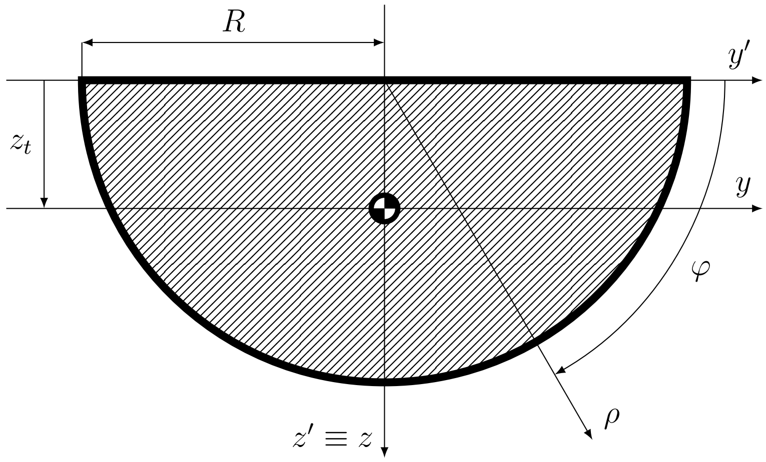
Průřezové charakteristiky

Půlkruhový profil



Pro výpočet hlavního centrálního kvadratického momentu J_y použijeme Steinerovu větu:

$$J_y = J_{y'} - z_t^2 \cdot A \tag{1}$$

kde $A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$ je plocha průřezu a z_t je poloha těžiště; zde budeme symbolem S značit statický moment plochy a A bude plocha průřezu:

$$S = \iint\limits_{(A)} z' \, dA = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{R} (\rho \cdot \sin\varphi) \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \cdot \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2 \cdot R^3}{3} \tag{2}$$

$$z_t = \frac{S}{A} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} \tag{3}$$

Hodnota $J_{y'}$ podle definice:

$$J_{y'} = \iint\limits_{(A)} z'^2 \, dA = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{R} (\rho \cdot \sin\varphi)^2 \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \frac{R^4}{4} \cdot \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$J_{y'} = \frac{\pi \cdot R^4}{8} \tag{4}$$

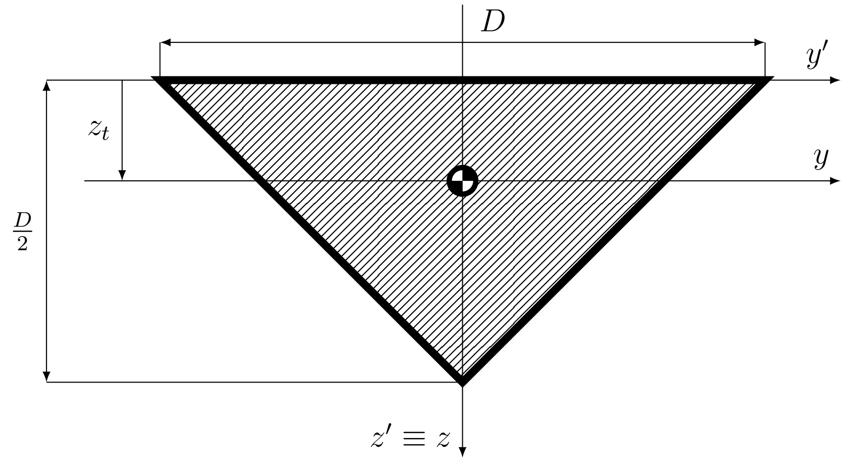
Použitím vztahů (1) až (4) dostaneme:

$$J_y = \frac{9 \cdot \pi^2 - 64}{72} \cdot R^4$$

Pro $J_z = J_{z'}$ pak platí:

$$J_z = \frac{\pi \cdot R^4}{8}$$

Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník



Pro výpočet hlavního centrálního kvadratického momentu J_y použijeme Steinerovu větu:

$$J_y = J_{y'} - z_t^2 \cdot A \tag{1}$$

kde $A = \frac{D^2}{4}$ a $z_t = \frac{D}{6}$.
Pro výpočet $J_{y'}$ použijeme vztah pro výpočet hlavního centrálního kvadratického momentu čtvercového průřezu o straně $a = \frac{D}{\sqrt{2}}$:

$$J_{\square,y} = J_{\square,z} = \frac{a^4}{12} = \frac{D^4}{48}$$

Z rovnosti $J_{\square,y} = J_{\square,z}$ vyplývá nezávislost hodnoty centrálního kvadratického momentu na pootočení os ($D_{xy} \equiv 0$):

$$J_{\square,y} = J_{\square,z} = J_{\diamond,y} = J_{\diamond,z} = \frac{D^4}{48}$$

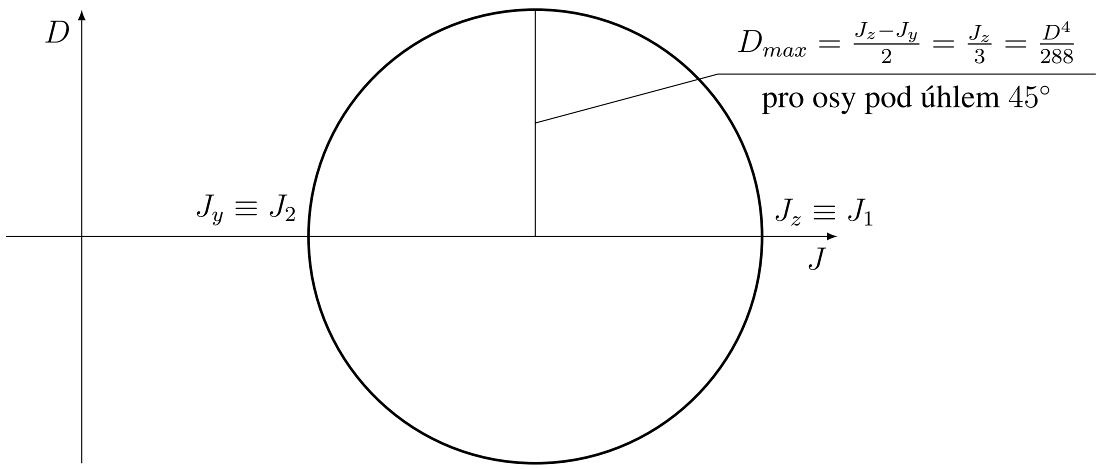
Hodnota $J_{y'}$ zadaného profilu pak je:

$$J_{y'} = J_{z'} = J_z = \frac{D^4}{96}$$

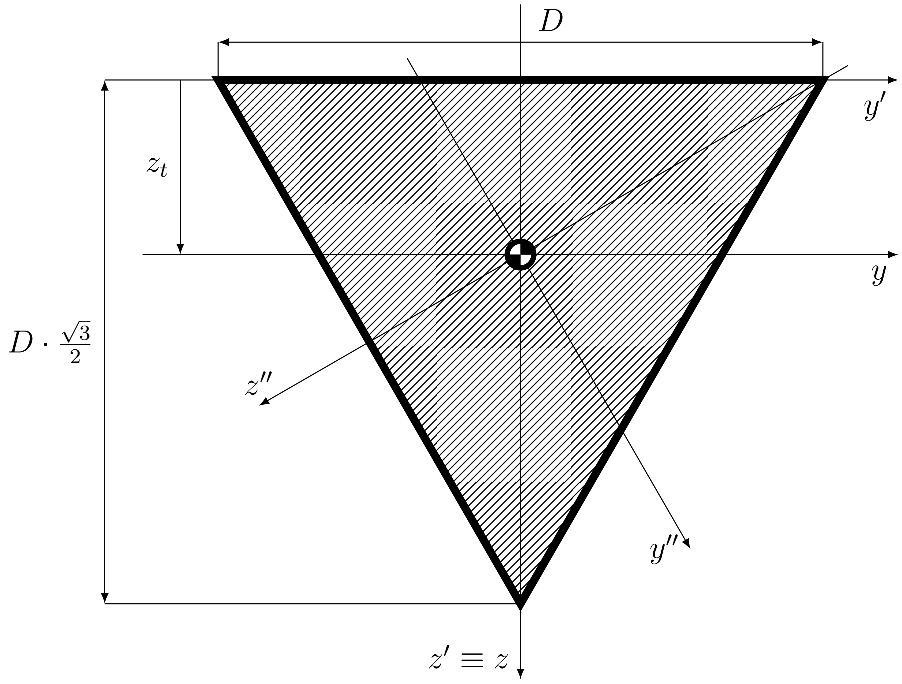
Použitím vztahu (1) pak dostaneme:

$$J_y = \frac{D^4}{288} = \frac{J_z}{3}$$

Cullmanova kružnice



Rovnostranný trojúhelník



Pro výpočet hlavního centrálního kvadratického momentu J_y použijeme Steinerovu větu:

$$J_y = J_{y'} - z_t^2 \cdot A \tag{1}$$

kde $A = D^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ a $z_t = D \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}$.
Z definice:

$$J_{y'} = \int\limits_{(A)} z'^2 \, dA = \int\limits_0^{D\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} z'^2 \cdot \left(D - \frac{2 \cdot z'}{\sqrt{3}} \right) \, dz' = \left[D \cdot \frac{z'^3}{3} - \frac{z'^4}{2\sqrt{3}} \right]_0^{D\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$J_{y'} = \frac{\sqrt{3}}{32} \cdot D^4 \tag{2}$$

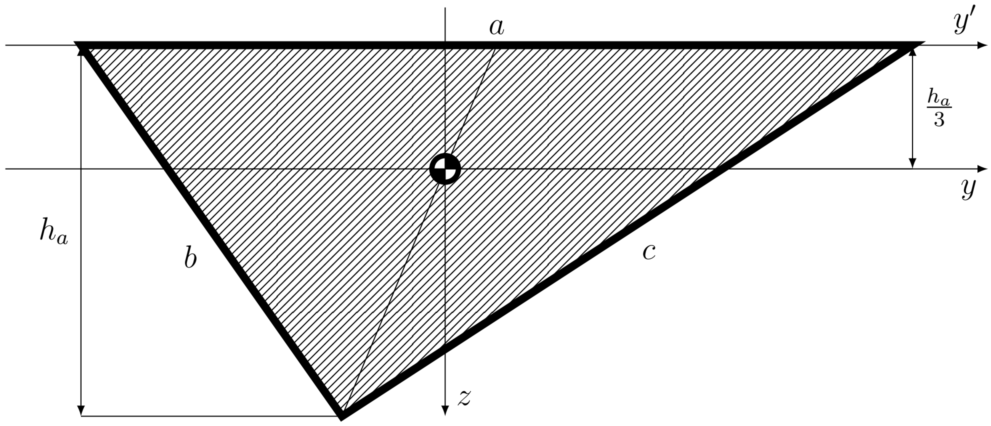
Použitím (2) v (1) dostaneme:

$$J_y = \frac{D^4}{32\sqrt{3}}$$

Stejnou hodnotu bychom dostali k osám $[y'', z'']$, pootočeným o $60°$, z čehož vyplývá, že centrální kvadratický moment tohoto průřezu je konstantní, nezávisí na pootočení os a platí samozřejmě i následující vztahy:

$$J_z = J_y$$
$$D_{yz} \equiv 0$$

Obecný trojúhelník



Pro výpočet centrálního kvadratického (nikoliv však hlavního) momentu J_y použijeme opět Steinerovu větu:

$$J_y = J_{y'} - z_t^2 \cdot A \tag{1}$$

Geometrie trojúhelníku:

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{\sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{a+b-c} \cdot \sqrt{a-b+c} \cdot \sqrt{-a+b+c}}{4} \tag{2}$$

$$h_a = \frac{2 \cdot A}{a} = \frac{\sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{a+b-c} \cdot \sqrt{a-b+c} \cdot \sqrt{-a+b+c}}{2 \cdot a} \tag{3}$$

$$z_t = \frac{h_a}{3} = \frac{2 \cdot A}{3 \cdot a} = \frac{\sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{a+b-c} \cdot \sqrt{a-b+c} \cdot \sqrt{-a+b+c}}{6 \cdot a} \tag{4}$$

Vnitřní úhly v trojúhelníku dostaneme opakovaným použitím kosinové věty:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a^2}{b \cdot c} \right)$$
$$\cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a \cdot c} \right)$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c^2}{a \cdot b} \right)$$

Pro výpočet $J_{y'}$ použijeme definici:

$$J_{y'} = \int\limits_{(A)} y'^2 \, dA = a \cdot \int\limits_0^{h_a} z'^2 \cdot \left(1 - \frac{z'}{h_a} \right) dz = a \cdot \left[\frac{z'^3}{3} - \frac{z'^4}{4 \cdot h_a} \right]_0^{h_a} = \frac{a \cdot h_a^3}{12} = A \cdot \frac{h_a^2}{6} = \frac{2 \cdot A^3}{3 \cdot a^2} \tag{5}$$

S použitím vztahů (1) až (5) dostaneme:

$$J_y = \frac{a \cdot h_a^3}{12} - \frac{a \cdot h_a}{2} \cdot \frac{h_a^2}{9} = \frac{a \cdot h_a^3}{36} = A \cdot \frac{h_a^2}{18} = \frac{2 \cdot A^3}{9 \cdot a^2}$$

případně:

$$J_y = \frac{\left(\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}\right)^3}{288\cdot a^2}$$

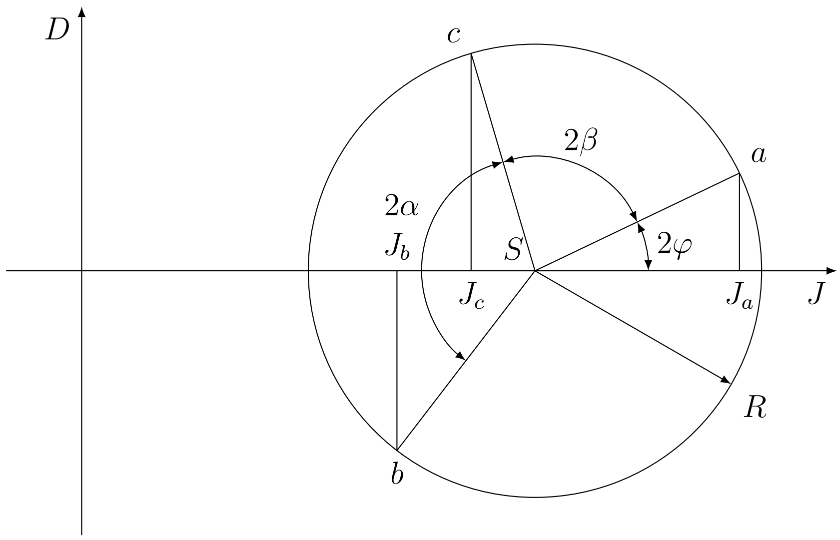
Pozor: protože v tomto případě platí obecně $D_{yz} \neq 0$, J_y nemusí být hlavním momentem!
V dalším postupu využijeme vlastností Cullmanovy kružnice. Označme postupně J_a, J_b a J_c centrální kvadratické momenty k centrálním osám rovnoběžným se stranami trojúhleníka a, b a c; s využitím cyklické záměny stran dostaneme:

$$J_a = \frac{2\cdot A^3}{9\cdot a^2} = \frac{\left(\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}\right)^3}{288\cdot a^2} \tag{6}$$

$$J_b = \frac{2\cdot A^3}{9\cdot b^2} = \frac{\left(\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}\right)^3}{288\cdot b^2} \tag{7}$$

$$J_c = \frac{2\cdot A^3}{9\cdot c^2} = \frac{\left(\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}\right)^3}{288\cdot c^2} \tag{8}$$

Konstrukce Cullmanovy kružnice



Z geometrie Cullmanovy kružnice vyplývá:

$$J_a = S + R\cdot\cos(2\cdot\varphi)$$
$$J_b = S + R\cdot\cos(2\cdot\varphi + 2\cdot\alpha + 2\cdot\beta)$$
$$J_c = S + R\cdot\cos(2\cdot\varphi + 2\cdot\beta)$$

Předchozí 3 rovnice s neznámými S, R a φ upravíme s použitím součtových vzorců na rovnici s jednou neznámou φ; hodnoty J_a, J_b a J_c jsou známé ze vztahů (6) až (8), hodnoty vnitřních úhlů trojúhelníku α, β a γ jsou známé z jeho geometrie:

$$\begin{aligned}\frac{J_b - J_a}{J_c - J_a} &= \frac{\cos(2\cdot\varphi + 2\cdot\alpha + 2\cdot\beta) - \cos(2\cdot\varphi)}{\cos(2\cdot\varphi + 2\cdot\beta) - \cos(2\cdot\varphi)} = \\ &= \frac{\cos(2\cdot\varphi)\cdot(\cos(2\cdot\alpha + 2\cdot\beta) - 1) - \sin(2\cdot\varphi)\cdot\sin(2\cdot\alpha + 2\cdot\beta)}{\cos(2\cdot\varphi)\cdot(\cos(2\cdot\beta) - 1) - \sin(2\cdot\varphi)\cdot\sin(2\cdot\beta)} = \\ &= \frac{(\cos(2\cdot\alpha + 2\cdot\beta) - 1) - \tan(2\cdot\varphi)\cdot\sin(2\cdot\alpha + 2\cdot\beta)}{(\cos(2\cdot\beta) - 1) - \tan(2\cdot\varphi)\cdot\sin(2\cdot\beta)}\end{aligned}$$

Její řešení je:

$$\tan(2\cdot\varphi) = \frac{(J_c - J_a)\cdot\cos(2\cdot\alpha + 2\cdot\beta) + (J_a - J_b)\cdot\cos(2\cdot\beta) + J_b - J_c}{(J_c - J_a)\cdot\sin(2\cdot\alpha + 2\cdot\beta) + (J_a - J_b)\cdot\sin(2\cdot\beta)}$$

Známou hodnotu φ použijeme pro výpočet R a S:

$$R = \frac{J_c - J_a}{\cos(2\cdot\varphi + 2\cdot\beta) - \cos(2\cdot\varphi)} = \frac{J_b - J_a}{\cos(2\cdot\varphi + 2\cdot\alpha + 2\cdot\beta) - \cos(2\cdot\varphi)}$$

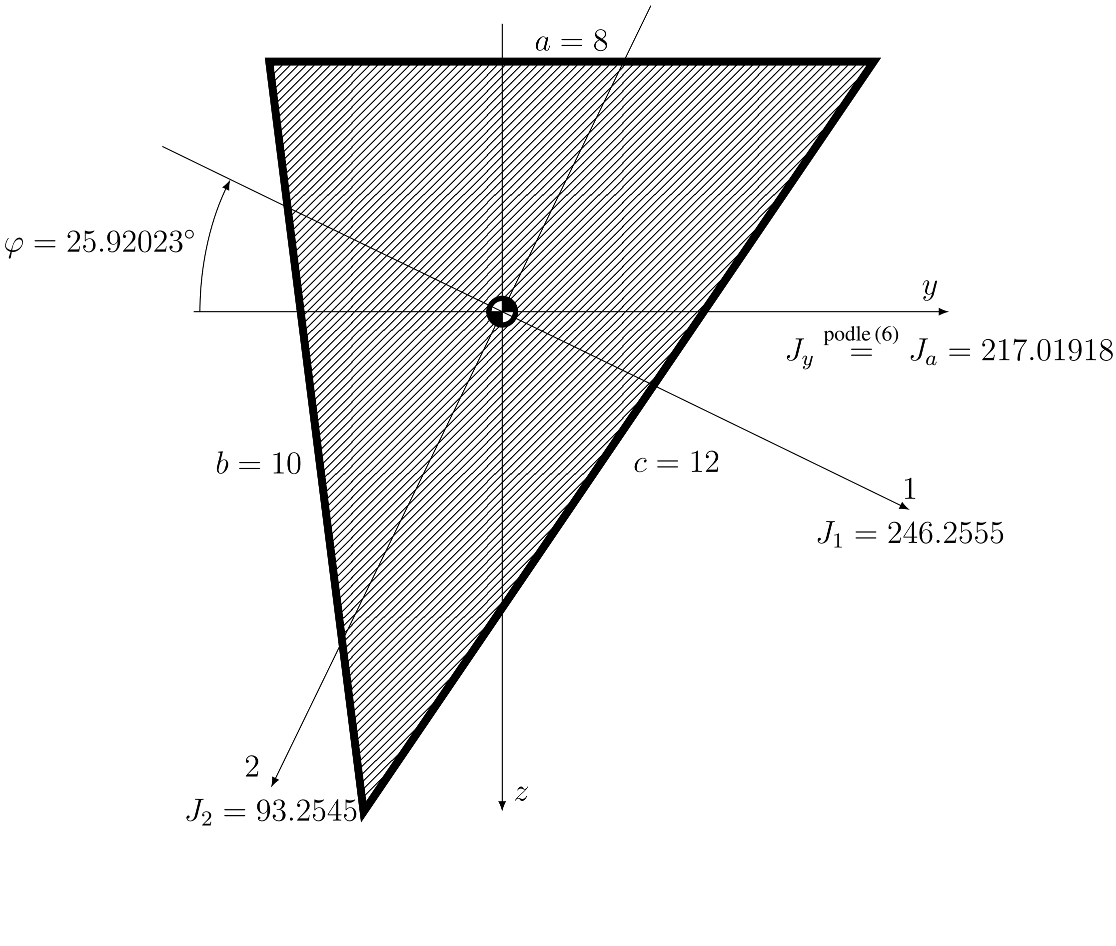
$$S = J_a - \frac{(J_c - J_a)\cdot\cos(2\cdot\varphi)}{\cos(2\cdot\varphi + 2\cdot\beta) - \cos(2\cdot\varphi)}$$

Hlavní centrální kvadratické momenty pak jsou:

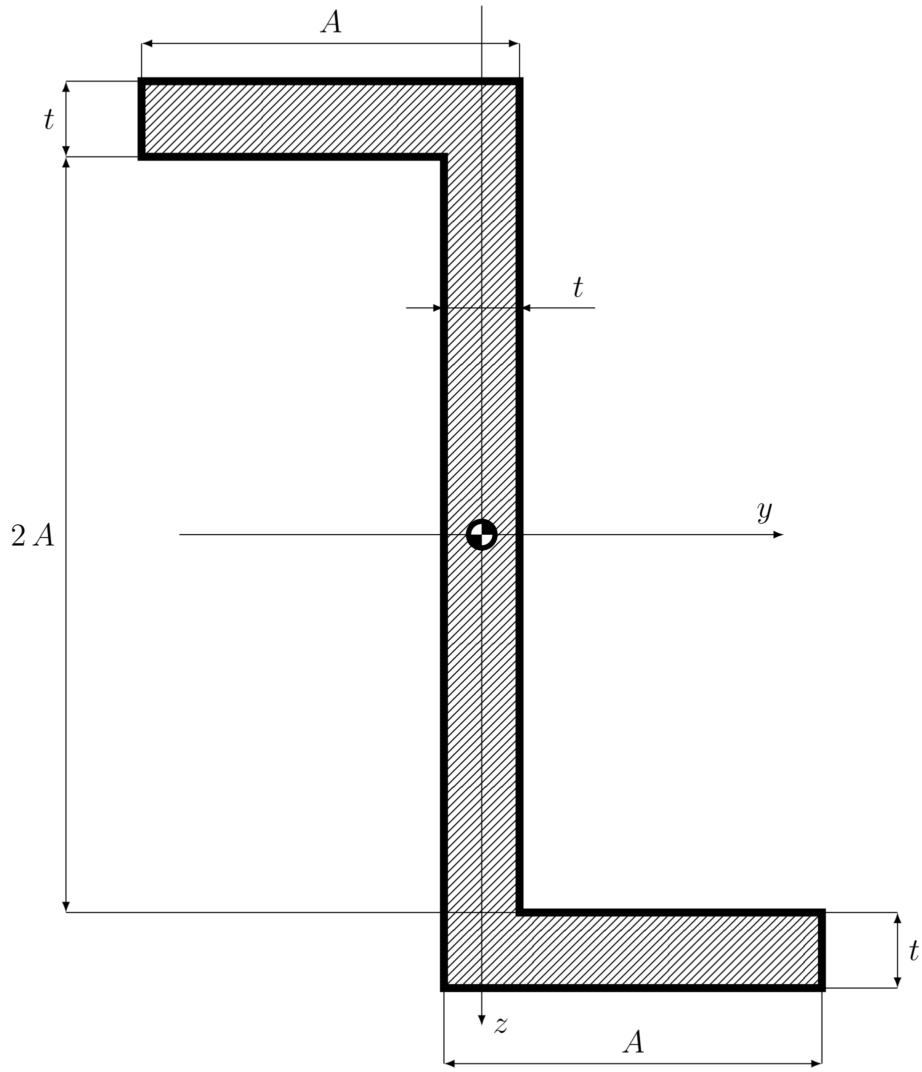
$$J_1 = S + R = J_a + \frac{J_c - J_a}{\cos(2\cdot\varphi + 2\cdot\beta) - \cos(2\cdot\varphi)}\cdot(1 - \cos(2\cdot\varphi))$$

$$J_2 = S - R = J_a - \frac{J_c - J_a}{\cos(2\cdot\varphi + 2\cdot\beta) - \cos(2\cdot\varphi)}\cdot(1 + \cos(2\cdot\varphi))$$

Příklad obecného trojúhelníku



Z–profil



Centrální kvadratické momenty:

$$J_y = \frac{(2 \cdot A)^3 \cdot t}{12} + 2 \cdot \left(\frac{A \cdot t^3}{12} + \left(A + \frac{t}{2} \right)^2 \cdot A \cdot t \right) = \frac{8 \cdot A^3 \cdot t + 6 \cdot A^2 \cdot t^2 + 2 \cdot A \cdot t^3}{3}$$

$$J_z = \frac{2 \cdot A \cdot t^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{A^3 \cdot t}{12} + \left(\frac{A - t}{2} \right)^2 \cdot A \cdot t \right) = \frac{2 \cdot A^3 \cdot t - 3 \cdot A^2 \cdot t^2 + 2 \cdot A \cdot t^3}{3}$$

$$D_{yz} = 2 \cdot \frac{A - t}{2} \cdot \left(A + \frac{t}{2} \right) \cdot A \cdot t = \frac{2 \cdot A^3 \cdot t - A^2 \cdot t^2 - A \cdot t^3}{2}$$

Hlavní centrální kvadratické momenty získáme pomocí Cullmanovy kružnice:

$$S = \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{10 \cdot A^3 \cdot t + 3 \cdot A^2 \cdot t^2 + 4 \cdot A \cdot t^3}{6}$$

$$R = \frac{A \cdot t}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot A^2 + t^2} \cdot \sqrt{2 \cdot A^2 + 2 \cdot A \cdot t + t^2}$$

$$\tan(2\varphi) = \frac{2 \cdot D_{yz}}{J_y - J_z} = \frac{2 \cdot A^2 - A \cdot t + t^2}{2 \cdot A^2 + 3 \cdot A \cdot t}$$

Cullmanova kružnice