohy a) bychom mohli obě energie číselně vypočítat a výsledky dát do poměru. Řešení však provedeme obecně, tj. do rovnice

$$\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}$$

dosadíme za velikost rychlosti v výraz z rovnice (1) a upravíme. Dostaneme

$$\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} = \frac{m_1}{m_1+m_2},$$

popř.

$$E'_\mathrm{k} = \frac{m_1}{m_1+m_2}E_\mathrm{k}.$$

Obecný výsledek je velice jednoduchý, po dosazení vychází $\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = 0{,}4$, popř. $E'_\mathrm{k} = 0{,}4E_\mathrm{k}$. Znamená to, že během srážky se 40 % původní kinetické energie ve formě kinetické energie soustavy zachová a zbývajících 60 % původní kinetické energie se přemění na vnitřní energii soustavy (projeví se poněkud zvýšenou teplotou v oblasti nárazníků). Z obecného řešení též plyne, že výsledek nezávisí na velikosti rychlosti přijíždějícího vagónu – při daném poměru hmotností se vždy zachová 40 % jeho původní kinetické energie.

Řešení se nazývá proto obecné, že nám umožní rychle vyřešit danou úlohu *s libovolným číselným zadáním, ale také popsat některé speciální případy. Obecné řešení úlohy, která přestavuje tzv. dokonale nepružnou srážku dvou těles*

$$\boxed{\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}} \tag{2}$$

nám umožní udělat další úvahy:

V případě stejných hmotností, tj. $m_1 = m_2$*, dostaneme:*

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_2 + m_2} = \frac{m_2}{2m_2} = \frac{1}{2},$$

což znamená, že právě polovina původní kinetické energie zachová a zbývající polovina se přemění na vnitřní energii.

Při jiné volbě, např. $m_1 = 0{,}5m_2$*, dostaneme:*

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}5m_2}{0{,}5m_2 + m_2} = \frac{1}{3},$$

tedy jedna třetina původní kinetické energie se zachová a zbývající dvě třetiny se přemění na vnitřní energii.

Obecně v případě $m_1 < m_2$ *se zachová menší část energie než přemění. V krajním případě, kdy letící těleso má mnohem menší hmotnost než těleso v klidu, tedy* $m_1 \ll m_2$*, se na vnitřní energii přemění naprostá většina původní kinetické energie. Případ je typický pro střelu, která zasáhne mnohem hmotnější živý objekt. Způsobí především destrukci jeho tkáně, nikoliv uvedení do pohybu.*

Obecně v případě $m_1 > m_2$ *se naopak větší část energie zachová než přemění. V krajním případě, kdy letící těleso má mnohem větší hmotnost než těleso v klidu, tedy* $m_1 \gg m_2$*, se na vnitřní energii přemění zanedbatelná část původní kinetické energie. Příkladem může být rychle jedoucí automobil, který narazí na mouchu, a obě tělesa pak pokračují v pohybu při téměř nezměněné kinetické energii (přeměněná nepatrná část kinetické energie je však pro mouchu příliš velká). Lepší porovnání umožní následující příklad.*

Příklad 2:

Na cílové pásce sedí holub o hmotnosti 1 kg. Porovnejte následek „srážky“ holuba v klidu se střelou (sadou broků) o hmotnosti 36 g letící rychlostí $400\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ s následkem srážky bez odrazu se sprintujícím běžcem o hmotnosti 62,5 kg, který má stejnou kinetickou energii jako letící střela. Využijte přímo obecné řešení příkladu 1.

Řešení:

Pro představu vypočítáme číselně velikost rychlosti běžce. Kinetická energie běžce a střely je stejná

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m_\mathrm{b} v_\mathrm{b}^2 = \frac{1}{2} m_\mathrm{s} v_\mathrm{s}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}036 \cdot 400^2\ \mathrm{J} = 2\,880\ \mathrm{J}.$$

Velikost rychlosti běžce s touto energií je

$$v_{\mathrm{b}} = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}}}{m_{\mathrm{b}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,880}{62{,}5}} = 9{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Následky srážky porovnáme pomocí přeměněné energie, kterou označíme $\Delta U = E_{\mathrm{k}} - E'_{\mathrm{k}}$ (nazýváme ji přírůstek vnitřní energie soustavy těles). S využitím vztahu (2) platí:

$$\frac{\Delta U}{E_{\mathrm{k}}} = \frac{E_{\mathrm{k}} - E'_{\mathrm{k}}}{E_{\mathrm{k}}} = 1 - \frac{E'_{\mathrm{k}}}{E_{\mathrm{k}}} = 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

V případě zásahu střelou se tak přemění energie

$$\Delta U = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{0{,}036 + 1} E_{\mathrm{k}} = \frac{1\,000}{1\,036} E_{\mathrm{k}} = 0{,}965 E_{\mathrm{k}} = 2\,780\ \mathrm{J}.$$

V případě nárazu běžce se přemění energie

$$\Delta U = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{62{,}5 + 1} E_{\mathrm{k}} = \frac{10}{635} E_{\mathrm{k}} = 0{,}015\,7 E_{\mathrm{k}} = 45\ \mathrm{J},$$

což je pro holuba mnohem přijatelnější.

Příklad 3:
Vagón o hmotnosti $m_1 = 20$ t se pohybuje přímočarým pohybem po vodorovných kolejích rychlostí o velikosti $v_1 = 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a narazí do vagónu o hmotnosti $m_2 = 30$ t, který se pohybuje rychlostí o velikosti $v_2 = 3{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ proti směru pohybu prvního vagónu. Po srážce se vagóny automaticky spojí.

a) Určete rychlost (tj. směr rychlosti a velikost rychlosti) soupravy po srážce.
b) Určete, jaká část původní kinetické energie se ve formě kinetické energie po srážce zachovala.

Řešení:
a) Podle ZZH se hybnost během děje nemění, tj. hybnost soustavy před srážkou a po srážce je stejná (tj. má stejnou velikost a stejný směr). Platí:

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2) \boldsymbol{v}. \tag{3}$$

Tentokrát není hned zřejmý směr pohybu soupravy. Můžeme však vypočítat velikost hybnosti každého vagónu před srážkou:

$$p_1 = m_1 v_1 = 80\,000\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}, \qquad p_2 = m_2 v_2 = 90\,000\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}.$$

Jelikož $p_2 > p_1$, má soustava těles po srážce směr hybnosti totožný se směrem pohybu druhého vagónu, proto se bude celá souprava pohybovat v tomto směru. Takto jsme zjistili směr pohybu soupravy po srážce, tedy určili jsme směr rychlosti $\boldsymbol{v}$. Velikost v rychlosti po srážce získáme přepisem vektorové rovnice (3) do skalárního tvaru, který dává do rovnosti velikost hybnosti soustavy před srážkou a velikosti hybnosti po srážce:

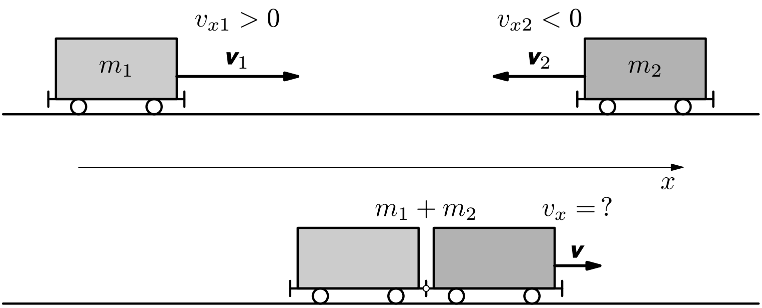
$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v,$$

z níž plyne

$$v = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \tag{4}$$

Číselně vychází $v = 0{,}20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Elegantní však bude, když i směr rychlosti získáme z obecného řešení. Za tím účelem **označme x osu s kladným směrem totožným se směrem pohybu prvního vagónu**, v_{x1} souřadnici rychlosti prvního vagónu, v_{x2} souřadnici rychlosti druhého vagónu a v_x souřadnici rychlosti soupravy po srážce. **Znaménko souřadnice rychlosti je kladné, pohybuje-li se vagón ve směru osy x, a záporné, pohybuje-li se proti směru osy x.** Při naší volbě je $v_{x1} > 0$, $v_{x2} < 0$, tedy $v_{x1} = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_{x2} = -3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.



Vektorovou rovnici (3) zapíšeme souřadnicově

$$m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2} = (m_1 + m_2)v_x,$$

vyjádříme souřadnici hledané rychlosti

$$v_x = \frac{m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2}}{m_1 + m_2}, \tag{4'}$$

dosadíme číselné hodnoty a vypočteme:

$$v_x = \frac{20\,000 \cdot 4 + 30\,000 \cdot (-3)}{20\,000 + 30\,000}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = -0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Výsledek říká, že souprava se pohybuje rychlostí o velikosti $0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ proti směru osy x, tedy proti směru pohybu prvního vagónu.

b) Tentokrát je kinetická energii vagónů před nárazem

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2.$$

Bez ohledu na směr rychlosti se kinetické energie jednotlivých těles soustavy sčítají, neboť energie je skalární veličina. Kinetická energie soupravy po srážce vagónů je

$$E_\mathrm{k}' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2.$$

Řešení provedeme opět obecně, tj. do rovnice

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}$$

dosadíme velikost v rychlosti z rovnice (4) nebo souřadnici v_x rychlosti z rovnice (4′):

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{(m_1 + m_2)\frac{(m_2 v_2 - m_1 v_1)^2}{(m_1 + m_2)^2}}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}$$

$$\text{nebo} \qquad \frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{(m_1 + m_2)\frac{(m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2})^2}{(m_1 + m_2)^2}}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{(m_2 v_2 - m_1 v_1)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)} \tag{5}$$

$$\text{nebo} \qquad \frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{(m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2})^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}. \tag{5′}$$

Tentokrát obecný výsledek tak jednoduchý není. Po dosazení vychází $\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = 0{,}003\,5$, tedy zachová se pouze 0,35 % kinetické energie vagónů před srážkou.

Podívejme se i nyní na některé speciální případy. Zvolíme-li v rovnici (5) například $v_2 = 0$, dostaneme po úpravách výsledek příkladu 1b), tedy rovnici (2).

Zvolíme-li v rovnici (5') $m_1 = m_2$, dostaneme po úpravách

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{(v_{x1} + v_{x2})^2}{2(v_1^2 + v_2^2)}.$$

Je-li navíc $v_{x1} = -v_{x2}$, tj. vagóny se shodnými hmotnostmi se pohybují proti sobě rychlostmi stejné velikosti, dostaneme $\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = 0$. Veškerá kinetická energie se přeměnila na vnitřní energii a souprava zůstává na místě. Je-li naopak

$v_{x1} = v_{x2}$, dostaneme $\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = 1$. Veškerá kinetická energie se zachovala, ke srážce vagónů vůbec nedošlo, neboť se pohybují za sebou stejnou rychlostí.

Předpokládejme ještě např. současnou platnost podmínek $m_1 = 2m_2$, $v_{x1} = -v_{x2}$, tedy dva vagóny s poměrem hmotností 2:1 jedou proti sobě rychlostmi stejné velikosti. Nyní vyjde $\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{1}{9}$.

Příklad 4:

Dvě tělesa o hmotnostech $m_1 = 0{,}10$ kg, $m_2 = 0{,}40$ kg se pohybují v navzájem kolmých směrech rychlostmi o velikostech $v_1 = 3{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a srazí se tak, že se nadále pohybují společně jako jedno těleso.

a) Určete rychlost (tj. směr rychlosti a velikost rychlosti) tělesa vzniklého po srážce.

b) Určete, jaká část původní kinetické energie se ve formě kinetické energie po srážce zachová.

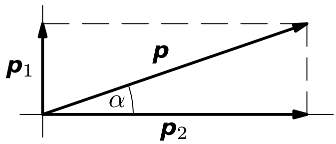
Řešení:

a) Tentokrát se tělesa nepohybují v jedné přímce, nýbrž ve dvou přímkách navzájem kolmých. Hybnosti těles před srážkou jsou

$$\boldsymbol{p}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{p}_2 = m_2\boldsymbol{v}_2,$$

hybnost tělesa vzniklého po srážce je

$$\boldsymbol{p} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}.$$



Podle zákona zachování hybnosti platí:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2,$$

tedy výslednou hybnost po srážce dostaneme složením (vektorovým součtem) původních hybností těles před srážkou. Z obrázku plyne, že velikost výsledné hybnosti lze získat z Pythagorovy věty. Pro velikosti vektorů platí

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2,$$

dosazením dostaneme

$$[(m_1 + m_2)v]^2 = (m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2.$$

Z rovnice plyne pro velikost hledané rychlosti

$$v = \frac{\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}}{m_1 + m_2}.$$

Číselně vychází $v = 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Směr rychlosti určíme např. úhlovou odchylkou α konečné rychlosti $\boldsymbol{v}$ (hybnosti $\boldsymbol{p}$) od rychlosti $\boldsymbol{v}_2$ (hybnosti $\boldsymbol{p}_2$). Podle obrázku platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}.$$

Po dosazení a výpočtu vychází $\alpha = 21°$.

b) Kinetická energie těles před nárazem je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2,$$

kinetická energie spojených těles je

$$E'_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2.$$

Poměr hledaných energií pak je

$$\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}.$$

Zlomek zkrátíme a dosazením za velikost v rychlosti dostaneme

$$\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{(m_1 + m_2)\dfrac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} = \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)} = 0{,}58.$$

Problémové intermezzo

1) Aleš a Tomáš řešili úlohu: Ze vzduchovky o hmotnosti 3,1 kg byl vystřelen náboj o hmotnosti 0,54 g rychlostí 170 m · s^{-1}. Určete práci, kterou vykonal stlačený vzduch.

Aleš řešil úlohu takto: „Vykonaná práce je rovna kinetické energii získané střelou. Stačí použít vzorec $W = E_\mathrm{k} = mv^2/2$ a máš to.“

„To nemáš“, namítl Tomáš: „Práce byla větší, protože jsi zapomněl započítat kinetickou energii vzduchovky těsně po výstřelu.“ Má pravdu Aleš, nebo má pravdu Tomáš? Porovnejte číselné výsledky každého z nich.

2) O víkendu si Aleš s Tomášem chtěli odpočinout od fyziky a vydali se k rybníku. Každý nasedl do jedné loďky. Když byli záděmi u sebe, Aleš na první loďce o celkové hmotnosti $m_1 = 160$ kg odstrčil pádlem druhou loďku s Tomášem o celkové hmotnosti $m_2 = 100$ kg. Druhá loďka se tak uvedla do pohybu rychlostí o velikosti $v_2 = 0{,}80$ m · s^{-1}. Určete práci W, kterou Aleš vykonal, a poměr $E_{\mathrm{k}2}/E_{\mathrm{k}1}$ kinetických energií druhé a první loďky. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

3) Kdykoliv se nějaké těleso uvede do pohybu působením tělesa pevně spojeného se Zemí, uvede se podle Newtonových pohybových zákonů do pohybu i

Země. Proč do vykonané práce nezapočítáváme kinetickou energii, kterou získala Země?

Výsledky jsou uvedeny na straně 29.

Příklad 5:
Krasobruslař o hmotnosti $m_1 = 76$ kg a krasobruslařka o hmotnosti $m_2 = 57$ kg tvoří pár. Oba jsou za sebou v klidu, partner partnerku odstrčí tak, že její rychlost má velikost $v_2 = 3{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, přičemž se bruslemi neopírá o led (nijak se nebrání vlastnímu pohybu).

a) Určete velikost rychlosti partnera.

b) Určete práci vykonanou partnerem.

Řešení:
a) Podle ZZH je celková hybnost před působením i po působení stejná, v našem případě nulová. Platí:

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}.$$

Z rovnice tentokrát vyjádříme přímo hledanou rychlost:

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{v}_2.$$

Z rovnice plyne, že směr pohybu partnera je opačný než směr pohybu partnerky. Velikost rychlosti partnera je

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1}v_2. \tag{6}$$

Jiná možnost řešení: Bruslaři si z klidu udělí stejně velké hybnosti opačného směru. Z porovnání velikostí hybností

$$m_1v_1 = m_2v_2$$

dostaneme velikost v_1 hledané rychlosti, tj. vzorec (6). Číselně vychází $v_1 = 0{,}75v_2 = 2{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) Práce vykonaná partnerem je rovna součtu kinetických energií obou bruslařů:

$$W = E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2.$$

Užitím vztahu (6) a po úpravě dostaneme

$$W = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1}v_2\right)^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{(m_1+m_2)m_2}{2m_1}v_2^2.$$

Číselně vychází $W = 510$ J.

Příklad 6:

Krasobruslař o hmotnosti $m_1 = 72$ kg a krasobruslařka o hmotnosti $m_2 = 54$ kg tvoří pár. Oba jedou za sebou rychlostí o velikosti $v = 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, ona vpředu, on vzadu. V jednom okamžiku partner partnerku odstrčí tak, že se sám uvede do pohybu v opačném směru rychlostí o velikosti $v_1 = 1{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Určete rychlost partnerky.

b) Určete práci vykonanou partnerem.

Řešení:

a) 1. způsob – vzhledem ke vztažné soustavě spojené s ledem: Podle ZZH je hybnost před působením i po působení krasobruslařů stejná. Platí

$$(m_1 + m_2)\boldsymbol{v} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Z rovnice vyjádříme přímo hledanou rychlost:

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{(m_1 + m_2)\boldsymbol{v} - m_1\boldsymbol{v}_1}{m_2}.$$

Pro souřadnice platí $v_{x2} = \dfrac{(m_1 + m_2)v_x - m_1 v_{x1}}{m_2}$.

Při volbě směru osy x totožného se směrem pohybu dvojice je podle zadání $v_x = 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_{x1} = -1{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Dosazením dostaneme

$$v_{x2} = \frac{(72 + 54) \cdot 1{,}7 - 72 \cdot (-1)}{54}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 5{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Partnerka se pohybuje v původním směru rychlostí o velikosti $5{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2. způsob – ve vztažné soustavě spojené s těžištěm bruslařů, které se vzhledem k ledu pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$: Před odstrčením je každý z dvojice vzhledem k těžišti v klidu, po oddělení získají vzhledem k těžišti rychlosti $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ splňující rovnice

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2.$$

V této vztažné soustavě je tedy rychlost partnera $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}$ a pro její souřadnici platí

$$u_{x1} = v_{x1} - v_x = -1{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} - (1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}) = -2{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Podle ZZH je splněna rovnice $m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$, z níž plyne

$$\boldsymbol{u}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{u}_1.$$

Souřadnice rychlosti partnerky vzhledem k těžišti páru je

$$u_{x2} = -\frac{m_1}{m_2}u_{x1} = -\frac{4}{3}u_{x1} = -\frac{4}{3}(-2{,}7)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Souřadnice rychlosti partnerky vzhledem k ledu pak je

$$v_{x2} = v_x + u_{x2} = 1{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} + 3{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 5{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

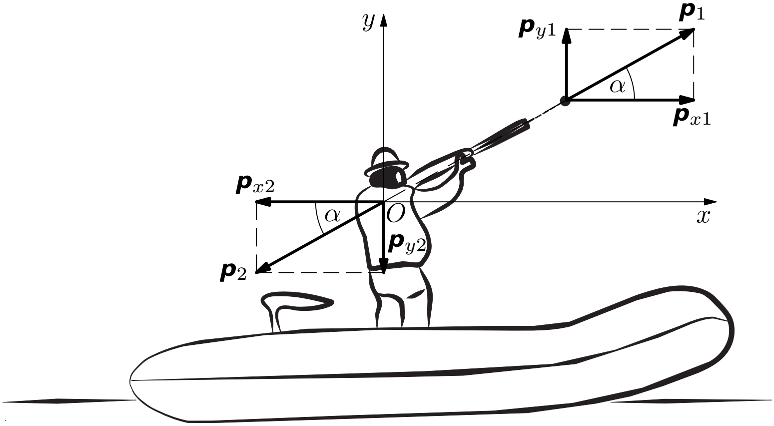
b) Práce vykonaná partnerem je rovna rozdílu kinetické energie soustavy oddělených bruslařů po vzájemném působení a kinetické energie páru před působením:

$$W = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = 610\ \mathrm{J}.$$

Do vzorce jsme přímo dosadili číselné hodnoty, obecné řešení je příliš složité.

Příklad 7:

Lovec stojí v gumovém člunu na rybníku a střílí brokovnicí na letící divokou kachnu. Hmotnost člunu s lovcem a zbraní je 120 kg, hmotnost vystřelených broků 0,030 kg a velikost rychlosti broků 400 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete velikost rychlosti člunu po výstřelu, jestliže vystřelil šikmo vzhůru pod úhlem svírajícím s hladinou rybníka 30°.



Řešení:

Zvolme soustavu souřadnic podle obrázku, označme indexem 1 parametry střely a indexem 2 parametry loďky s lovcem a se zbraní. Podle ZZH je hybnost soustavy před výstřelem i po výstřelu stejná a je rovna nulovému vektoru:

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}, \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_1.$$

Tělesa si tak akcí a reakcí udělila hybnosti stejné velikosti a navzájem opačného směru. Střela se pohybuje šikmo vzhůru, člun s lovcem a se zbraní šikmo dolů – to však vypadá na rozpor s naší zkušeností. Víme přece, že člun se bude pohybovat pouze vodorovně po hladině. Zdánlivý rozpor vysvětlíme tím, že proti pohybu člunu svisle dolů působí při ponořování vztlaková síla, která svislý pohyb zastaví, člun se ve svislém směru rozkmitá a vlivem třecích sil kmity ustanou. Svislá složka hybnosti člunu zdánlivě zanikne, ve skutečnosti se zachová v soustavě se Zemí. Člun se tak bude pohybovat pouze ve vodorovném směru s celkovou hybností o velikosti $p_2 = |p_{x2}|$. Pro x-ové souřadnice hybnosti platí:

$$p_{x1} = p_1 \cos\alpha = m_1 v_1 \cos\alpha, \quad p_{x2} = m_2 v_{x2}, \quad p_{x2} = -p_{x1}.$$

Z rovnic dostaneme

$$v_{x2} = -\frac{m_1 v_1 \cos\alpha}{m_2} = -\frac{0{,}03 \cdot 400 \cdot \cos 30^\circ}{120}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = -0{,}087\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Velikost rychlosti člunu je $v_2 = |v_{x2}| = 0{,}087\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2 Dokonale pružný ráz

Ve všech předchozích příkladech se buď dvě tělesa srazila a vytvořila jedno těleso, nebo naopak se jedno těleso rozdělilo na dvě části, které se pak pohybovaly samostatně. Z hlediska fyzikálního popisu jsou oba děje ekvivalentní, neboť pokud např. druhý děj, tj. odstrčení či odmrštění těles, nafilmujeme a takto natočený děj promítneme pozpátku, dostaneme první děj, tj. srážku dvou těles, která zůstanou u sebe. Všechny dosavadní děje lze tak zahrnout pod pojem **dokonale nepružný ráz**. Tělesa tvořila izolovanou soustavu, kdy z vnějšku žádné další těleso na soustavu nepůsobilo, naopak jediné působení bylo mezi tělesy soustavy navzájem. Celková hybnost soustavy se během proběhnutí děje nezměnila. Energie soustavy se odstrčením zvětšila o práci vykonanou akcí a reakcí, srážkou se zmenšila o práci spotřebovanou akcí a reakcí (obvykle se přeměnila na vnitřní energii). Mechanická energie soustavy se tím změnila, celková energie soustavy se však zachovala.

Existují však děje, kdy se při srážce těles v izolované soustavě zachová hybnost i mechanická energie. Takový děj se nazývá **dokonale pružný ráz** a budeme se jím zabývat v následujících příkladech.

Obecně však srážka bývá "různě pružná", na vnitřní energii se přemění menší či větší část mechanické energie. Tento obecný případ se nazývá **nedokonale pružný ráz** a zabývat se jím budeme v 3. kapitole. Dokonale nepružný a dokonale pružný ráz jsou vlastně jeho krajní případy. Při dokonale pružném rázu se od sebe tělesa odrazí nejpružněji, jak je to jen možné – mechanická energie se zcela zachová. U dokonale nepružného rázu se tělesa od sebe vůbec neodrazí a zůstanou u sebe – na vnitřní energii se přemění za daných podmínek maximální možná část mechanické energie.

Jednotlivé druhy rázů si můžeme představit při dopadu různých těles tvaru koule na tvrdou podlahu. Dopad kuličky vymodelované z plastelíny je dokonale nepružný, kulička se vůbec neodrazí. Pružný míček zvaný hopík se naopak odrazí tak, že vystoupá téměř do původní výšky - odraz se blíží k dokonale pružnému. Tenisový, basketbalový, volejbalový či fotbalový míč se odrazí obecně různě a jsou příkladem nedokonale pružného rázu.

Příklad 8:
Vagón o hmotnosti $m_1 = 20$ t se pohybuje přímočarým pohybem po vodorovných kolejích rychlostí o velikosti $v_1 = 4{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a narazí do stojícího vagónu o hmotnosti $m_2 = 30$ t. Při srážce se vagóny dokonale pružně odrazí. Určete rychlost (tj. směr rychlosti a velikost rychlosti) každého vagónu.

Řešení:
Označme rychlosti každého vagónu po srážce $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$. Jelikož při nárazu musíme připustit v přímce oba možné směry pohybu, budeme pod označením u_1 a u_2 chápat přímo souřadnice hledaných rychlostí. Aby úloha byla jednoznačně

řešitelná, musíme pro tyto dvě neznámé souřadnice rychlostí napsat dvě rovnice. Tentokrát kromě zákona zachování hybnosti je splněn i zákon zachování mechanické energie. Pro hybnost platí

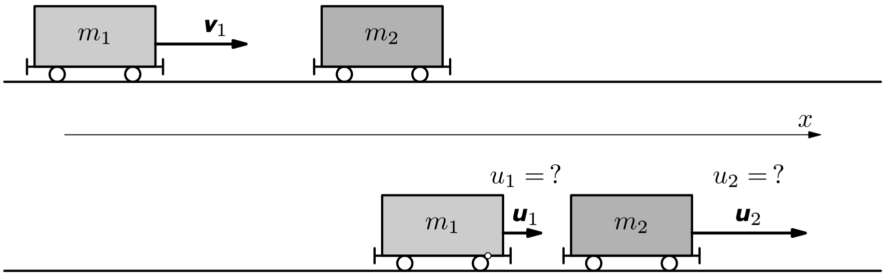
$$m_1\boldsymbol{v}_1 = m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2.$$

kde vektory rychlostí leží v přímce, tedy pro jejich souřadnice dostaneme

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \tag{7}$$

Pro kinetickou energii platí

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2. \tag{8}$$



Z rovnic (7) a (8) vyjádříme poměr hmotností

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1 - u_1}{u_2} = \frac{v_1^2 - u_1^2}{u_2^2}.$$

Z rovnosti druhého a třetího výrazu plyne

$$u_2 = v_1 + u_1.$$

Dosazením do rovnice (7) a dalšími úpravami nakonec dostaneme

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1, \qquad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1.$$

Číselně vychází

$$u_1 = -\frac{1}{5}v_1 = -0{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \quad u_2 = \frac{4}{5}v_1 = 3{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

tedy najíždějící vagón se bude po srážce pohybovat rychlostí o velikosti 0,8 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ v opačném směru a stojící vagón se uvede do pohybu rychlostí o velikosti 3,2 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ve směru pohybu prvního vagónu.

Právě uvedený příklad je modelový příklad **dokonale pružného rázu**, kdy těleso o hmotnosti m_1 pohybující se rychlostí o souřadnici v_1 narazí na těleso o hmotnosti m_2, které je v klidu. Souřadnice rychlostí u_1, u_2 každého tělesa po rázu jsou na základě předchozího příkladu dány rovnicemi:

$$\boxed{u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1} \qquad \boxed{u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1} \qquad (9),(10)$$

Proveďme rozbor možných výsledků z hlediska hmotností těles:

1) Jestliže $m_1 = m_2$, pak $u_1 = 0$, $u_2 = v_1$, tedy první těleso se zastavilo a druhé „převzalo“ jeho rychlost.

2) Jestliže $m_1 > m_2$, pak $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $u_1 < u_2$, tedy obě tělesa pokračují v pohybu ve směru pohybu prvního tělesa a vzájemně se vzdalují. Pokud navíc $m_1 \gg m_2$, neboli hmotnost m_2 je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti m_1, pak vychází $u_1 \to v_1$, $u_2 \to 2v_1$, tedy první těleso rychlost téměř nezmění, druhé se uvede do pohybu téměř s dvojnásobnou rychlostí prvního tělesa před rázem.

3) Jestliže $m_1 < m_2$, pak $u_1 < 0$, $u_2 > 0$, tedy první těleso změnilo směr pohybu na opačný a druhé se pohybuje ve směru pohybu prvního tělesa. Pokud navíc $m_1 \ll m_2$, neboli hmotnost m_1 je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti m_2, pak vychází $u_1 \to -v_1$, $u_2 \to 0$. Jde o dokonale pružný odraz od mnohonásobně hmotnějšího tělesa (v limitním případě má těleso zanedbatelné hmotnosti před odrazem souřadnici rychlosti v_1 a po odraze $-v_1$).

Dále např. při volbě $m_2 = 3m_1$ dostaneme $u_1 = -\frac{1}{2} \cdot v_1$, $u_2 = \frac{1}{2} \cdot v_1$.

V dalším příkladu vyřešíme dokonale pružný ráz dvou těles, která se obě pohybují.

Příklad 9:

Vagón o hmotnosti $m_1 = 25$ t se pohybuje přímočarým pohybem po vodorovných kolejích rychlostí o velikosti 2,8 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a narazí do vagónu o hmotnosti $m_2 = 45$ t, který jede v témže směru rychlostí o velikosti 2,1 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Po srážce se vagóny dokonale pružně odrazí.

a) Určete rychlost (tj. směr rychlosti a velikost rychlosti) každého vagónu po srážce.

b) Porovnejte velikosti vzájemné rychlosti před srážkou a po srážce.

Řešení:

a) Označme rychlosti každého vagónu před srážkou $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, po srážce $\boldsymbol{u}_1$ $\boldsymbol{u}_2$. Pod označením v_1, v_2, u_1, u_2 budeme opět chápat přímo souřadnice rychlostí, tedy při volbě kladného směru pohybu prvního vagónu je $v_1 = 2{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 2{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pro hybnost platí:

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2.$$

pro souřadnice hybnosti dostaneme

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \tag{11}$$

Pro kinetickou energii platí

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2. \tag{12}$$

Z rovnic (11) a (12) vyjádříme poměr hmotností

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1 - u_1}{u_2 - v_2} = \frac{v_1^2 - u_1^2}{u_2^2 - v_2^2}.$$

Z rovnosti druhého a třetího výrazu plyne

$$u_2 + v_2 = v_1 + u_1. \tag{13}$$

Vyjádříme-li u_2 a dosadíme do rovnice (11), dostaneme souřadnici rychlosti prvního vagónu:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2. \tag{14}$$

Obdobně vyjádřením u_1 z rovnice (13) a dosazením do rovnice (11) dostaneme souřadnici rychlosti druhého vagónu:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2. \tag{15}$$

Řešení můžeme též provést pomocí skládání rychlostí. Zvolme soustavu pevně spojenou např. s druhým vagónem, pak každá souřadnice rychlosti je zmenšena o souřadnici v_2:

$$v_1' = v_1 - v_2, \quad v_2' = v_2 - v_2 = 0, \quad u_1' = u_1 - v_2, \quad u_2' = u_2 - v_2.$$

V této soustavě pak platí rovnice (9) a (10) ve tvaru

$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1', \qquad u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1'.$$

Dosazením dostaneme

$$u_1 = u_1' + v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1' + v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) + v_2,$$

$$u_2 = u_2' + v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1' + v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) + v_2.$$

Po úpravě dostaneme obecné řešení dané opět rovnicemi (14) a (15). Číselně vychází

$$u_1 = -\frac{2}{7} \cdot v_1 + \frac{9}{7} \cdot v_2 = 1{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \qquad u_2 = \frac{5}{7} \cdot v_1 + \frac{2}{7} \cdot v_2 = 2{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tedy každý z vagónů směr svého pohybu zachová, pojedou opět v původních směrech, první rychlostí o velikosti 1,9 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a druhý rychlostí o velikosti 2,6 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) Úpravou rovnice (13) dostaneme

$$u_2 - u_1 = -(v_2 - v_1),$$

tedy vzájemná rychlost vagónů před srážkou a po srážce má stejnou velikost a opačný směr. V našem případě se před srážkou druhý vagón pohyboval vzhledem k prvnímu vagónu (přibližoval se) rychlostí o souřadnici

$$v_2 - v_1 = 2{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} - 2{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = -0{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

po srážce se druhý vagón pohyboval vzhledem k prvnímu (vzdaloval se) rychlostí o souřadnici

$$u_2 - u_1 = 2{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} - 1{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

V uvedeném příkladu jsme odvodili vzorce pro **dokonale pružný ráz** dvou pohybujících se těles. Srazí-li se těleso o hmotnosti m_1 pohybující se rychlostí o souřadnici v_1 s tělesem o hmotnosti m_2 pohybujícím se rychlostí o souřadnici v_2, jsou souřadnice rychlostí u_1, u_2 každého tělesa po rázu na základě předchozího příkladu dány rovnicemi:

$$\boxed{u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2} \qquad \boxed{u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2}$$

Současně mezi souřadnicemi rychlostí před rázem a po rázu platí vztah

$$\boxed{u_2 - u_1 = v_1 - v_2} \tag{16}$$

který, jak plyne z odvození rovnice (13), je při automatické platnosti zákona zachování hybnosti ekvivalentní se zákonem zachování mechanické energie.

Podívejme se na některé vlastnosti a zvláštní případy:

1) Je-li jedno z těles před rázem v klidu, pak zpětným dosazením $v_2 = 0$ do (14) a (15) dostaneme rovnice (9) a (10).

2) Při stejných hmotnostech těles, tj. dosazením $m_1 = m_2$ do (14) a (15) dostaneme $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$, tedy tělesa si vzájemně vymění souřadnice rychlosti.

3) Má-li jedno z pohybujících se těles zanedbatelnou hmotnost vzhledem k druhému tělesu, zvolme např. $m_1 \ll m_2$, pak dosazením $m_1 = 0$ do (14) a (15) dostaneme limitní souřadnice rychlostí

$$u_1 = \frac{-\,m_2}{m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_2} \cdot v_2 = -v_1 + 2v_2, \tag{17}$$

$$u_2 = \frac{2 \cdot 0}{m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2}{m_2} \cdot v_2 = v_2, \tag{18}$$

Příklad 10:

Chlapec stojící těsně u kolejí hodil hopík proti jedoucímu vagónu tak, že na přední stěnu vagónu dopadl kolmo rychlostí o velikosti $10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ vzhledem k zemi a dokonale pružně se odrazil do protisměru. Velikost rychlosti vagónu je $25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ vzhledem k zemi. Hmotnost hopíku je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti vagónu.

a) Určete velikost výsledné rychlosti hopíku vzhledem k zemi. Řešte z hlediska soustavy 1. pevně spojené se zemí, 2. pevně spojené s vagónem.

b) Určete poměr kinetických energií míčku po nárazu a před nárazem.

Řešení:

a) 1. Zvolíme-li v soustavě spojené se zemí směr pohybu vagónu jako kladný, pak souřadnice rychlosti míčku je $v_1 = -10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a souřadnice rychlosti vagónu $v_2 = 25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Podle vzorců (17) a (18) je po odrazu souřadnice rychlosti vagónu $u_2 = v_2$, tedy zůstává stejná, zatímco souřadnice rychlosti míčku je $u_1 = -v_1 + 2v_2 = 60\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2. Z hlediska cestujícího ve vagónu se náraz jeví tak, že přilétající míček se dokonale pružně odrazí do protisměru, tedy rychlostí stejné velikosti. Při stejné volbě kladného směru pohybu platí $v_1' = 35\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2' = 0$. Po odrazu do protisměru je $u_1' = 35\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $u_2' = 0$. Složením pohybu vagónu a míčku po odrazu dostaneme souřadnici rychlosti míčku vzhledem k zemi $u_1 = v_2 + u_1' = 60\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

b) Označíme-li m hmotnost míčku, pak jeho kinetická energie před nárazem je $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_1^2$ a po nárazu $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mu_1^2$. Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{u_1^2}{v_1^2} = 36.$$

Příklad 11:

Kosmická sonda Voyager 2 o hmotnosti m se při přibližování k planetě Jupiter pohybovala rychlostí o velikosti $v = 12\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$ vzhledem ke vztažné soustavě spojené se Sluncem ve směru svírajícícím se směrem rychlosti planety úhel $\alpha \doteq 45^\circ$ (stav ve vzdálenosti zhruba $4\cdot 10^6$ km od Jupiteru). Působením gravitačního pole planety se směr pohybu sondy změnil přibližně na směr shodný se směrem pohybu planety. Velikost rychlosti Jupitera vzhledem ke vztažné soustavě spojené se Sluncem je v_j, pro jeho hmotnost M platí $M \gg m$.

a) Určete velikost u výsledné rychlosti sondy vzhledem ke Slunci při vzdalování ve stejné vzdálenosti od Jupiteru, v jaké jsme pohyb sondy začali sledovat.

b) Určete poměr kinetických energií sondy po manévru a před manévrem. Kde je zdroj přírůstku kinetické energie sondy?

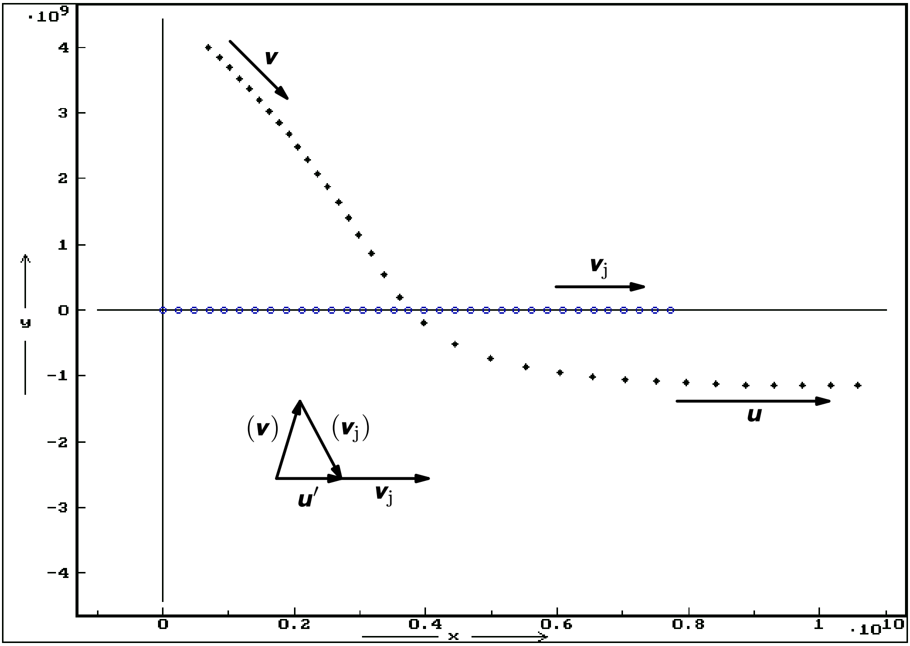
Popsaný manévr se nazývá *gravitační prak* a umožní získat dostatečnou rychlost k tomu, aby se sonda dostala mimo sluneční soustavu. Sonda Voyager 2 byla takto urychlena v roce 1979 a následně podobným způsobem planetou Saturn v roce 1981.

Řešení:

Pro znázornění děje použijeme obrázky získané počítačovou simulací pomocí programu Famulus. Souřadnice x, y jsou uvedeny v metrech, polohy sondy a Jupiteru jsou zobrazeny v časových intervalech 18 000 s = 5 h.

a) Zvolme soustavu souřadnic pevně spojenou se Sluncem tak, že v daném okamžiku má osa x směr totožný se směrem pohybu Jupitera a osa y směřuje ke Slunci (první model). V této soustavě je $\alpha = -45°$ (rychlost sondy směřuje do 4. kvadrantu) a platí

$$v_x = v\cos(-45°) = 8{,}5\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}, \quad v_y = v\sin(-45°) = -8{,}5\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$



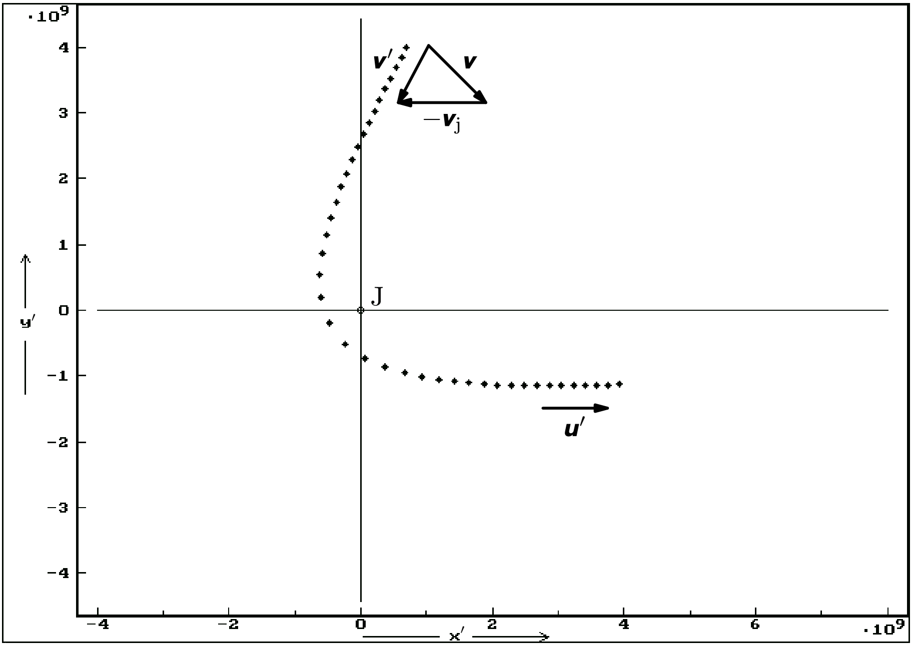
Ve vztažné soustavě pevně spojené s Jupiterem zvolíme osy x', y' rovnoběžné s osami x a y (druhý model). V této soustavě dostaneme souřadnice rychlosti přibližující se sondy

$$v'_x = v_x - v_\mathrm{j} = (8{,}5 - 13)\ \mathrm{km\cdot s^{-1}} = -4{,}5\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}, \quad v'_y = v_y = -8{,}5\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

Její velikost je

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{(-4{,}5)^2 + (-8{,}5)^2}\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 9{,}6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Jupiter svým gravitačním polem změní směr rychlosti sondy přibližně do směru svého pohybu tak, že po manévru má ve stejné vzdálenosti stejnou velikost $u' = v' = 9{,}6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.



Ve vztažné soustavě spojené se Sluncem (vrátíme se k prvnímu modelu) pak je

$$u = u' + v_\mathrm{j} = (9{,}6 + 13)\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 22{,}6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

b) Kinetická energie sondy před manévrem je $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$, po manévru $E_\mathrm{k}' = \frac{1}{2}mu^2$. Po dosazení a úpravě dostaneme $\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{u^2}{v^2} = 3{,}5$. Jelikož mechanická energie soustavy se během děje nezměnila, musí být přírůstek kinetické energie sondy roven úbytku kinetické energie Jupitera.

3 Nedokonale pružný ráz

V předchozích dvou kapitolách jsme rozebrali dva krajní případy rázu těles. Při dokonale pružném rázu velikost vzájemné rychlosti těles po rázu zůstala stejná jako před rázem:

$$u_2 - u_1 = v_1 - v_2.$$

kde u_1, u_2, v_1, v_2 jsou souřadnice rychlostí. Při dokonale nepružném rázu byla velikost vzájemné rychlosti po rázu nulová, neboť se obě tělesa dále pohybovala společně.

Při nedokonale pružném rázu se velikost vzájemné rychlosti po rázu zmenší, což vyjádříme rovnicí

$$u_2 - u_1 = k(v_1 - v_2). \tag{19}$$

kde konstanta k splňuje nerovnici $0 < k < 1$ a nazývá se **koeficient restituce** Současně platí ZZH:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \tag{20}$$

Řešením soustavy rovnic (19) a (20) s neznámými u_1 a u_2 dostaneme

$$\boxed{u_1 = \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{(1+k)m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2} \tag{21}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{(1+k)m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2} \tag{22}$$

Ověříme ještě zmíněné krajní případy nedokonale pružného rázu:

1) Volbou k = 0 dostaneme rovnici (4′) pro dokonale nepružný ráz.

2) Volbou k = 1 dostaneme rovnice (14) a (15) pro dokonale pružný ráz.

Hodnoty koeficientu restituce závisí především na materiálu, částečně též na tvaru těles a dalších parametrech. Např. v [2] se pro tělesa tvaru koule uvádí: tvrzená ocel (ložiskové kuličky) 0,98, slonovina (dříve kulečníkové koule) 0,82, litina 0,68, jilmové dřevo 0,60, olovo 0,20.

Příklad 12:

Vagón o hmotnosti $m_1 = 25$ t se pohybuje přímočarým pohybem po vodorovných kolejích rychlostí o velikosti 2,8 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a srazí se s vagónem o hmotnosti $m_2 = 45$ t, který jede v témže směru rychlostí o velikosti 2,1 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Srážka je nedokonale pružná s koeficientem restituce $k = 0{,}8$. Určete rychlost (tj. směr rychlosti a velikost rychlosti) každého vagónu po srážce. Výsledek porovnejte s výsledkem příkladu 9, kde tato srážka byla dokonale pružná.

Řešení:
Při volbě souřadnicové osy ve směru pohybu obou vagónů dosazením do rovnic (21) a (22) dostaneme

$$u_1 = \left(\frac{25 - 0{,}8 \cdot 45}{25 + 45} \cdot 2{,}8 + \frac{1{,}8 \cdot 45}{25 + 45} \cdot 2{,}1\right)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 1{,}99\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

$$u_2 = \left(\frac{1{,}8 \cdot 25}{25 + 45} \cdot 2{,}8 + \frac{45 - 0{,}8 \cdot 25}{25 + 45} \cdot 2{,}1\right)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2{,}55\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

U každého vagónu došlo k menší změně rychlosti než při dokonale pružné srážce, první vagón se méně zpomalil, druhý se méně urychlil. Současně je vidět, že velikost vzájemné rychlosti tvoří 0,8 násobek velikosti vzájemné rychlosti po dokonale pružné srážce těchto vagónů.

Zvláštní případ nedokonale pružného rázu nastane, narazí-li letící koule na kouli o stejné hmotnosti v klidu. Dosazením $m = m_1 = m_2$ a $v_2 = 0$ do rovnic (21) a (22) dostaneme:

$$u_1 = \frac{1-k}{2} v_1, \qquad u_2 = \frac{1+k}{2} v_1. \tag{23}$$

Příklad 13:
Na rázostroji jsou zavěšeny dvě koule o stejné hmotnosti. Po vychýlení a uvolnění jedné koule se uvede do pohybu tak, že do druhé koule v klidu narazí rychlostí o velikosti v_1. Koeficient restituce $k = 0{,}60$.

a) Určete rychlost koulí po srážce a ověřte rovnici (19).

b) Určete, jaká část mechanické energie se přeměnila na vnitřní energii.

Řešení
a) Dosazením do vztahů (23) dostaneme $u_1 = 0{,}2 v_1$ a $u_2 = 0{,}8 v_1$. Koule se pohybují ve směru pohybu první koule před srážkou, velikost vzájemné rychlosti koulí po srážce je $u_2 - u_1 = 0{,}6 v_1$.

b) Nejprve vyjádříme poměr nepřeměněné mechanické energie po srážce a mechanické energie před srážkou, přitom opět využijeme vztahy (23):

$$\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} m u_2^2}{\frac{1}{2} m v_1^2} = \frac{u_1^2 + u_2^2}{v_1^2} = \frac{\left(\frac{1-k}{2}\right)^2 v_1^2 + \left(\frac{1+k}{2}\right)^2 v_1^2}{v_1^2} =$$

$$= \frac{(1-k)^2 + (1+k)^2}{4} = \frac{1+k^2}{2}.$$

Poměr přeměněné mechanické energie po srážce a mechanické energie před srážkou je

$$\frac{\Delta U}{E_\mathrm{k}} = \frac{E_\mathrm{k} - E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = 1 - \frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = 1 - \frac{1+k^2}{2} = \frac{1-k^2}{2} = 0{,}32.$$

4 Úlohy

Úloha 1: Na hladině rybníka jsou vedle sebe dva vory, na jednom stojí chlapec s tyčí. Hmotnost prázdného voru je m, hmotnost voru s chlapcem je $2m$. Chlapec se tyčí opře o prázdný vor a odstrčí jej. Určete poměr velikostí rychlostí, poměr velikostí hybností a poměr kinetických energií prázdného a obsazeného voru bezprostředně po odstrčení.

Úloha 2: Každý ze dvou vagónů má hmotnost $m_0 = 25$ t, jeden je prázdný, druhý naložený. Prázdný vagón stojí na kolejích, plný vagón se k němu blíží rychlostí o velikosti $v = 3{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Po srážce se automaticky spojí a pokračují v jízdě společně rychlostí o velikosti $u = 2{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete hmotnost m nákladu. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Úloha 3: Vlaštovka o hmotnosti 0,1 kg letí rychlostí $20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Porovnejte následek „srážky“ vlaštovky s potravou (mouchou) o hmotnosti 0,2 g v klidu s následkem srážky s člověkem o hmotnosti 50 kg v klidu. Obě srážky považujte za dokonale nepružné. Využijte přímo obecně řešení příkladu 1.

Úloha 4: (FO51D-II-3) [1] Po přímých vodorovných kolejích jedou proti sobě dva vagóny. První má hmotnost m a velikost rychlosti v, druhý má hmotnost 3krát větší a velikost rychlosti 2krát menší než první vagón. Po srážce se vagóny automaticky spojí.

a) Určete, který z vagónů má před srážkou větší kinetickou energii a kolikrát.
b) Určete směr pohybu vagónů po srážce.
c) Určete velikost u rychlosti soupravy po srážce.
d) Vyjádřete zlomkem, jaká část původní kinetické energie obou vagónů se srážkou přemění na vnitřní energii.

Úloha 5 (FO49D-II-3): Dva chlapci stojí proti sobě na svých skateboardech. Jeden z nich drží v rukou medicinbal o hmotnosti m a vrhne jej vodorovným směrem do náruče druhého rychlostí o velikosti v vzhledem k zemi. Hmotnost každého chlapce se skateboardem je m_0.

a) Určete velikosti v_1 a v_2 rychlostí vzhledem k zemi, které získá každý z chlapců.
b) Určete práci, kterou první chlapec hozením medicinbalu vykoná.
c) Určete, jaká část této práce se zachová ve formě kinetické energie, tj. poměr konečné kinetické energie soustavy všech těles a práce vykonané prvním chlapcem.

[1] Podrobné řešení úloh 4, 5, 7 a 9 lze nalézt v archivu úloh na stránkách FO www.fyzikalniolympiada.cz

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m_0 = 60$ kg, $m = 4{,}0$ kg, $v = 2{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Úloha 6: Granát o hmotnosti $m = 1{,}10$ kg vržený svisle vzhůru se v nejvyšším bodě trajektorie výbuchem roztrhl na tři části. První část o hmotnosti $m_1 = 0{,}20$ kg získala rychlost o velikosti $v_1 = 60\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, druhá část o hmotnosti $m_2 = 0{,}4$ kg se v kolmém směru pohybovala rychlostí o velikosti $v_2 = 40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Určete velikost v_3 rychlosti třetí části granátu a směr jejího pohybu. Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

b) Která část granátu měla největší kinetickou energii?

Úloha 7 (FO42D-I-7-část): Družice se skládá z vlastní družice o hmotnosti $m_1 = 50$ kg a ochranného štítu o hmotnosti $m_2 = 10$ kg. Štít se odhazuje dopředu ve směru pohybu uvolněním stlačených pružin. Při pozemních zkouškách upevněné družice pružiny udělily štítu rychlost o velikosti $v_0 = 6{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete velikost w vzájemné rychlosti družice a štítu bezprostředně po oddělení na oběžné dráze. Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

Úloha 8: Fotbalový brankář o hmotnosti 67 kg byl zasažen míčem o hmotnosti 0,5 kg letícím rychlostí o velikosti $v = 19\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ v okamžiku, kdy se nacházel ve výskoku.

a) Brankář míč zachytil. Určete velikost rychlosti brankáře bezprostředně po zachycení míče.

b) Míč se po dokonale pružné srážce odrazil zpět. Určete velikost rychlosti pohybu brankáře a velikost rychlosti pohybu míče bezprostředně po odrazu.

Velikost rychlosti nejprve vždy vyjádřete jako násobek velikosti v rychlosti, poté číselně v jednotce rychlosti. Předpokládejme, že míč směřoval do oblasti těžiště brankáře, to znamená, že zásah způsobil pouze posuvný pohyb brankáře, nikoliv rotační.

Úloha 9 (FO37-D-I-5): Po kolejích se pohybuje setrvačností lokomotiva rychlostí o velikosti $v = 2{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Na koleji stojí osamělý vagón a souprava tří navzájem spojených vagónů. Hmotnost každého vagónu je m, hmotnost lokomotivy $6m$. Lokomotiva narazí do osamělého vagónu a automaticky se s ním spojí. Pak tato souprava narazí do soustavy tří vagónů.

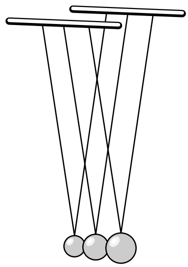
a) Také druhé spojení proběhne automaticky. Určete rychlosti před rázem a po rázu.

b) Druhé spojení nenastane a obě soupravy se rozjedou. Určete velikosti rychlostí a směr pohybu souprav po rázu. Ráz považujte za dokonale pružný.

Úloha 10: Částice alfa (jádro helia) se pohybuje přímočaře ve vakuu rychlostí $2 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a narazí na proton, který se nachází v klidu na trajektorii částice alfa. Hmotnost částice alfa je přibližně 4krát větší než hmotnost protonu. Srážku lze, na rozdíl od vagónů, považovat přesně za dokonale pružnou, neboť částice se během přiblížení odpuzují elektrickou silou a vzájemně se nedotknou.

a) Určete konečné rychlosti obou částic.
b) Určete, kolik procent kinetické energie převzal proton od částice alfa.

Úloha 11: Rázostroj tvoří soustava tří dokonale pružných vzájemně se dotýkajících kuliček o hmotnostech m, $2m$, $3m$ zavěšených na bifilárních vláknech. Těžiště všech kuliček leží na vodorovné přímce. Jednu z krajních kuliček vychýlíme a uvolníme, čímž bezprostředně před rázem získá rychlost o velikosti v. Určete velikost u rychlosti druhé krajní kuličky bezprostředně po uvedení do pohybu a poměr kinetické energie přenesené na tuto kuličku a původní kinetické energie první kuličky. Rozlište případy, kdy vychýlíme krajní kuličku o hmotnosti a) m, b) $3m$. Využijte vzorce odvozené pro dokonale pružný ráz.



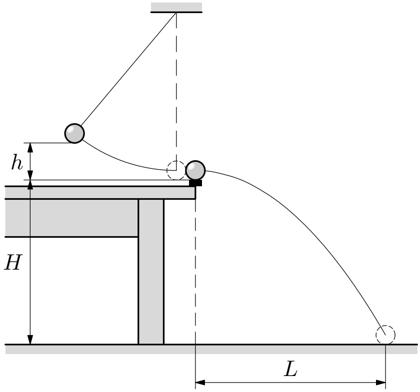
Úloha 12: Řešte příklad 9 na str. 17 pro vagóny jedoucí navzájem opačným směrem.

Úloha 13: Na hopík o hmotnosti m_1 ve výšce h_0 nad podlahou položíme hopík o hmotnosti m_2, přičemž $m_2 < m_1$, a soustavu přidržujeme. Po uvolnění oba míčky umístěné nad sebou padají. Spodní hopík se dokonale pružně odrazí od podlahy a okamžitě dokonale pružně narazí do horního hopíku.

a) Při jakém poměru $m_1 : m_2$ hmotností se dolní hopík po srážce s horním hopíkem zastaví?
b) Do jaké výšky h pak vystoupá horní hopík?

Úloha 14: Řešte příklad 12 na s. 23 pro vagóny jedoucí navzájem opačným směrem.

Úloha 15: Kulička zavěšená na tenkém vlákně se dotýká druhé kuličky stejné hmotnosti položené na kraji stolu ve výšce H nad podlahou. První kuličku vychýlíme při napnutém vlákně tak, že její výška nad stolem bude h, a uvolníme. Při dosažení nejnižší polohy narazí do druhé kuličky.



a) Určete vzdálenost L místa dopadu od okraje stolu při dokonale pružném rázu.

b) Určete vzdálenost L_k místa dopadu od okraje stolu při nedokonale pružném rázu s koeficientem restituce k. Výsledek též vyjádřete ve tvaru násobku délky L z úlohy a).

Výsledky

Problémové intermezzo:

1) Kinetická energie střely: $W = E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}000\,54 \cdot 170^2\ \mathrm{J} = 7{,}8\ \mathrm{J}$, velikost rychlosti zpětného pohybu vzduchovky: $v_2 = \dfrac{m_1}{m_2} v_1 = 0{,}030\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, kinetická energie vzduchovky: $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2} \cdot 3{,}1 \cdot 0{,}030^2\ \mathrm{J} = 0{,}0014\ \mathrm{J}$ je zanedbatelná vzhledem ke kinetické energii střely.

2) Alešova loďka se uvedla do pohybu rychlostí o velikosti $v_1 = \dfrac{m_2}{m_1} v_2$. Aleš vykonal práci

$$W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} v_2\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 52\ \mathrm{J}.$$

Poměr kinetických energií loděk je

$$\frac{E_\mathrm{k2}}{E_\mathrm{k1}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} v_2\right)^2} = \frac{m_1}{m_2} = 1{,}6.$$

3) Země má mnohonásobně větší hmotnost než běžné těleso. Označme M hmotnost Země, v_z velikost její rychlosti v okamžiku, kdy padající těleso o hmotnosti m má velikost rychlosti v. Pak z rovnic $mv = M v_\mathrm{z}$, $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2} m v^2$, $E_\mathrm{kz} = \dfrac{1}{2} M v_\mathrm{z}^2$ dostaneme stejně jako v úloze s loďkami obecné řešení

$$\frac{E_\mathrm{kz}}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2} M v_\mathrm{z}^2}{\frac{1}{2} m v^2} = \frac{M v_\mathrm{z}^2}{m \left(\frac{M}{m} v_\mathrm{z}\right)^2} = \frac{m}{M}.$$

Z výsledku plyne, že kinetická energie Země je naprosto zanedbatelná vzhledem ke kinetické energii tělesa. Např. pro padající těleso o hmotnosti 6 kg je tento poměr $1 : 10^{24}$.

Ú1: Poměr velikostí rychlostí 2:1, poměr velikostí hybností 1:1, poměr kinetických energií 2:1.

Ú2: $m = \dfrac{2u - v}{v - u} m_0 = 1{,}4 m_0 = 35\ \mathrm{t}$.

Ú3: V případě srážky s mouchou se tak přemění energie (hmotnosti dosazeny v gramech)

$$\Delta U = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_\mathrm{k} = \frac{0{,}2}{100 + 0{,}2} E_\mathrm{k} = \frac{2}{1\,002} E_\mathrm{k} = 0{,}002 E_\mathrm{k} = 0{,}04\ \mathrm{J}.$$

V případě nárazu vlaštovky do člověka se přemění energie

$$\Delta U = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_\mathrm{k} = \frac{50}{0{,}1 + 50} E_\mathrm{k} = \frac{1000}{1\,002} E_\mathrm{k} = 0{,}998 E_\mathrm{k} = 19{,}96\ \mathrm{J}.$$

Zatímco první srážka je pro vlaštovku přijatelná a příjemná (je odměněna ulovenou potravou), druhá srážka je pro ni naopak velmi nebezpečná.

Ú4:

a) $\dfrac{E_{\mathrm{k1}}}{E_{\mathrm{k2}}} = \dfrac{\frac{1}{2} m v^2}{\frac{1}{2} \cdot 3m \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{3}$, první vagón má $\dfrac{4}{3}$ krát větší kinetickou energii.

b) $p_1 = mv$, $p_2 = 3m \cdot \dfrac{v}{2} = \dfrac{3}{2} mv$ ve směru pohybu druhého vagónu – má větší hybnost.

c) $u = \dfrac{1}{8} v$.

d) $\dfrac{E_{\mathrm{k}'}}{E_\mathrm{k}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 4m \cdot \left(\frac{v}{8}\right)^2}{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{28}$. Na vnitřní energii se přemění $\dfrac{27}{28}$ původní kinetické energie.

Ú5:

a) $v_1 = \dfrac{m}{m_0} \cdot v = \dfrac{1}{15} v = 0{,}16\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\quad v_2 = \dfrac{m}{m + m_0} \cdot v = \dfrac{1}{16} v = 0{,}15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) $W = \dfrac{1}{2} m_0 v_1^2 + \dfrac{1}{2} m v^2 = \dfrac{(m + m_0) m}{2 m_0} v^2 = 12{,}3\ \mathrm{J}$.

c) $\dfrac{E_\mathrm{k}}{W} = \dfrac{\frac{1}{2} m_0 v_1^2 + \frac{1}{2} (m + m_0) v_2^2}{\frac{1}{2} m_0 v_1^2 + \frac{1}{2} m v^2} = \dfrac{\frac{(m + 2m_0) m^2}{2 m_0 (m + m_0)} v^2}{\frac{(m + m_0) m}{2 m_0} v^2} = \dfrac{m (m + 2 m_0)}{(m + m_0)^2} =$
$= \dfrac{31}{256} = 0{,}121.$

Ú6:

a) $v_3 = \dfrac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m - m_1 - m_2} = 40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = 0{,}75$, $\alpha = 37^\circ$, tj. směr pohybu třetí části je odchýlen o 127° od směru pohybu druhé části a o 153° od směru pohybu první části granátu.

b) Třetí část: $E_{\mathrm{k3}} = 400\ \mathrm{J}$ ($E_{\mathrm{k1}} = 360\ \mathrm{J}$, $E_{\mathrm{k2}} = 320\ \mathrm{J}$).

Ú7: $w = v_1 + v_2 = \sqrt{\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}} \cdot v_0 = \sqrt{\dfrac{6}{5}} \cdot v_0 = 6{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Ú8:

a) $\dfrac{1}{135}v = 0{,}14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) Velikost rychlosti míče: $\dfrac{133}{135}v = 18{,}72\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,

velikost rychlosti brankáře $\dfrac{2}{135}v = 0{,}28\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Ú9:

a) Po prvním spojení $\dfrac{6}{7}v = 1{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, po druhém $\dfrac{3}{5}v = 1{,}26\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) Lokomotiva s vagónem $\dfrac{12}{35}v = 0{,}72\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,

souprava tří vagónů $\dfrac{6}{5}v = 2{,}52\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Ú10:

a) Částice alfa $1{,}2 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, proton $3{,}2 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, ve stejném směru.

b) 64 %.

Ú11:

a) $u = \dfrac{8}{15}v$, $\dfrac{64}{75}$.

b) $u = \dfrac{8}{5}v$, $\dfrac{64}{75}$.

Ú12: $u_1 = -\dfrac{2}{7} \cdot v_1 + \dfrac{9}{7} \cdot v_2 = -3{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $u_2 = -\dfrac{5}{7} \cdot v_1 + \dfrac{2}{7} \cdot v_2 = 1{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Ú13:

a) $m_1 : m_2 = 3 : 1$,

b) $h = 4h_0$.

Ú14: $u_1 = -2{,}87\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $u_2 = 1{,}05\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $u_2 - u_1 = 3{,}92\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} =$
$= 0{,}8 \cdot 4{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Ú15:

a) $L = 2\sqrt{hH}$,

b) $L_k = (1 + k)\sqrt{hH} = \dfrac{1 + k}{2}L$.

Literatura

[1] Holliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: *Fyzika. Část 1, Mechanika.* ČVUT Brno, 2000.

[2] Horák, Z. – Krupka, F. – Šindelář, V.: *Technická fysika.* SNTL Praha, 1961.

[3] Šedivý, P.: *Modelování fyzikálních dějů numerickými metodami.* (Knihovnička FO č. 38). MAFY Hradec Králové, 2010.

[4] Štoll, M.: *Jan Marek Marci - první český fyzik.* In: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. Ročník 41 (1996), č. 6.

[5] `www.daviddarling.info/images/Pioneer_Voyager_trajectories.jpg`