1. Axiomatická výstavba planimetrie

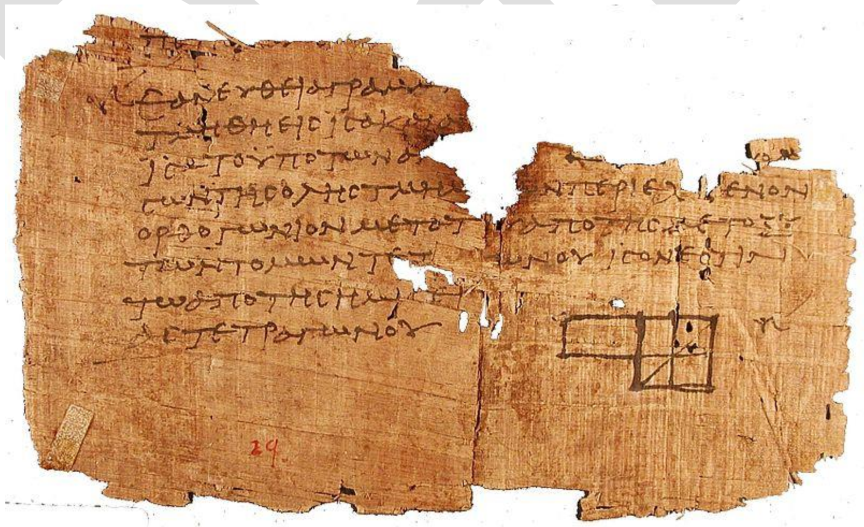
1.1 Stručný vývoj geometrie

První počátky geometrie se začaly objevovat již cca 5 000 let př. n. l. ve starém Egyptě a v Mezopotámii. Byly spojeny především s vyměřováním polí, počítáním času, počítáním daní, počítáním množství obilí …

1.1.1 Eukleidovy Základy

První axiomatická základna geometrie se objevila až cca 300 let př. n. l. Tehdy ***Eukleides z Alexandrie*** (žil asi 325 př. n. l. – asi 260 př. n. l) vysvětlil základy planimetrie, geometrické algebry, aritmetiky a stereometrie ve 13 knihách svého nejznámějšího díla **Základy** (řecky **Stoicheia**, latinsky **Elementa**).

Základy shrnují práci mnoha dřívějších matematiků a filosofů a jsou zdaleka nejúspěšnější matematickou knihou všech dob, která se využívala víc než 2000 let!



Fragment papyru z Oxyrhynchos s částí Eukleidových Základů z let 75 – 125 n.l.

Oxyrhynchos (dnes el-Bahnasa) - město v Horním Egyptě, v němž archeologické výzkumy odhalily množství rukopisů z ptolemaiovského a římského období, mj. zde byly objeveny právě části Eukleidových Základů z let 75 – 125 n.l.

© Daniela Bímová

Následuje přehled toho, o čem pojednávají jednotlivé knihy Eukleidových **Základů.** U některých knih jsou v závorce zmíněny zdroje**,** ze kterých Eukleides pravděpodobně čerpal.

- **1. kniha** – o základech geometrie, o rovnoběžkách, o trojúhelnících a o rovnoběžnících, končí důkazem Pythagorovy věty (*Pythagorejci*)
- **2. kniha** – o planimetrii (*Pythagorejci*)
- **3. kniha** – o kružnici a o kruhu (*Pythagorejci*)
- **4. kniha** – o tětivových a tečnových mnohoúhelnících a o kružnici vepsané a opsané (*Pythagorejci*)
- **5. kniha** – o poměrech, přesněji je věnována Eudoxově teorii proporcí (tj. geometrické podobě teorie reálných čísel a limitních procesech) (*Eudoxidos z Knidu*)
- **6. kniha** – o geometrické podobnosti (především trojúhelníků) (*pramen neznámý*)
- **7. kniha** – o teorii čísel (*Pythagorejci*)
- **8. kniha** – pokračování pojednání o teorii čísel (*Pythagorejci*)
- **9. kniha** – věnována teorii čísel – pojednává o prvočíslech a obsahuje důkaz toho, že prvočísel je nekonečně mnoho (*Pythagorejci*)
- **10. kniha** – věnována teorii iracionálních čísel (*Theaitetos*)
- **11. kniha** – o geometrii těles, tedy o stereometrii
- **12. kniha** – pojednává o povrchu a objemu těles (*Eudoxidos z Knidu*)
- **13. kniha** – o pravidelných (Platónských) tělesech (*Theaitetos*)

Eukleides 1. knihu nejdříve začíná 23 ***základními definicemi***, v nichž zavádí základní geometrické pojmy:

Základní definice:

1. Bod jest, co nemá dílu.
2. Čára pak délka bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.
4. Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně.
5. Plocha jest, co jen délku a šířku má.
6. Hranicemi plochy jsou čáry.
7. Rovinná jest plocha (rovina), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.

…

15. Kruh jest útvar rovinný, objímaný jednou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu uvnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.

…

23. Rovnoběžky jsou přímky, které jsouce v téže rovině a prodlouženy jsouce na obě strany do nekonečna nikde se nesbíhají.

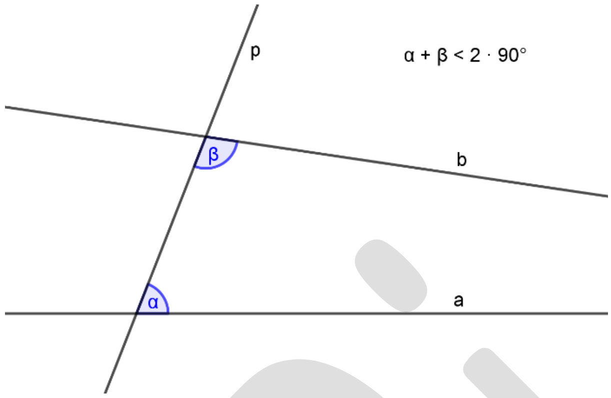
Pak následuje pět tzv**. *Eukleidových postulátů*** (někdy nazývané ***axiomy***):

Postuláty:

1. Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.
2. A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.

© Daniela Bímová

3. A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.
4. A že všechny pravé úhly sobě rovny jsou.
5. A když přímka *p* protínající dvě přímky *a, b* tvoří na téže straně přilehlé úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna, že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.



Poznámka: V různých zdrojích najdeme různé znění 5. Eukleidova postulátu.

Pak následují axiomy týkající se měření:

Axiomy:

1. Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.
2. Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky jsou rovny.
3. A odejmou-li se od rovných rovné, zbývající části rovny jsou.
4. A když se přidají k nerovným rovné, celky jsou nerovny.
5. A dvojnásobky téhož vespolek rovny jsou.
6. A polovičky téhož vespolek rovny jsou.
7. A co se navzájem kryje, navzájem rovno jest.
8. A celek větší než díl.
9. A dvě přímky místa neomezují.

…

A nakonec Eukleides končí problémy a tvrzeními, které vycházejí z předchozích definic a axiomů. Problémy a tvrzení jsou uspořádány do 48 číslovaných odstavců, jejichž obsahem je text věty a její důkaz nebo text konstrukční úlohy a její řešení.

Např.:

1. problém: Jak sestrojit *rovnostranný trojúhelník*.

2. problém: Daným bodem sestrojit *úsečku stejné délky, jakou má daná úsečka*.

. . .

47. problém: V pravoúhlém trojúhelníku se obsah čtverce proti pravému úhlu rovná součtu obsahů čtverců u pravého úhlu. (při rozebírání tohoto problému Eukleides provádí důkaz Pythagorovy věty)

48. problém: Jestliže v trojúhelníku obsah čtverce u jedné ze stran se rovná součtu obsahů čtverců u zbývajících dvou stran trojúhelníku, pak úhel mezi těmito zbývajícími dvěma

© Daniela Bímová

stranami je pravý. (Eukleides toto tvrzení dokazuje pomocí předchozí věty. Zároveň se zde objevuje formulace, která byla později nazvána Eukleidovou větou o výšce).
Ve všech číslovaných odstavcích je možné vysledovat následující schéma:

1. Formulace věty (zadání úlohy).
2. Popis nakreslených a písmeny označených objektů včetně vysvětlení, co se má o těchto objektech dokázat, popř. co se má z těchto objekt sestrojit.
3. Vlastní důkaz (konstrukce) s konkrétními výše popsanými objekty. Tato část bývá zakončena slovy „což bylo dokázati (vykonati)“.
4. Závěr, který je uveden slovem „Tedy …“ a následně je zopakováno znění věty či zadání úlohy.

1.1.2 Význam Eukleidových Základů

Základy byly prvním příkladem použití axiomatického systému v matematice. Eukleidovy **Základy** daly vzor moderní deduktivní výstavbě vědních oborů a byly řadu století učebnicí geometrie. Přitom deduktivní výstavbou rozumíme vyvozování nových tvrzení za dodržování pravidel logiky, tj. z pravdivých předpokladů jsou vyvozovány pravdivé závěry.

Již od počátku se objevovaly mnohé pokusy o vylepšení Eukleidových Základů. Hlavně se jednalo o snahy dokázat 5. postulát na základě prvních čtyř postulátů, popřípadě alespoň o snahy nahradit jej jednodušeji formulovaným tvrzením. Mnohokrát se zdálo, že byl důkaz objeven, ale nakonec se vždy ukázalo, že se příslušný důkaz opíral o něco, co měl dokázat.

Teprve ***Johann Carl Friedrich Gauss*** (30. 4. 1777, Braunschweig – 23. 2. 1855, Göttingen; německý matematik a fyzik), ***János Bolyai*** (15. 12. 1802, Kluž – 27. 1. 1860, Targu Mures; maďarský matematik) a ***Nikolaj Ivanovič Lobačevskij*** (1. 12. 1792, Nižnij Novgorod – 24. 2. 1856, Kazaň; ruský matematik) poprvé připustili nezávislost 5. postulátu na prvních čtyřech Eukleidových postulátech a začali uvažovat o „nové geometrii“, v níž místo 5. postulátu platí jeho negace. Dali tak základ vzniku *neeuklidovské geometrie.*


J. C. F. Gauss


J. Bolyai


N. I. Lobačevskij

Za zakladatele *neeuklidovské geometrie* je považován ***Nikolaj Ivanovič Lobačevskij*** v souvislosti s jeho snahou dokázat r. 1829 pátý Eukleidův postulát týkající se rovnoběžek.

© Daniela Bímová

Základy však obsahují i některé nedostatky. Např. výčet Eukleidových axiomů a postulátů není zcela úplný.

Existují také 14. a 15. díl **Základů**, které jsou však z pozdější doby. Také jednotlivé verze opisů se liší v počtu axiómů. V některých jich je pět, jinde osm.

Roku 1899 napsal ***David Hilbert*** (23. 1. 1862, Královec, Východní Prusko – 14. 2. 1943, Göttingen, Německo; německý matematik) dílo s názvem **Základy geometrie** (německy **Grundlagen der Geometrie**), které pojednává o logických základech eukleidovské geometrie současným způsobem.

Na začátku díla vymezil *Hilbert* základní pojmy, které však nedefinuje. Jsou to: *bod, přímka, rovina, náležeti, býti mezi, shodnost, spojitost* a *rovnoběžnost.* Dále ve svém díle vyslovil definici axiomu jako pojmu, který odpozorovává důležité vlastnosti pro disciplínu. *Hilbert* také uvádí, že soustava axiomů

1. **musí být úplná** – musí být možné odvodit všechny možné pojmy;
2. **nesmí být bezesporná** – nemělo by nastat, aby byl vytvořen axiom a zároveň jeho negace;
3. **musí být nezávislá** – nemělo by nastat, aby nějaký axiom mohl být vyvozen z ostatních.

1.2 Axiomy euklidovské geometrie

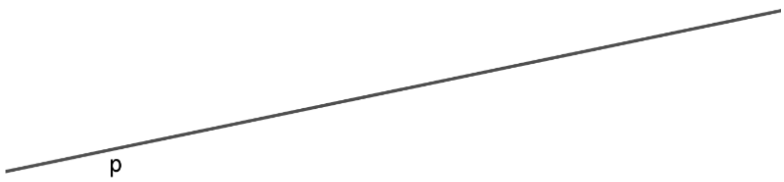
Axiomy popisující eukleidovskou geometrii rozdělíme v souladu s *D. Hilbertem* do pěti skupin:

1. Axiomy incidence (I)
2. Axiomy uspořádání (U)
3. Axiomy shodnosti (S)
4. Axiomy spojitosti (D = A + C)
5. Axiom rovnoběžnosti (R)

1.2.1 Axiomy incidence (I)

I1: Každými dvěma různými body prochází jediná přímka.

I2: Na každé přímce leží nejméně dva různé body.



© Daniela Bímová

I3: Existuje alespoň jedna trojice bodů, které neleží všechny na téže přímce.

Poznámka: Zdůrazněme, že axiomatický systém je logicky uspořádaný, tj. nová věta může být vyřčena pouze a výhradně vyvozením z axiomu a z již dokázaných vět, tj. (((I1, I2, I3) $\Rightarrow$ V1) $\Rightarrow$ V2) $\Rightarrow$ …) $\Rightarrow$ V$_n$.

1.2.2 Axiomy uspořádání (U)

U1: Leží-li bod *B* mezi body *A, C*, pak *A, B, C* jsou tři navzájem různé body na přímce a platí také, že bod *B* leží mezi body *C, A.*

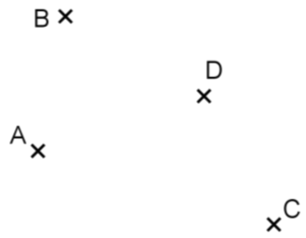
U2: Jsou-li *A, B* dva různé body, pak existuje na přímce *AB* alespoň jeden bod *C* takový, že bod *B* leží mezi body *A, C.*

U3: Ze tří navzájem různých bodů *A, B, C* ležících na téže přímce leží nejvýše jeden mezi ostatními body.

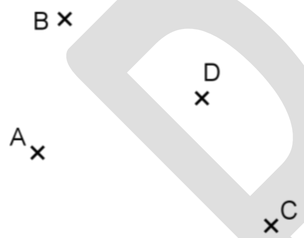
© Daniela Bímová

U4 (**Paschův axiom**): Každá přímka *p* rozdělí body, které na ní neleží, do dvou tříd s následujícími vlastnostmi:

a) mezi dvěma různými body téže třídy neleží bod přímky *p;*



b) mezi dvěma body z různých tříd leží právě jeden bod přímky *p*.



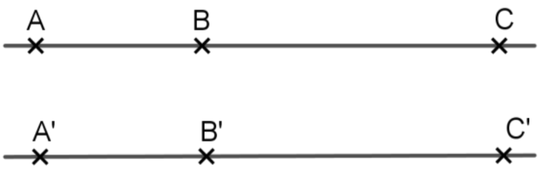
1.2.3 Axiomy shodnosti (S)

S1: Nechť je *AB* úsečka a *CD* polopřímka. Potom na polopřímce *CD* leží jediný bod *E* různý od bodu *C* takový, že úsečky *AB* a *CE* jsou shodné*.* Úsečky *AB* a *BA* jsou také shodné.

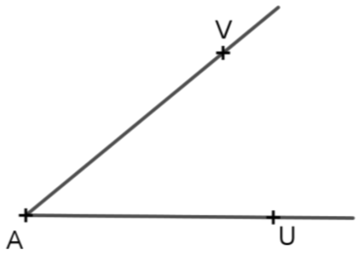
S2: Je-li úsečka *AB* shodná s úsečkou *CD* a úsečka *CD* je shodná s úsečkou *EF,* pak také úsečka *AB* je shodná s úsečkou *EF.*

© Daniela Bímová

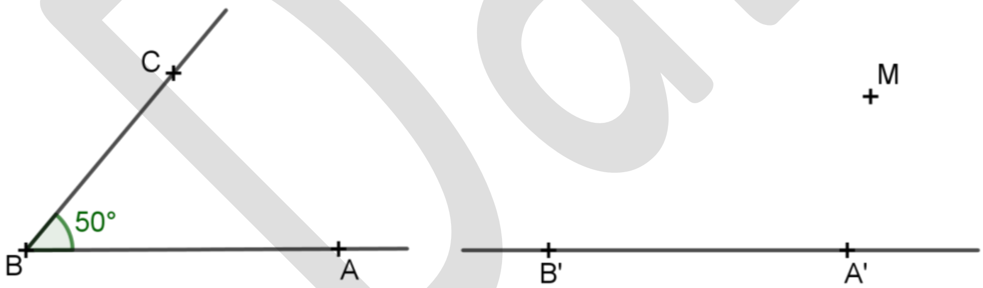
S3: Budiž *B* bod ležící mezi body *A, C* a *B´* bod ležící mezi body *A´, C´* a nechť úsečky *AB*, *A´B´* jsou spolu shodné a rovněž úsečky *BC, B´C´* jsou spolu shodné. Potom také úsečky *AC, A´C´* jsou spolu shodné.



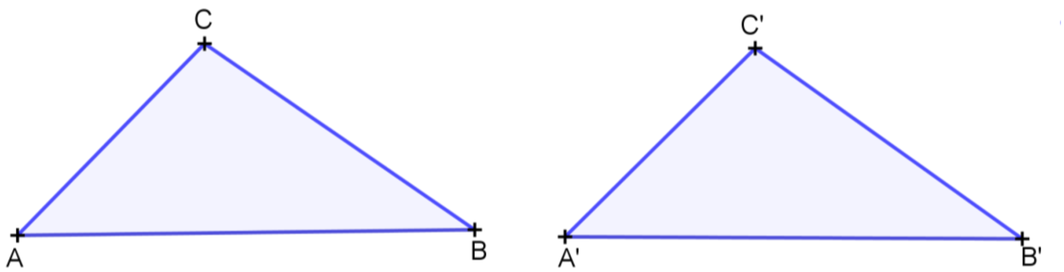
S4: Jestliže ∡ UAV ≅ ∡ WBX a ∡ WBX ≅ ∡ YCZ, potom ∡ UAV ≅ ∡ YCZ. Navíc každý úhel je shodný sám se sebou.



S5: Je dán úhel *ABC* a trojice nekolineárních bodů *A´, B´, M.* Potom v polorovině *A´B´M* existuje jediná polopřímka *B´C´* taková, že $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.



S6: Budiž dány trojúhelníky *ABC, A´B´C´*. Jestliže platí $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ a $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, potom platí také, že $BC \cong B'C'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.



© Daniela Bímová

1.2.4 Axiomy spojitosti (D)

Axiomy spojitosti umožňují přiřadit **geometrické přímce „přímku reálných čísel.“** Z axiomů, které jsme zatím uvedli, nevyplývá, že na přímce nechybí nějaké body. Axiomy spojitosti jsou tedy nutné k tomu, abychom mohli tvrdit, že každá přímka je spojitá (tzn. že „není děravá“).

Nejdůležitějšími důsledky těchto axiomů jsou zavedení míry úsečky a míry úhlu. Pak máme dvě možnosti pro zavedení spojitosti:

1. podle *Hilberta* na základě dvou axiomů – ***Archimédova*** (A) a ***Cantorova*** (C)
2. na základě ***Dedekindova axiomu*** (D)

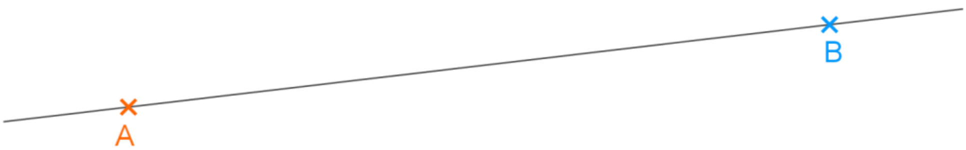
A (**Archimédův axiom**): Ke každým dvěma úsečkám *AB, CD* existuje taková konečná posloupnost bodů $P_1, P_2, \dots, P_n$, kde $P_{i-1} \not\equiv P_{i+1}$, že $AP_1 \cong P_1P_2 \cong P_2P_3 \cong \dots \cong P_{n-1}P_n \cong CD$ a že bod P_n neleží mezi body *A, B.*

C (**Cantorův axiom – axiom úplnosti**): Průnik posloupnosti do sebe vnořených úseček je neprázdný.

<u>Definice 1.2.1:</u>
Množinu úseček $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$, kde $A_nB_n \subset \dots \subset A_2B_2 \subset A_1B_1$, nazýváme **množinu úseček do sebe vnořených**.

D (**Dedekindův axiom**): Body úsečky *AB* rozdělíme do dvou tříd s následujícími vlastnostmi:

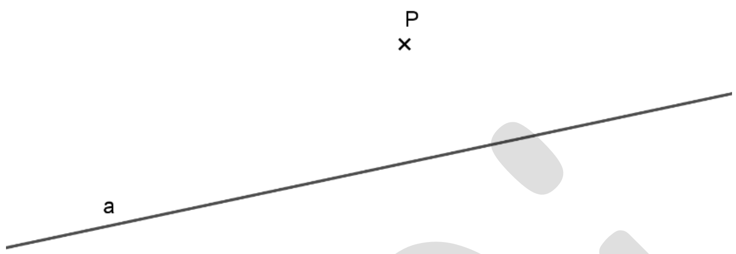
1. Každý bod patří právě jedné třídě
2. Bod *A* patří první třídě, bod *B* patří druhé třídě.
3. Náleží-li bod *X* první třídě, pak této třídě patří i každý bod ležící mezi body *A, X.* Potom existuje tzv. hraniční bod *H*, který patří buď první, nebo druhé třídě a má následující vlastnosti:
   a) je-li $H \not\equiv A$, pak každý bod *X* mezi body *A, H* patří první třídě;
   b) je-li $H \not\equiv B$, pak každý bod *Y* mezi body *B, H* patří druhé třídě.



***Věta* 1.2.1:** Platnost Dedekindova axiomu je ekvivalentní se současnou platností Archimédova a Cantorova axiomu.

1.2.5 Axiom rovnoběžnosti (R)

R: V rovině lze každým bodem mimo přímku vést nejvýše jednu přímku s ní rovnoběžnou.



***Věta* 1.2.2:** V rovině lze každým bodem mimo přímku vést právě jednu s ní se neprotínající přímku.

<u>Definice 1.2.2:</u>

Geometrie, v níž platí axiomy **I, U, S, D, R**, se nazývá **eukleidovská geometrie**.

1.2.6 Příklady k procvičování

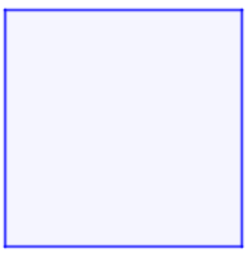
1.2.6.1 Axiomy uspořádání

<u>Příklad 1.1:</u>

Narýsujte přímku *p* a vyznačte na ní body *K, L, M, N* tak, aby body *K, L* ležely mezi body *M* a *N* a aby bod *K* ležel mezi body *L* a *N.*

<u>Příklad 1.2:</u>

Načrtněte čtverec a na jeho stranách vyznačte 14 bodů tak, aby na každé straně čtverce ležely 4 body.

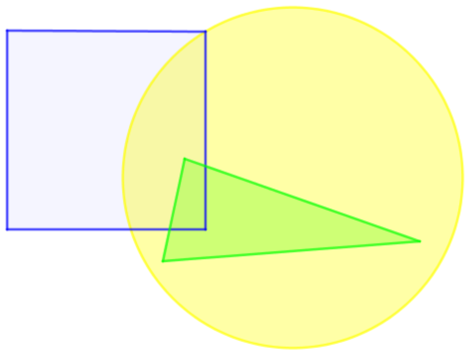


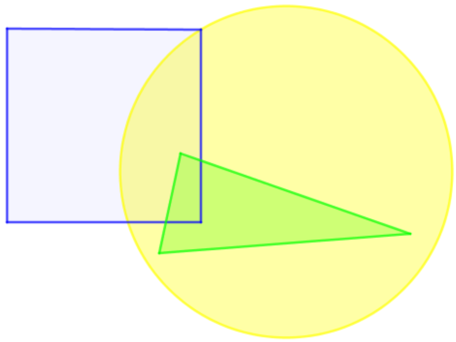
© Daniela Bímová

Příklad 1.3:

V obrázku vyznačte 6 bodů tak, aby 3 ležely uvnitř trojúhelníku, 4 uvnitř čtverce a 4 uvnitř kruhu. Žádný z bodů nesmí ležet vně všech 3 útvarů.

Poznámka: Zkuste najít dvě různá řešení úlohy.





Příklad 1.4:

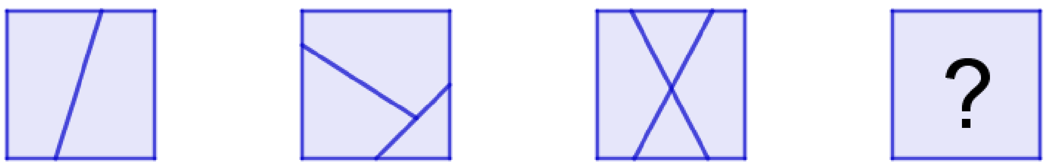
Narýsujte 5 různých přímek tak, aby měly právě

a) 4 průsečíky,

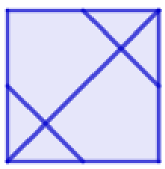
b) 5 průsečíků.

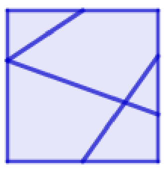
Příklad 1.5:

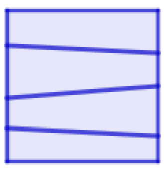
Je dána řada 3 čtverců. Jaký čtvrtý čtverec bude následovat?

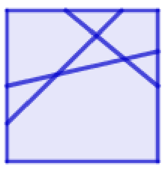


Vyberte právě jednu z nabízených možností. Svou odpověď odůvodněte.

a) 

b) 

c) 

d) 

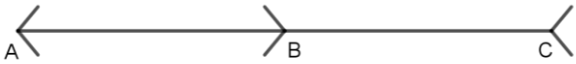
DaBI

© Daniela Bímová

1.2.6.2 Axiomy shodnosti

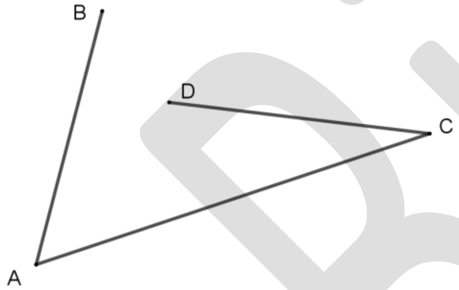
Příklad 1.6:

Zkuste pouhým okem odhadnout, která z úseček *AB* či *BC* je delší. Svou hypotézu nakonec ověřte pomocí užití proužku papíru, pravítka či kružítka.



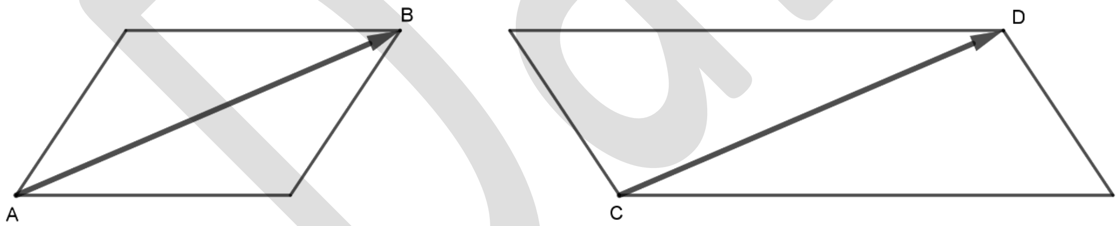
Příklad 1.7:

Zkuste pouhým okem odhadnout, která z úseček *AB* či *CD* je delší. Svou hypotézu nakonec ověřte pomocí užití proužku papíru, pravítka či kružítka.



Příklad 1.8:

Zkuste pouhým okem odhadnout, který z vektorů AB či CD má větší velikost. Svou hypotézu ověřte pomocí užití proužku papíru, pravítka či kružítka.

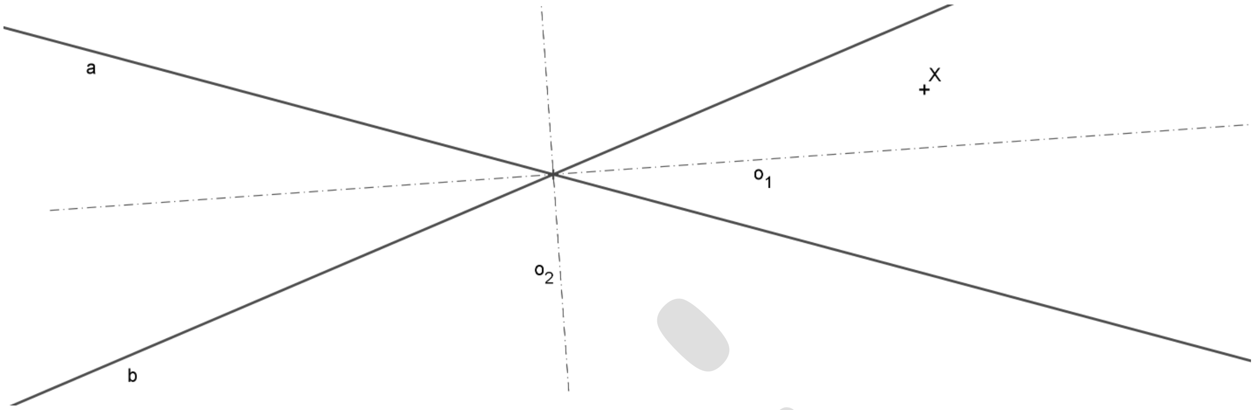


Příklad 1.9:

Jsou dány tři různé nekolineární body *A, B, C.* Sestrojte bod *D* tak, aby |*AD*| = |*BD*|= |*CD*|.

Příklad 1.10:

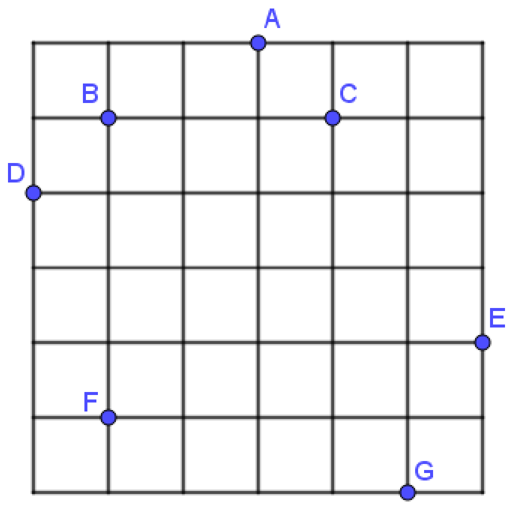
Jsou dány dvě různoběžné přímky *a, b* a bod *X*, který neleží na žádné z nich a neleží ani na jedné ose těchto dvou různoběžek. Bodem *X* veďte přímku *c* tak, aby úhly sevřené přímkami *a, c* a *b, c* byly shodné.



1.2.6.3 Axiom rovnoběžnosti

Příklad 1.11:

Sestrojte dvě rovnoběžky, které prochází dvěma páry bodů vybraných z daných bodů. Svou odpověď odůvodněte.



1.3 Absolutní geometrie

Geometrie popsaná axiomy I, U, S, D a nezávislá na axiomu R se nazývá **absolutní geometrie**.

Dále je uvedeno několik vět, které se „nedotýkají" otázky rovnoběžek.

***Věta* 1.3.1:** V trojúhelníku je součet kterýchkoliv dvou vnitřních úhlů menší než dva úhly pravé.

***Věta* 1.3.2:** Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku není větší než dva úhly pravé.

***Věta* 1.3.3:** V rovině lze každým bodem mimo přímku vést alespoň jednu s ní se neprotínající přímku.

1.3.1 Modely absolutní geometrie

1.3.1.1 Beltrami-Kleinův model

Definice 1.3.1:

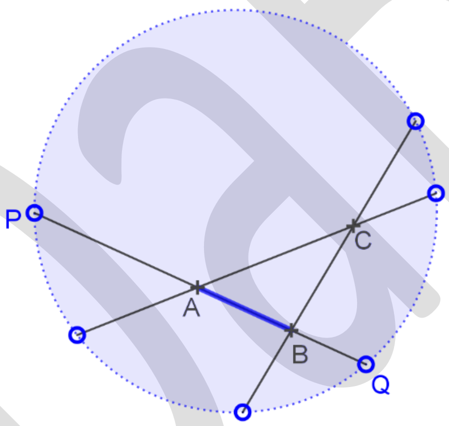
V eukleidovské rovině zvolme kruh se středem O a s poloměrem r. **Rovinou *H_2*** rozumíme pouze vnitřek kruhu. ***H-body*** (body Beltrami-Kleinova modelu) jsou všechny body uvnitř kruhu. ***H-přímkami*** (přímky Beltrami-Kleinova modelu) rozumíme každou tětivu kruhu bez krajních bodů.

Vztahům **incidence** a **mezi** ponecháme stejný smysl, jaký mají v eukleidovské rovině.

Shodnost úseček zavedeme tak, že ***H-úsečky*** AB a CD jsou ***H-shodné***, jestliže mají stejnou ***H-délku***, kterou definujeme vztahem

$$d(AB)_H = \left| \ln\left(\frac{|AP|}{|AQ|} \cdot \frac{|BQ|}{|BP|} \right) \right|,$$

kde P, Q jsou krajní body tětivy, na níž leží úsečka AB, a kde $|AP|$, $|AQ|$, $|BQ|$, $|BP|$ jsou standardní eukleidovské vzdálenosti.



Platí také

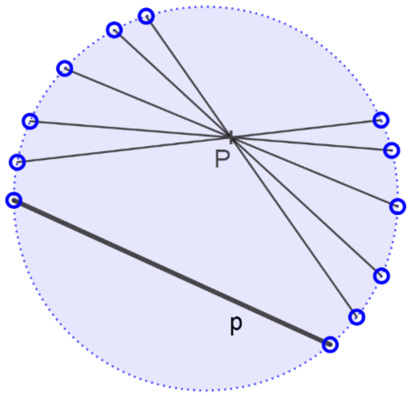
$$\lim_{A\to P} d(AB)_H = \infty, \lim_{B\to Q} d(AB)_H = \infty,$$

a proto ačkoliv má *H-přímka AB* eukleidovskou délku rovnou konkrétní hodnotě menší nebo rovné $2r$, *H-délky* nabývají všech kladných reálných hodnot.

Shodnost úhlu zavedeme pomocí shodnosti úseček. Jestliže $BA \cong_H ED$, $BC \cong_H DF$, $AC \cong_H DF$, potom $\angle ABC \cong_H DEF$.

Beltrami-Kleinův model navíc ještě splňuje **hyperbolickou vlastnost** týkající se nerůznoběžek vedených k dané přímce p daným bodem $P \notin p$.

© Daniela Bímová

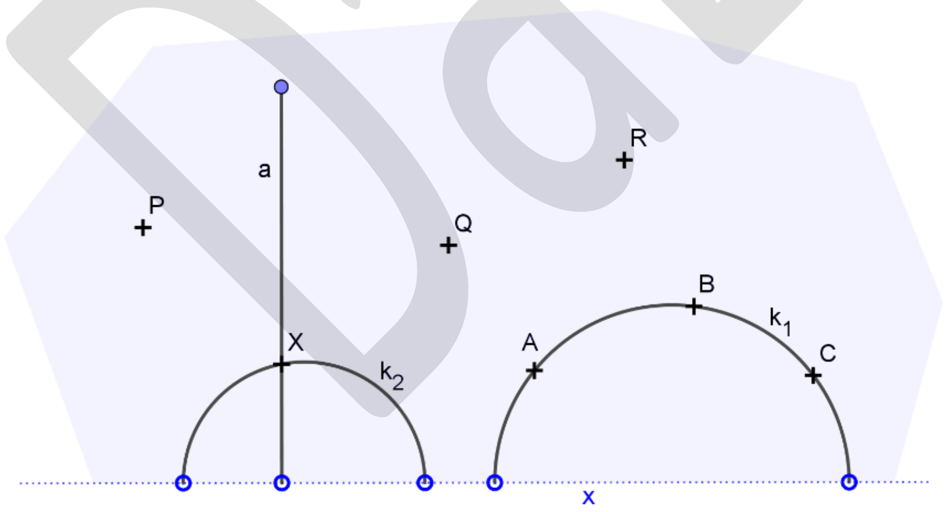


1.3.1.2 Poincarého polorovinový model

<u>**Definice 1.3.2 :**</u>

Rovinou P_2 rozumíme otevřenou eukleidovskou polorovinu. ***P-body*** (body Poincarého modelu) jsou všechny body otevřené poloroviny. ***P-přímkami*** (přímkami Poincarého modelu) rozumíme

- otevřené polopřímky, které vzniknou jako průniky eukleidovských přímek s polorovinou P_2. Přitom počáteční body všech polopřímek leží na ose x;
- otevřené půlkružnice, které vzniknou jako průniky eukleidovských kružnic, jejichž středy leží na ose x, s polorovinou P_2.

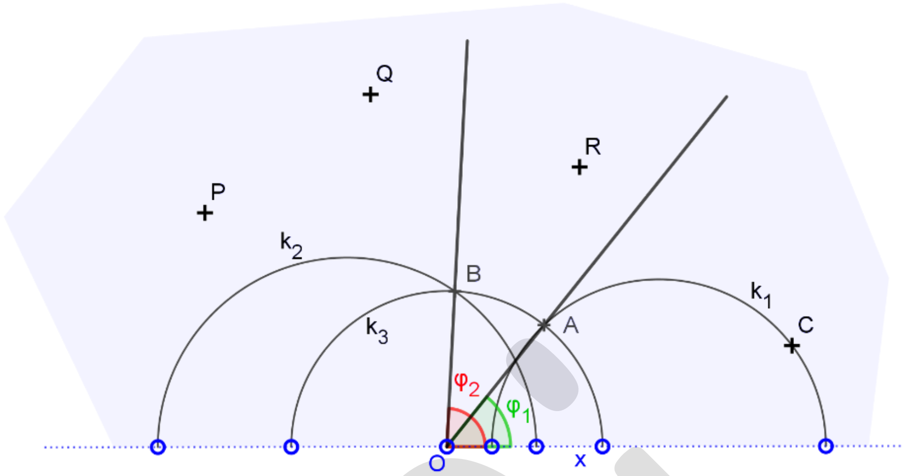


Vztahům **incidence** a **mezi** ponecháme stejný smysl, jaký mají v obyčejné rovině. **Shodnost úseček** zavedeme tak, že ***P-úsečky*** *AB, CD* jsou ***P-shodné***, jestliže mají stejnou ***P-délku***, kterou definujeme vztahem

$$d(AB)_P = \left| \ln \frac{\mathrm{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\varphi_2}{2}} \right|,$$

© Daniela Bímová

kde φ_1 je úhel, který svírá polopřímka *OA* (*O* je střed kružnice, která prochází body *A, B,* ležící na ose *x*) s osou *x* a úhel φ_2 je úhel, který svírá polopřímka *OB* s osou *x.*



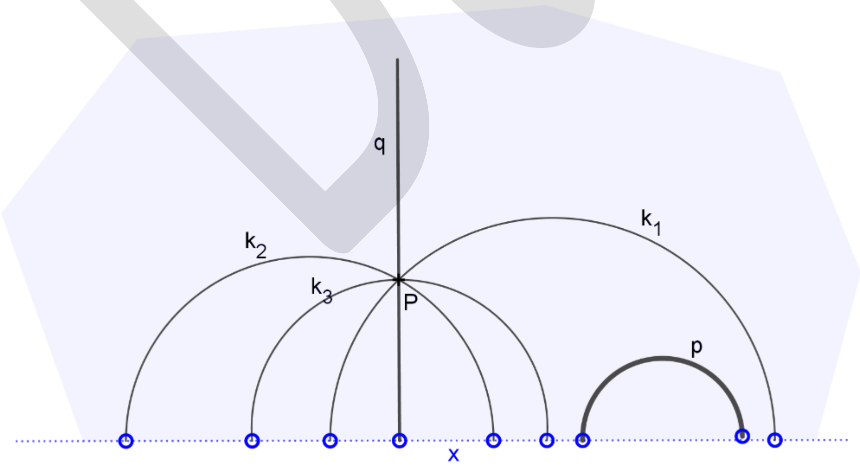
Opět platí, že

$$\lim_{A \to P} d(AB)_H = \infty, \ \lim_{B \to Q} d(AB)_H = \infty,$$

proto *P-délky P-úseček* nabývají všech kladných reálných hodnot.

Shodnost úhlů koresponduje s běžnou shodností v eukleidovské rovině. Měřit *P-úhly* mezi dvěma *P-přímkami* znamená měřit eukleidovské úhly mezi dvěma tečnami k daným dvěma *P*-přímkám v jejich průsečíku.

Také Poincarého polorovinový model má **hyperbolickou vlastnost** týkající se nerůznoběžek vedených k dané přímce *p* daným bodem $P \notin p$.

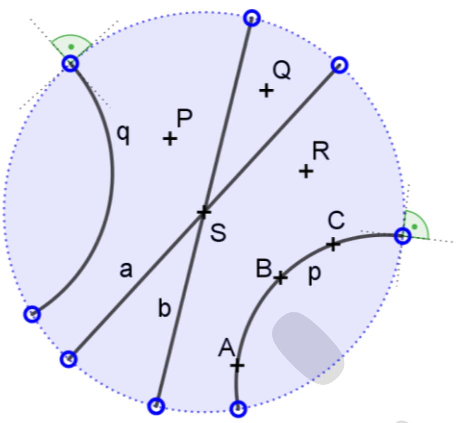


1.3.1.3 Poincarého kruhový model

Definice 1.3.3:

V eukleidovské rovině zvolíme kruh. **Rovinou P_2** rozumíme vnitřek kruhu. ***P-body*** jsou všechny body uvnitř kruhu. ***P-přímkami*** rozumíme

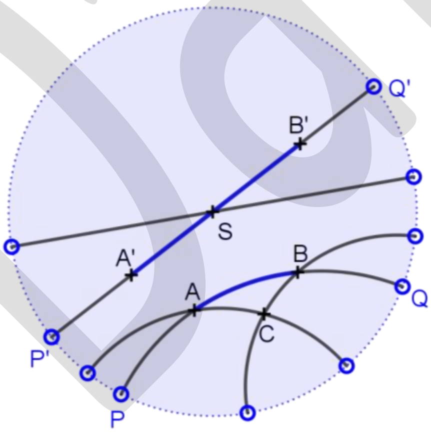
- ✓ všechny průměry kruhu bez krajních bodů;
- ✓ otevřené kruhové oblouky, které vzniknou jako průniky roviny P_2 a eukleidovských kružnic, které ortogonálně protínají hraniční kružnici kruhu.



Vztahům **incidence** a **mezi** ponecháme stejný smysl, jaký mají v eukleidovské rovině. **Shodnost úseček** zavedeme tak, že ***P-úsečky*** *AB, CD* jsou ***P-shodné***, mají-li stejnou ***P-délku***, kterou definujeme vztahem

$$d(AB)_P = \left| \ln\left(\frac{|AP|}{|AQ|} \cdot \frac{|BQ|}{|BP|} \right) \right|,$$

kde *P, Q* jsou krajní body oblouku, resp. průměru, na němž leží *P-úsečka AB*, a kde $|AP|$, $|AQ|$, $|BQ|$, $|BP|$ jsou standardní eukleidovské vzdálenosti.



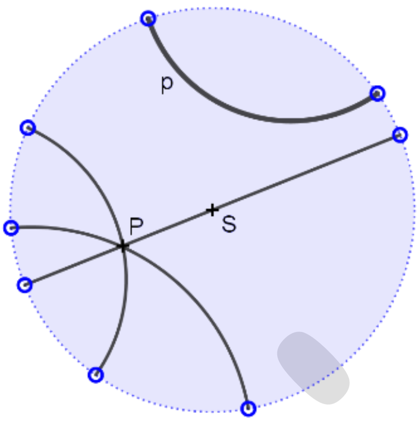
Opět platí, že

$$\lim_{A \to P} d(AB)_H = \infty, \ \lim_{B \to Q} d(AB)_H = \infty,$$

a proto *P-délky P-úseček* nabývají všech kladných reálných hodnot.

Shodnost úhlů koresponduje stejně jako v předcházejícím Poincarého modelu s běžnou shodností v eukleidovské rovině, a proto měřit *P-úhly* mezi dvěma *P-přímkami* znamená měřit eukleidovské úhly mezi dvěma tečnami k daným dvěma *P*-přímkám v jejich průsečíku.

Rovněž Poincarého kruhový model má **hyperbolickou vlastnost** týkající se nerůznoběžek vedených k dané přímce *p* daným bodem $P \notin p$.



1.4 Neeukleidovské geometrie

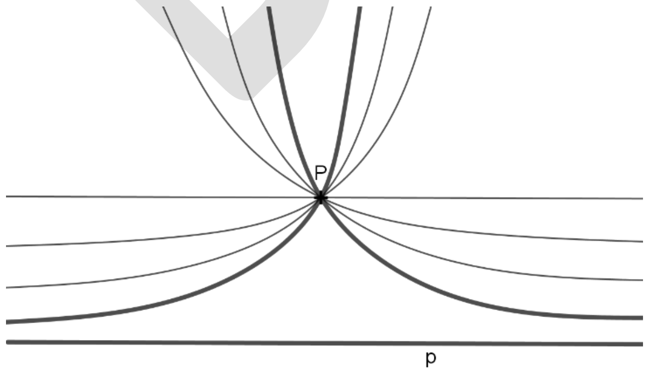
První knihy o neeukleidovské geometrii byly knihy *N. I. Lobačevského* a *Jánose Bolyaie*. Také *J. C. F. Gauss* se touto tématikou zabýval, i když sám z této oblasti nikdy nic nepublikoval.

1.4.1 Hyperbolická geometrie

Pokud k absolutní geometrii přidáme axiom rovnoběžnosti, dostaneme **eukleidovskou geometrii**. Přidáme-li však k absolutní geometrii negaci axiomu rovnoběžnosti, vytvoříme **Lobačevského neeukleidovskou geometrii** (někdy též nazývanou **hyperbolickou geometrii**).

1.4.1.1 Axiom Lobačevského geometrie

L: V rovině prochází bodem mimo přímku alespoň dvě různé s ní se neprotínající přímky.



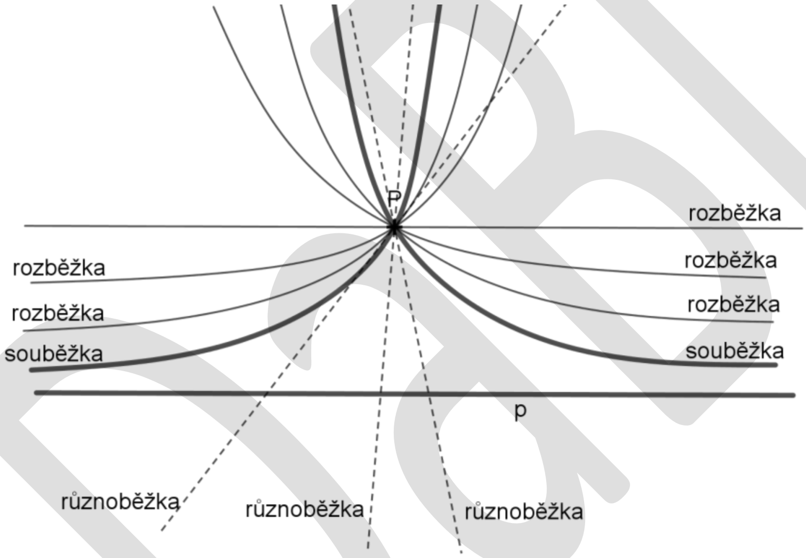
Dále je uvedeno několik vět platných v hyperbolické geometrii:
***Věta* 1.4.1:** Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než $2 \cdot 90°$.
***Věta* 1.4.2:** Existuje kolmice na rameno ostrého úhlu, která neprotne druhé rameno.

***Věta* 1.4.3:** Existují tři nekolineární body, které neleží na žádné kružnici (tj. existuje trojúhelník, jemuž nelze opsat kružnici).
***Věta* 1.4.4:** V rovině prochází bodem mimo danou přímku nekonečně mnoho přímek, které danou přímku neprotínají.

V hyperbolické rovině rozeznáváme tři typy přímek:

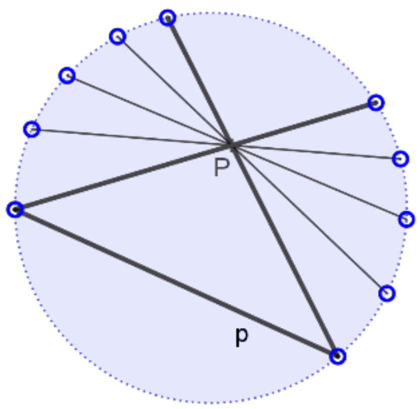
1. *různoběžné* přímky
2. *nerůznoběžné* přímky
   a) *souběžné*
   b) *rozběžné*

Máme-li dánu přímku p a bod $P \notin p$, pak všechny přímky, které procházejí bodem P, rozdělíme na různoběžky a nerůznoběžky. Hranici mezi nimi tvoří dvě přímky, které se chovají vůči přímce p jako asymptoty. Nazýváme je **souběžky**. Všechny ostatní nerůznoběžky označujeme jako **rozběžky**.

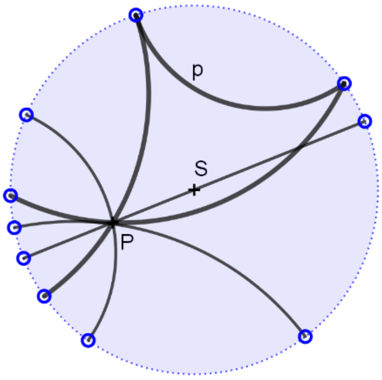


Na následujících obrázcích jsou znázorněny rozběžky a **souběžky** ve výše uvedených modelech absolutní geometrie.

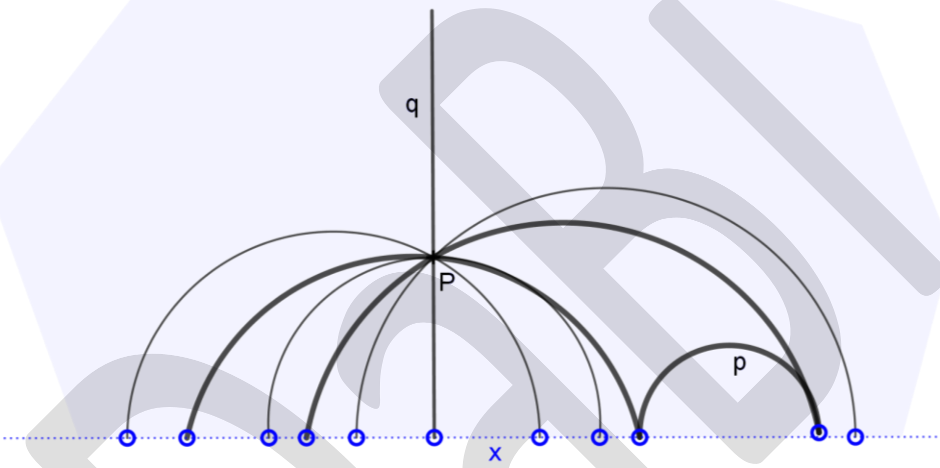
Beltrami-Kleinův model



Poincarého kruhový model



Poincarého polorovinový model



1.4.2 Riemannova geometrie

Ve druhé polovině 19. století se objevila další neeukleidovská geometrie – **Riemannova geometrie** (někdy též nazývána **eliptická geometrie**). Roku 1854 ji na základě diferenciálně-geometrických úvah objevil ***Georg Friedrich Bernhard Riemann*** (17.9.1826, Dannenberg – 20.7.1866, Verbania; německý matematik).

Riemannova geometrie nevychází z absolutní geometrie, proto s ní má eukleidovská geometrie ještě méně společného než s hyperbolickou geometrií.

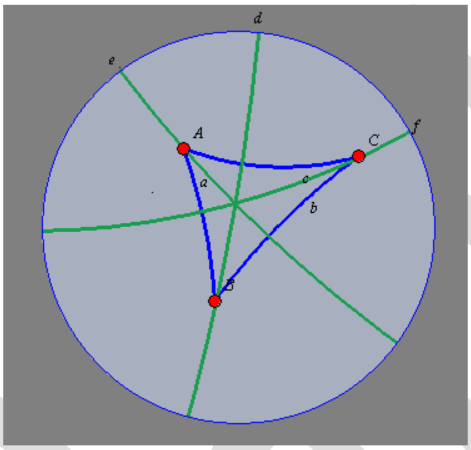
V Riemannově geometrii se např. *vždy protínají dvě kolmice ke společné přímce.* Důsledkem toho je, že v Riemannově geometrii *neexistují nerůznoběžky* a *že součet úhlů* *v trojúhelníku je větší než* $2 \cdot 90°$. Další zvláštností Riemannovy geometrie je, že *přímky se chovají jako uzavřené křivky* a *mají konečnou délku.*

1.4.2.1 Model Riemannovy geometrie

Modelem Riemannovy geometrie může být **kulová plocha**, jestliže za ***R-přímky*** uvažujeme hlavní kružnice (tj. takové kružnice na kulové ploše, jejichž střed splývá se středem kulové plochy), které se však vždy protínají ve dvou bodech kulové plochy, a proto ***R-bodem*** rozumíme dvojici bodů souměrných podle středu kulové plochy.

Znázornění výšek v trojúhelníku v

a) hyperbolické geometrii



b) Riemannově geometrii