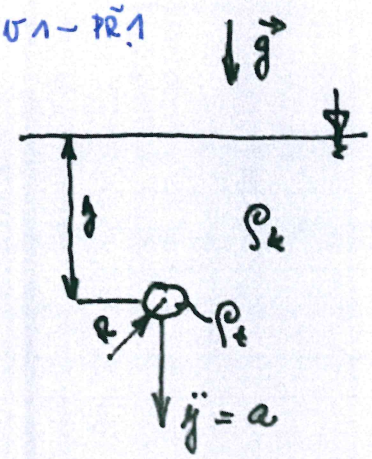
CV1 – PŘ1



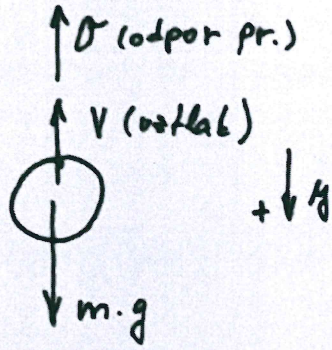
D: Vyšetřete pád kuličky kapalinou.

hustota tělesa ρ_t, hustota kapaliny ρ_k,

$v_0 = 0$, c_x - součinitel odporu, poloměr kuličky R, zanořování zanedbejte.

Odpor prostředí $\sigma = \frac{1}{2} c_x \rho_k v^2 \cdot \pi R^2$.

U: $v(y)$, $v(y=\infty)$



Newtonova metoda:

$$\sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} \quad ①$$

$$\downarrow y: \quad \underset{?}{m \cdot g} - \underset{?}{V} - \underset{?}{\sigma} = m \overset{a}{\ddot{y}} \quad ②$$

$$m = \rho_t \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \quad ③$$

$$V = \rho_k \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot g \quad ④$$

$$\sigma = \frac{1}{2} c_x \cdot \rho_k \cdot v^2 \cdot \pi R^2 \quad \text{(Newtonův z. odporu)} \quad ⑤$$

součinitel odporu — c_x; hustota prostředí — ρ_k; rychlost — v; průmět ve směru rychlosti — πR^2

pozn. Stokesův vztah

$$\sigma = k \cdot \eta \cdot l \cdot v$$

k — součinitel odporu; η — dynamická viskozita; l — charakteristický rozměr

③, ④, ⑤ → ②

$$\rho_t \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot g - \rho_k \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot g - \frac{1}{2} c_x \rho_k v^2 \pi R^2 = \rho_t \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot a$$

$$\underbrace{\frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_t - \rho_k)}_{G} - \frac{1}{2} c_x \rho_k \pi R^2 \cdot v^2 = \rho_t \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot a \qquad a = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dy}{dy} = v \frac{dv}{dy}$$

$$G - \frac{1}{2} c_x \rho_k \pi R^2 \cdot v^2 = \rho_t \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot v \frac{dv}{dy} \quad ⑥ \text{ dif. rce., lze separovat}$$

$$dy = \frac{\overset{A}{\left(\rho_t \cdot \frac{4}{3} \pi R^3\right)} v\, dv}{G - \underset{B}{\left(\frac{1}{2} c_x \rho_k \pi R^2\right)} v^2} \quad ⑦ = \frac{A\, v\, dv}{G - B v^2}$$

$$\int_0^y dy = \int_0^{v(y)} \frac{A\, v\, dv}{G - B v^2}$$

subst.
$G - B v^2 = z$
$-B\, 2 v \frac{dv}{dz} = 1$
$v\, dv = \frac{dz}{-2B}$

$$\int_0^y dy = \frac{A}{-2B} \int_G^{G - B v(y)^2} \frac{dz}{z}$$

$$y = -\frac{A}{2B} \ln \left| \frac{G - B\,v(y)^2}{G} \right| \quad ⑧$$

$$-\frac{2By}{A} = \ln \left| \frac{G - B\,v(y)^2}{G} \right| \quad \Big| e^{\wedge}$$

$$e^{-\frac{2By}{A}} = \frac{G - B\,v(y)^2}{G} \quad \Big| \cdot G,\ -G,\ \frac{1}{-B}$$

$$-\frac{1}{B}\left[G e^{-\frac{2By}{A}} - G\right] = v(y)^2$$

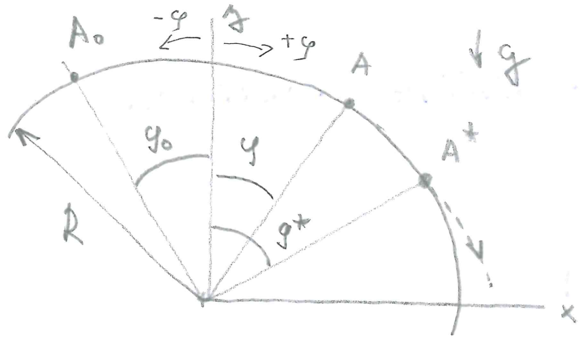
$$-\frac{G}{B}\left[e^{-\frac{2By}{A}} - 1\right] = v(y)^2$$

$$\underline{\underline{v(y) = \sqrt{-\frac{G}{B}\left[e^{-\frac{2By}{A}} - 1\right]}}} \quad ⑨$$

$$\underline{\underline{v(y=\infty)}} = \sqrt{-\frac{G}{B}\left[\underbrace{e^{-\frac{2B\infty}{A}}}_{\emptyset} - 1\right]} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{G}{B}}}} = \text{konst.} \quad ⑩$$

CV1 – PŘ. 2 DYN

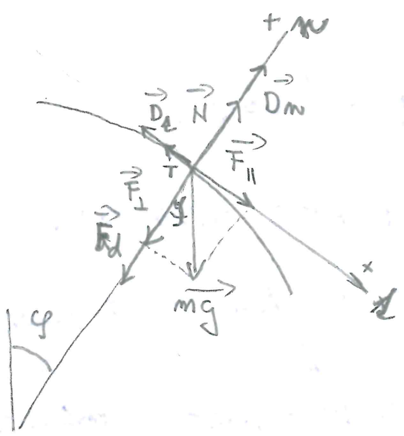
PO POVRCHU DRSNÉHO VÁLCE SE POHYBUJE MALÉ TĚLESO. NALEZNĚTE MÍSTO, KDE SE TĚLESO ODPOUTÁ OD POVRCHU



D: $R;\ \varphi_0;\ v_0;\ g;\ f$

U: $v(\varphi)\ ;\ \varphi^*$

PP: $\varphi_{(0)} < 0$



$$F_\parallel = m \cdot g \cdot \cos\varphi$$
$$F_\perp = m \cdot g \sin\varphi$$

$$n \nearrow :\quad D_n + N - mg\cos\varphi = 0 \qquad (1)$$
$$t \searrow :\quad -D_t - T + mg\sin\varphi = 0 \qquad (2)$$

$$D_n = m a_n = m \cdot R \cdot \dot{\varphi}^2 \qquad (3)$$
$$D_t = m a_t = m R \ddot{\varphi} \qquad (4)$$
$$T = N \cdot f \qquad (5)$$

(3)-(5) → (1), (2) :

$$m R \dot{\varphi}^2 + N - mg\cos\varphi = 0 \qquad (6)$$
$$-m R \ddot{\varphi} - N \cdot f + mg\sin\varphi = 0 \qquad (7)$$

N z (6) DOSADÍME DO (7) :

$$-mR\ddot{\varphi} - \underbrace{(mg\cos\varphi - mR\dot{\varphi}^2)}_{N} \cdot f + mg\sin\varphi = 0 \qquad (8)$$

UPRAVÍME (8) :

$$mR\ddot{\varphi} - mRf\dot{\varphi}^2 = mg(\sin\varphi - f\cos\varphi) \qquad (9)$$

POTŘEBUJEME VYJÁDŘIT $v(\varphi)$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega \frac{dv}{d\varphi} = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\varphi}$$

$$\wedge \quad a_t = R\ddot{\varphi}$$

TEDY $\ddot{\varphi} = \dfrac{v}{R^2}\dfrac{dv}{d\varphi}$; $\dot{\varphi} = \dfrac{v}{R}$ (10)

(10) → (9) : $\frac{v\,dv}{R^2 dy} \cdot m \cdot R - \frac{v^2}{R^2} m R f = m g (\sin y - f \cos y)$ (11)

UPRAVÍME (11) : $v \frac{dv}{dy} - v^2 f = Rg (\sin y - f \cos y)$ (12)

(12) JE BERNOULLIOVA DR, KTEROU ŘEŠÍME SUBSTITUCÍ

$$\left| \begin{array}{lrcl} \text{SUB.} & v^2_{(y)} & = & z(y) \\ & 2v\frac{dv}{dy} & = & \frac{dz}{dy} = z' \end{array} \right|$$

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} - z(y) f = Rg (\sin y - f \cos y) \quad (13)$$

(13) JE LINEÁRNÍ DR SE SPECIÁLNÍ PRAVOU STRANOU.
ŘEŠENÍ HLEDÁME VE TVARU : $z(y) = \underbrace{z_H}_{\text{ŘEŠENÍ HOMOG. RCE}} + \underbrace{z_{PŘNR}}_{\text{PARTIK. ŘEŠ. NEHOMOG. RCE}}$

HR :

$$\frac{1}{2} z' - z f = 0$$
$$\frac{1}{2} z' = z f$$
$$\frac{z'}{z} = 2f$$
$$\int \frac{1}{z}\, dz = 2f \int dy$$
$$\ln|z| = 2yf + c$$
$$z_H = C e^{2yf} \qquad e^c = C \quad (14)$$

PŘNR : $z_{PŘNR} = \underbrace{e^{ay}}_{\text{nemáme}} (P_{(m)} \cos(ky) + Q_{(m)} \sin(ky))$

kde $a = 0$; $k = 1$

$$z_{PŘNR} = A \cos y + B \sin y \quad (15)$$

$$Rgf \cos y + Rg \sin y$$ PROTOŽE

$$z' = -A \sin y + B \cos y \quad (16)$$

DOSADÍME (15) a (16) DO (13)

$$\frac{1}{2} B \cos y - \frac{1}{2} A \sin y - Bf \sin y - Af \cos y = Rg \sin y - Rgf \cos y \qquad (17)$$

$$\begin{aligned} \cos y: &\quad \frac{1}{2}B - Af = -Rgf \\ \sin y: &\quad -Bf - \frac{1}{2}A = Rg \end{aligned} \quad \xrightarrow[\text{CLR}]{A\vec{x}=\vec{b}} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -f \\ -f & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Rgf \\ Rg \end{bmatrix}$$

CRAMEROVO PRAVIDLO:

$$B = \frac{\det \begin{vmatrix} -Rgf & -f \\ Rg & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -f \\ -f & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}} = \frac{3Rgf}{-\frac{1}{2} - 2f^2}$$

$$A \overset{\text{ANALOG.}}{=} \frac{\frac{Rg}{2} - Rgf^2}{-\frac{1}{4} - f^2}$$

$$z(y) = z_H + z_{PART}$$

$$z(y) = C e^{2fy} + A \cos y + B \sin y \qquad (18)$$

NYNÍ URČÍME C Z POČÁTEČNÍCH PODMÍNEK $\quad v(0) = 0$

$$y(0) = -y_0$$

$$v(0)^2 = z(0) = 0 \qquad \text{ZÁPORNÁ SOUŘADNICE}$$

PP do (18):

$$0 = C e^{2f(-y_0)} + A \cos(-y_0) + B \sin(-y_0) \qquad \sin(-y_0) = -\sin y_0$$

$$0 = C e^{-2fy_0} + A \cos y_0 - B \sin y_0 \qquad \cos(-y_0) = \cos y_0$$

$$C = \left(B \sin y_0 - A \cos y_0\right) \cdot e^{2fy_0} \quad - \underline{\text{URČENO } C} \qquad (19)$$

$$z(y) = v^2(y)$$

$$v(y) = \sqrt{z(y)} = \sqrt{C e^{2fy} + A \cos y + B \sin y} \qquad (20)$$

JAK NALÉZT φ^* $\longrightarrow$ $N(\varphi=\varphi^*) = 0$

NENÍ KONTAKT MEZI TĚLESEM A POVRCHEM

VIZ ROVNICE (9)

$$N = mg\cos\varphi - mR\dot{\varphi}^2$$

S VYUŽITÍM (10)

$$N = mg\cos\varphi - mR\frac{v^2}{R^2}$$

PRO φ^* :

$$0 = \cancel{m}\cdot g\cos\varphi^* - \frac{\cancel{m}}{R}\left(Ce^{2f\varphi^*} + A\cos\varphi^* + B\sin\varphi^*\right)$$

$$0 = f(\varphi^*)$$

a) NUMERICKY

φ^*	$f(\varphi^*)$
0.0	1000
0.1	986
⋮	⋮
1,2	1
1,3	-2,3

$\Rightarrow$ NA $\langle 1{,}2;\ 1{,}3\rangle$ je $f(\varphi^*) = 0$

VIZ VÝŠE

b) ZJEDNODUŠENÍ: $f = 0$ - bez tření $\Rightarrow B = 0$

$$0 = g\cos\varphi^* - \frac{1}{R}\left(C + A\cos\varphi^*\right)$$

$$\varphi^* = \arccos\left(\frac{C}{R}\cdot\frac{1}{g - \frac{A}{R}}\right)$$

$$\varphi^* = \arccos\left(\frac{C}{R}\cdot\frac{1}{\frac{gR - A}{R}}\right)$$

$$\varphi^* = \arccos\left(\frac{C}{gR - A}\right)$$