PRAVDĚPODOBNOST – 1. ČÁST

Pravděpodobnost:
- matematická disciplína, která se zabývá studiem zákonitostí, jimiž se řídí hromadné náhodné jevy
- vytváří pravděpodobnostní modely, pomocí nichž se snaží postihnout procesy, ovlivněné náhodou.

Náhodné pokusy: procesy, jejichž výsledek nelze předem jednoznačně určit (je nejistý); závisí jednak na daných podmínkách, při kterých je prováděn, jednak na náhodě. Teorie pravděpodobnosti se zabývá pouze náhodnými pokusy, které jsou za stejných podmínek opakovatelné a u nichž je variabilita výsledků podstatná a vykazuje určitou zákonitost.

Hromadné náhodné jevy: výsledky opakovatelných náhodných pokusů (symbolické značení – *A, B, C, …*).

Pravděpodobnost náhodného jevu: pravděpodobnost náhodného jevu A je číslo $P(A)$, které lze interpretovat jako míru možnosti nastoupení náhodného jevu.

Axiomatická teorie pravděpodobnosti: pravděpodobnost je funkce, která každému náhodnému jevu přiřazuje reálné číslo, přičemž musí být splněny základní axiomy.

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + ...$ (pro neslučitelné jevy)
3. $P(E) = 1$.

Klasická definice pravděpodobnosti: pravděpodobnost jevu A se rovná podílu případů příznivých nastoupení jevu A a počtu všech případů možných, jsou-li všechny stejně pravděpodobné.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

kde m je počet případů příznivých
n je počet případů možných.

Statistická definice pravděpodobnosti: pokud platí, že při rostoucím počtu opakování náhodného pokusu (n) kolísá relativní četnost $\frac{m}{n}$ ve stále užších mezích kolem určitého čísla, můžeme toto číslo považovat za pravděpodobnost jevu A.

relativní četnost jevu $A = \frac{m}{n}$

kde m je počet nastoupení jevu A
n je počet opakování pokusu.

- pravděpodobnosti náhodného jevu odhadujeme na základě výsledků, získaných při mnohonásobném opakování náhodného pokusu (aposteriorní charakter definice).

Náhodná veličina:

- veličina, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu
- vlivem náhodných činitelů může nabýt různých hodnot, proto nelze její konkrétní hodnotu před provedením náhodného pokusu jednoznačně určit
- náhodnou veličinu pokládáme za danou, pokud známe všechny její možné hodnoty a pravděpodobnosti výskytu každé z nich
- symbolické značení – *X, Y, Z*, …
- příklady náhodných veličin: počet bodů, které padnou na hrací kostce, počet poruch určitého zařízení, doba čekání na obsluhu v určité prodejně, atd.

Zákon rozdělení náhodné veličiny: pravidlo, které každé hodnotě nebo množině hodnot z každého intervalu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty nebo hodnoty z určitého intervalu. Je to pravděpodobnostní model empirické náhodné veličiny.

Popis rozdělení náhodné veličiny

Diskrétní náhodná veličina

Distribuční funkce: pravděpodobnost, že NV nabude hodnoty menší nebo rovné *x*.

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} P(t)$$

Pravděpodobnostní funkce: pravděpodobnost, že NV nabude hodnoty rovné *x*.

$$P(x) = P(X = x)$$

$$\sum_{M} P(x) = 1,$$

kde M je prostor hodnot NV X, tj. množina možných hodnot NV X.

Spojitá náhodná veličina

Distribuční funkce

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Charakteristiky náhodných veličin

- číselné hodnoty, jejichž cílem je koncentrovat popis NV
- poskytují výstižný popis základních vlastností rozdělení NV.

Podle vlastnosti rozdělení, kterou popisují, rozeznáváme:

- charakteristiky polohy
- charakteristiky variability
- charakteristiky šikmosti
- charakteristiky špičatosti.

Charakteristiky polohy

Střední hodnota $E(X)$

- tzv. očekávaná hodnota (z latinského expectatis).

a) Diskrétní NV

$$E(X) = \sum_M x \cdot P(x)$$

b) Spojitá NV

$$E(X) = \int_M x \cdot f(x) dx$$

Modus $\hat{x}$

a) Diskrétní NV

- $\hat{x}$ je hodnota NV, která má největší pravděpodobnost výskytu
  $\hat{x}$ … max $P(x)$.

b) Spojitá NV

- $\hat{x}$ je bod, v němž je hustota pravděpodobnosti maximální, tj. lokální maximum hustoty pravděpodobnosti *f(x)*
  $\hat{x} \ldots f'(x) = 0$.

Kvantily

- používají se především kvantily *spojité* náhodné veličiny
- x_p je hodnota, kterou hodnoty NV nepřekročí s pravděpodobností 100p %.

Hodnota x_p je 100p% kvantilem NV X, jestliže pro ni platí:

$$F(x_p) = P(X \le x_p) = p\,.$$

Charakteristiky variability

Rozptyl $D(X)$

a) Diskrétní NV

$$D(X)=\sum_{M}[x-E(X)]^2\cdot P(x)=\sum_{M}x^2\cdot P(x)-\left[\sum_{M}x\cdot P(x)\right]^2$$

b) Spojitá NV

$$D(X)=\int_{M}[x-E(X)]^2 f(x)dx=\int_{M}x^2\cdot f(x)dx-\left[\int_{M}x\cdot f(x)dx\right]^2$$

Směrodatná odchylka $\sigma(X)$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$