2. Planimetrie

Část geometrie, která se zabývá geometrickými útvary v rovině, se označuje jako **planimetrie**. Systematickému budování rovinné geometrie na logickém podkladě byla věnována minulá kapitola. Pro zopakování uvedeme, že jsme zavedli pojem **eukleidovská geometrie** pro geometrii popsanou axiomy incidence, uspořádání, shodnosti, spojitosti a rovnoběžnosti. Rovinu, ve které se v euklidovské geometrii pohybujeme, označujeme **eukleidovská rovina** a značíme ji $\boldsymbol{E}_2$.

2.1 Základní geometrické pojmy

V předchozí kapitole jsme se také setkali s některými elementárními geometrickými objekty. Uvedli jsme také, že základními útvary rovinné geometrie jsou **bod** a **přímka**. Bod, ani přímku nedefinujeme. Považujeme je za tzv. **základní** (**primitivní**) **pojmy**. Základním pojmem je rovněž pojem **incidence** (říkáme, že *„Bod inciduje s přímkou,* popř. *přímka inciduje s bodem."* ve smyslu *„Bod leží na přímce*, popř. *přímka prochází bodem*." a značíme $A \in p$). Dalším základním pojmem je pojem **uspořádání** bodů na přímce (říkáme, že *„Bod B leží mezi body A, C,* popř. *bod B odděluje body A, C."* a značíme ($A\ B\ C$).

Množinu bodů na přímce nebo v rovině nazýváme (**rovinný**) **geometrický útvar**. Uzavřenou oblast v rovině nazýváme (**rovinný**) **obrazec**.

2.1.1 Body

Dva body *A, B* jsou navzájem různé ($A \not\equiv B$) nebo totožné ($A \equiv B$).
Tři různé body buď neleží v přímce (**nekolineární**), anebo leží v přímce (**kolineární**).

2.1.2 Přímky

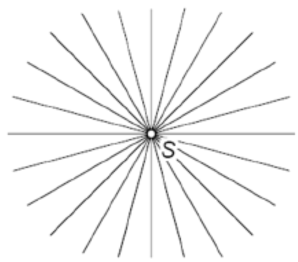
Dvě přímky *a, b* v rovině jsou navzájem:

a) **různoběžné**, mají-li jediný společný bod – průsečík;

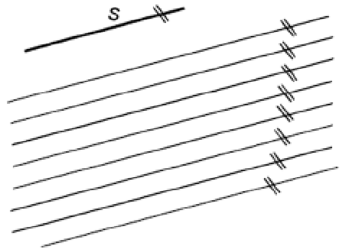
b) **rovnoběžné různé** ($a \parallel b$), nemají-li žádný společný bod;

c) **rovnoběžné splývající** (**totožné**) ($a \equiv b$), mají-li všechny body společné.

Svazek přímek, značíme S (*a, b, c, …*), je množina všech přímek v rovině, které mají společný právě jeden bod- bod *S,* tzv. **střed svazku**.



Směr *s* je množina všech navzájem rovnoběžných přímek.



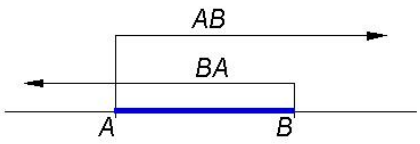
2.2 Odvozené geometrické pojmy

2.2.1 Polopřímka

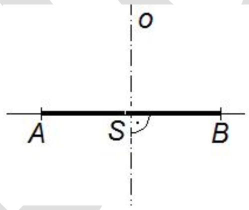
Bod *O* dělí přímku *p* na dvě **navzájem opačné polopřímky** se společným **počátkem** *O.* Je-li bod *A* **vnitřní bod** polopřímky (tj. $A \neq O$), potom tuto polopřímku značíme $\rightarrow OA$.

2.2.2 Úsečka

Úsečkou *AB* nazýváme průnik dvou polopřímek $\rightarrow AB$, $\rightarrow BA$. Body *A, B* nazýváme **krajní body** úsečky, ostatní body se nazývají **vnitřní body** úsečky.

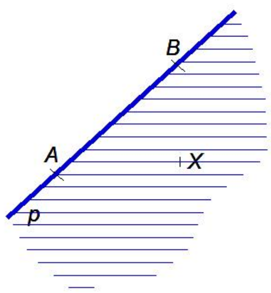


Středem úsečky *AB* nazýváme její vnitřní bod *S,* pro který platí $|AS| = |BS|$.
Osou úsečky *AB* nazýváme přímku *o*, která prochází středem *S* úsečky *AB* a je k úsečce *AB* kolmá.



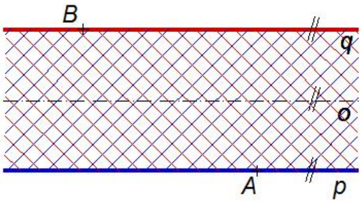
2.2.3 Polorovina

Přímka $p \equiv AB$ dělí rovinu na dvě navzájem opačné **poloroviny** se společnou hraniční přímkou $p \equiv AB$. Je-li bod *X* vnitřní bod poloroviny, potom tuto polorovinu značíme $\rightarrow ABX$, nebo $\rightarrow pX$.



2.2.4 Pás

Pásem určeným přímkami *p, q* rozumíme průnik polorovin *pB* a *qA*, jejichž hraniční přímky jsou rovnoběžné a leží-li *A* ϵ *p*, *B* ϵ *q.*

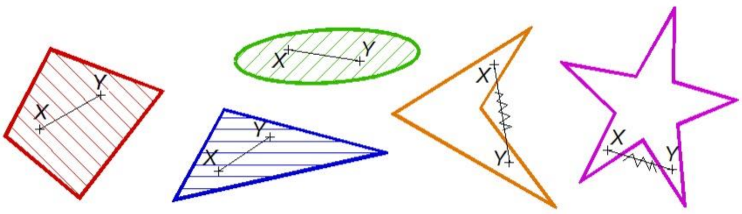


2.2.5 Konvexní a nekonvexní množiny bodů

Množinu bodů nazveme **konvexní**, jestliže pro každé dva její body *X, Y* platí, že úsečka *XY* je její podmnožinou.

Poznámka: Prázdnou množinu a jednobodové množiny řadíme mezi konvexní.

Množina bodů, která není konvexní, se nazývá **nekonvexní**.

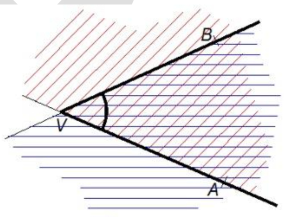


2.2.6 Úhel

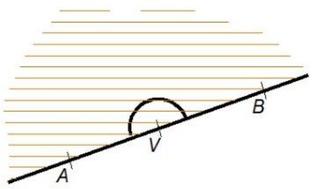
2.2.6.1 Dutý úhel

Konvexním úhlem ∠ *AVB* rozumíme

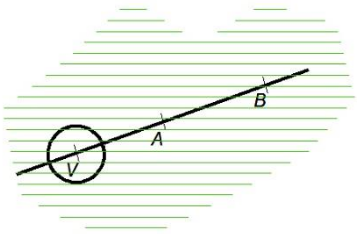
1. průnik polorovin → *AVB* a → *BVA* v případě, že body *A, V, B* jsou tři nekolineární body (tento úhel se také označuje jako **dutý**)



2. každou z polorovin s hraniční přímkou *AB* v případě, že body *A, V, B* jsou tři různé kolineární body a bod *V* leží mezi body *A, B* (tento úhel se označuje jako **přímý**)

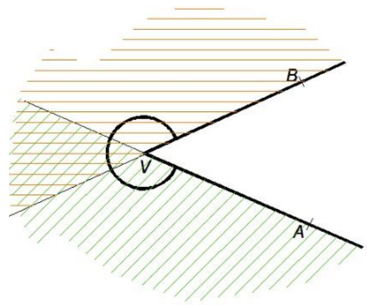


3. v případě, že body *A, V, B* jsou tři různé kolineární body a bod *V* neleží mezi body *A, B*
   a) každou rovinu obsahující přímku *AB* (tento úhel se označuje **plný úhel**)



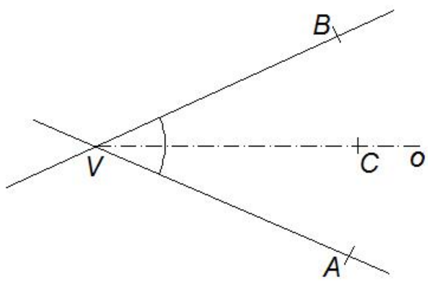
   b) polopřímku *VA* (resp. *VB*) (tento úhel se označuje **nulový úhel**)

Jestliže jsou *A, V, B* tři nekolineární body, potom se sjednocení polorovin opačných k polorovinám $\rightarrow AVB$ a $\rightarrow BVA$ nazývá **nekonvexní úhel.**



Ve všech výše uvedených případech se polopřímky $\rightarrow VA$ a $\rightarrow VB$ nazývají **ramena úhlu**, bod *V* **vrchol úhlu**, body úhlu neležící na ramenech označujeme **vnitřními body úhlu** a body roviny, které nejsou vnitřními body úhlu *AVB,* jako **body vnějšku úhlu**.

Osou úhlu *AVB* nazýváme polopřímku *VC* s počátečním bodem ve vrcholu *V*, která úhel *AVB* půlí tak, že platí $|\angle AVC| = |\angle CVB|$, resp. též možno zapsat, že $\angle AVC \cong \angle CVB$.



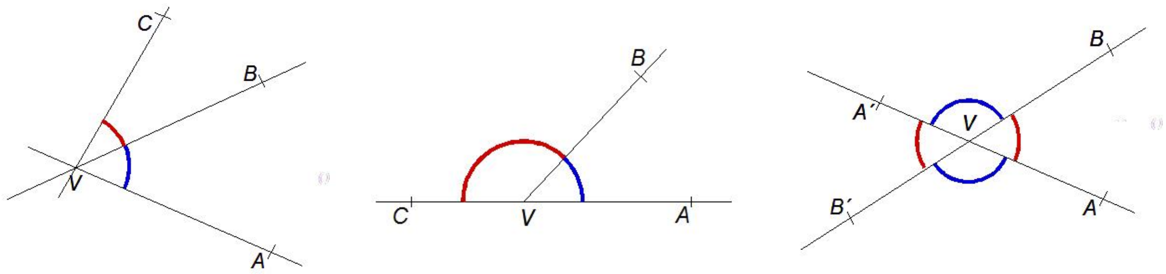
2.2.6.2 Dvojice úhlů

Dva úhly se nazývají

a) **styčné**, jestliže mají jedno rameno společné a zbývající dvě ramena leží v opačných polorovinách vymezených hraniční přímkou, na níž leží společné rameno;
b) **vedlejší**, jestliže mají jedno rameno společné a zbývající dvě ramena jsou polopřímky navzájem opačné;

c) **vrcholové**, jestliže mají společný vrchol a jsou-li ramena jednoho úhlu opačnými polopřímkami k ramenům druhého úhlu. Vrcholové úhly jsou **shodné**.

a) b) c)



Úhel shodný se svým úhlem vedlejším se nazývá **pravý**. Dvě různoběžné přímky *a, b*, tvořící shodné vedlejší (tj. pravé) úhly, jsou k sobě **kolmé**. Značíme $a \perp b$. Průsečík *P* kolmých přímek *a, b* nazýváme **pata kolmice**.

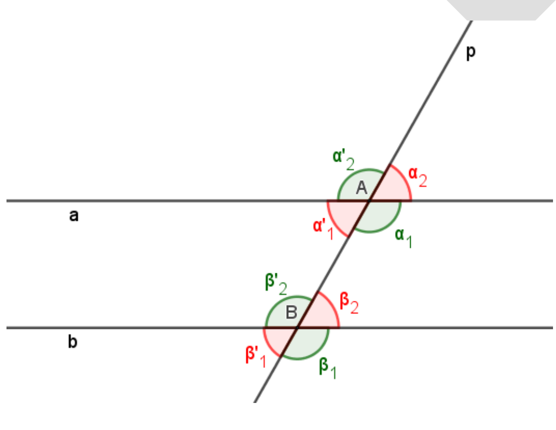
Jsou dány dvě různé navzájem rovnoběžné přímky *a, b* proťaté s nimi různoběžnou přímkou *p* (zvanou **příčka**), která je protíná v bodech *A, B.* Přímky vytvářejí čtyři úhly (α_1, α_2, α'_1, α'_2) s vrcholem *A* a čtyři úhly (β_1, β_2, β'_1, β'_2) s vrcholem *B.* Potom

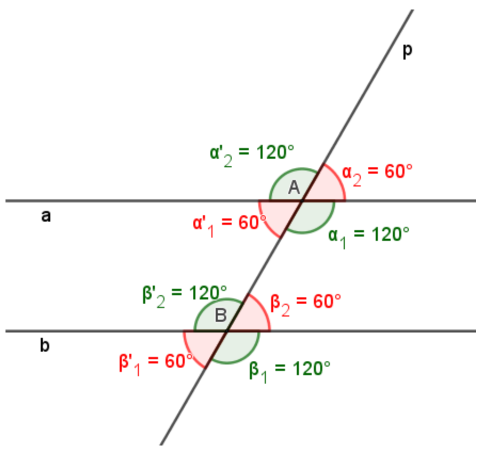
a) **souhlasné úhly** ($\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2$, $\alpha'_1 - \beta'_1$, $\alpha'_2 - \beta'_2$) jsou dva úhly, jejichž jedno rameno leží na jedné přímce – příčce *p* a druhá ramena leží na navzájem rovnoběžných přímkách *a, b,* přitom orientace příslušných ramen je stejná (souhlasná)

b) **střídavé úhly** ($\alpha_1 - \beta'_2$, $\alpha'_1 - \beta_2$, $\alpha_2 - \beta'_1$, $\alpha'_2 - \beta_1$) jsou dva úhly, jejichž jedno rameno leží na jedné přímce – příčce *p* a druhá ramena leží na navzájem rovnoběžných přímkách *a, b*, přitom orientace příslušných ramen je opačná (střídavá), tj. leží na navzájem opačných polopřímkách

c) **přilehlé úhly** ($\alpha_1 - \beta_2$, $\alpha'_1 - \beta'_2$, $\alpha_2 - \beta_1$, $\alpha'_2 - \beta'_1$) leží na téže straně příčky *p* a na opačných „stranách“ vzhledem k přímkám *a, b*.

Každé dva souhlasné úhly i každé dva střídavé úhly jsou shodné.





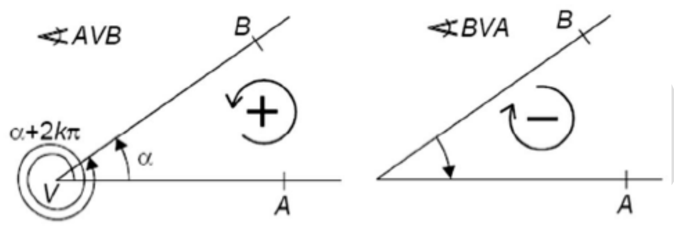
Klasifikace úhlů podle velikosti:

- **nulový úhel** ($\alpha = 0°$)
- **ostrý úhel** ($0° < \alpha < 90°$)
- **pravý úhel** ($\alpha = 90°$)
- **tupý úhel** ($90° < \alpha < 180°$)
- **přímý úhel** ($\alpha = 180°$)
- **nekonvexní úhel** ($180° < \alpha < 360°$)
- **plný úhel** ($\alpha = 360°$)

2.2.6.3 Orientovaný úhel

Orientovaným úhlem v rovině nazýváme uspořádanou dvojici polopřímek *VA, VB* se společným počátkem *V*. Polopřímka *VA,* resp. *VB* se nazývá **počáteční**, resp. **koncové rameno** a bod *V* se nazývá **vrchol orientovaného úhlu.**

Poznámka: Orientovaný úhel není částí roviny, ale skládá se jen ze dvou polopřímek.



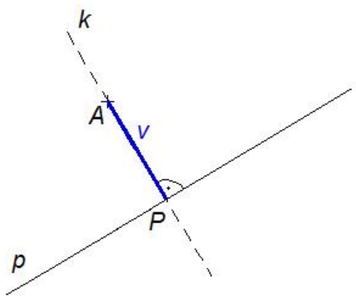
Velikostí orientovaného úhlu rozumíme velikost neorientovaného úhlu, jehož všemi body proběhne počáteční rameno *VA* při otočení do polohy koncového ramena *VB*. Děje-li se otáčení v ***kladném smyslu*** (tj. ***proti směru hodinových ručiček***), je ***velikost úhlu kladná***, v opačném případě je záporná, tedy uskutečňuje-li se otáčení v ***záporném smyslu*** (tj. ***po směru hodinových ručiček***), je ***velikost úhlu záporná***.

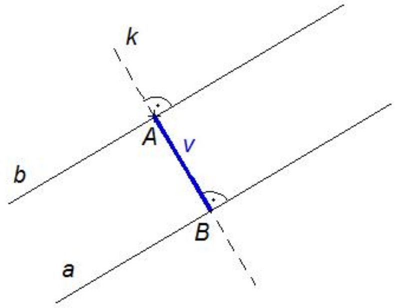
2.2.7 Vzdálenost

Vzdáleností dvou bodů *A, B* rozumíme velikost úsečky *AB* (budeme označovat $|AB|$).

Vzdáleností bodu *A* od přímky *p* nazýváme vzdálenost bodu *A* od paty kolmice vedené z bodu *A* k přímce *p* (budeme označovat $|A, p| = v(A, p)$).

Vzdáleností dvou rovnoběžných přímek *a, b* nazýváme vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky (budeme značit $|a, b| = v(a, b)$).





Vzdálenost dvou splývajících rovnoběžných a **dvou různoběžných** přímek je *nulová*.

2.2.8 Odchylka

Odchylkou dvou přímek *a, b* nazýváme velikost nulového, ostrého nebo pravého úhlu, který má libovolně zvolený vrchol *V* a ramena na přímkách procházejících bodem *V* rovnoběžně s přímkami *a, b* (budeme označovat $|\angle a, b|$).

Poznámka: Z uvedené definice je patrné, že odchylka dvou rovnoběžek *c, d* je $|\angle c, d| = 0°$.

2.2.9 Příklady k procvičování

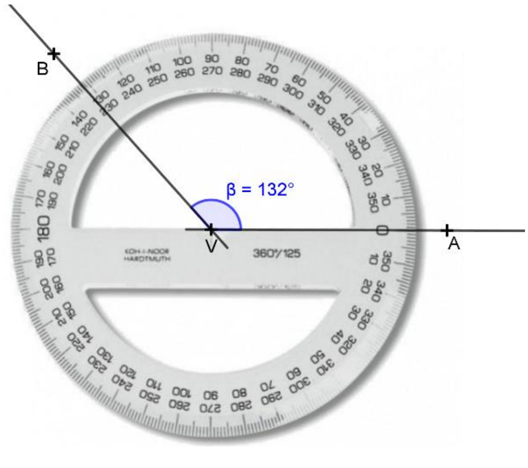
<u>Příklad 2.1:</u>

Načrtněte alespoň jeden konvexní a alespoň jeden nekonvexní útvar.

<u>Příklad 2.2:</u>

Ke každému typu úhlu (podle velikosti) zobrazte do obrázku alespoň jeden příklad a vedle příslušného názvu úhlu napište zobrazenou velikost úhlu:

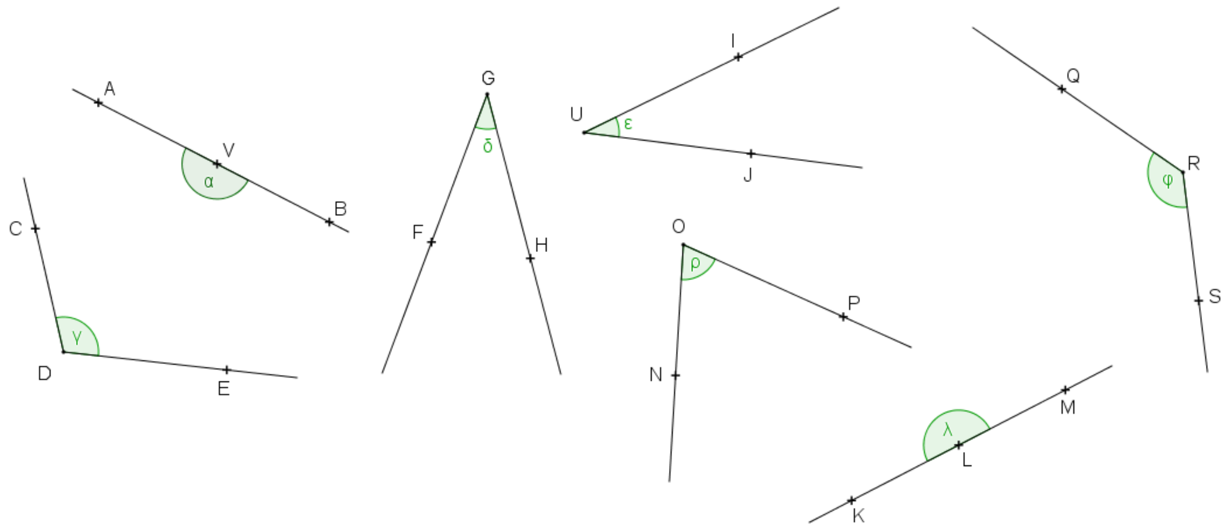
a) pravý úhel
b) plný úhel
c) ostrý úhel
d) nulový úhel
e) tupý úhel
f) přímý úhel



Příklad 2.3:

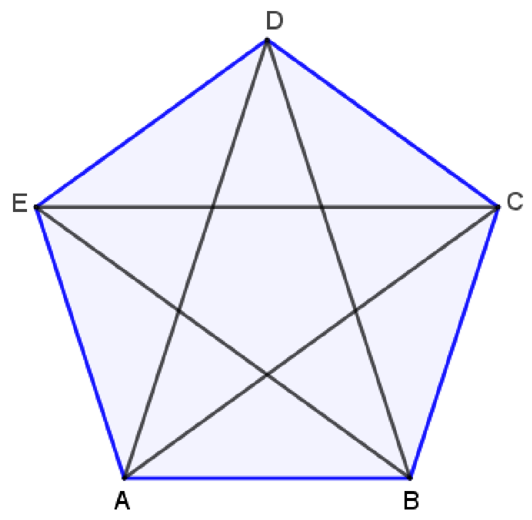
Pomocí řeckých písmen napište, které úhly jsou na obrázku

a) přímé: ______________________
b) ostré: ______________________
c) tupé: _______________________



Příklad 2.4:

Zapište všechny úhly (menší než přímé), které jsou na obrázku určeny vrcholy *A, B, C, D, E* daného pravidelného pětiúhelníku *ABCDE.* Úhly zapište do skupin podle jejich velikosti a skupiny úhlů podle jejich velikosti pojmenujte.



Příklad 2.5:

Narýsujte libovolný úhel *AVB*. Bez pomoci kružítka sestrojte jeho osu. Rozlište případy pro

a) přímý úhel *AVB*,
b) pravý úhel *AVB*,
c) ostrý úhel *AVB*,
d) tupý úhel *AVB*.

Příklad 2.6:

V rovině leží pět přímek. Přímky *a, b* jsou navzájem rovnoběžné různé. Přímky *c, d, e* jsou s přímkami *a, b* různoběžné, přitom přímky *b, c, e* se protínají v bodě *A* a přímky *a, c, d* se protínají v bodě *C*.

Určete velikosti úhlů α, β, γ, δ. Dále vypište dvojice souhlasných, střídavých, vrcholových a vedlejších úhlů, pokud jsou na obrázku označeny.

α = ______

β = ______

γ = ______

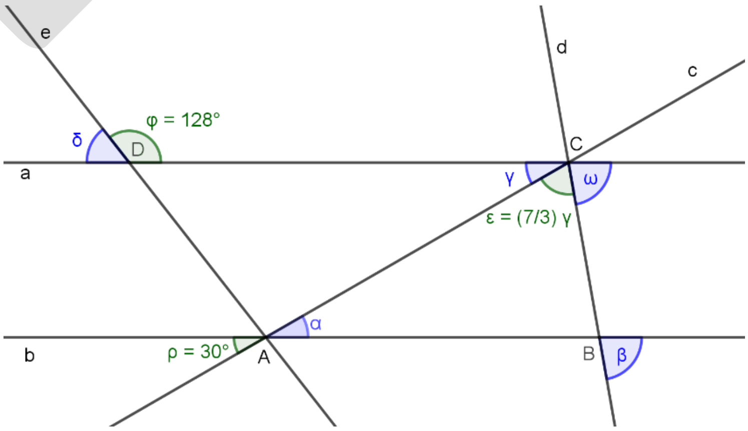
δ = ______

souhlasné úhly: _____________

střídavé úhly: _______________

vrcholové úhly: ______________

vedlejší úhly: ________________



Příklad 2.7:

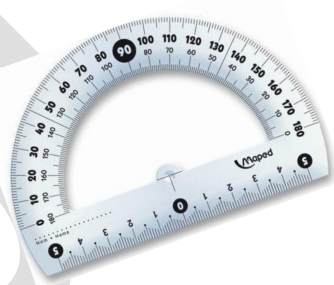
Zkuste dokázat, že součet úhlů v trojúhelníku je v euklidovské geometrii roven 180°.

2.2.10 CLIL v geometrii – typy úhlů podle jejich velikostí

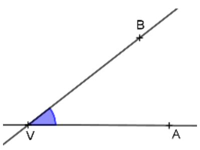
TYPES OF ANGLES ACCORDING TO THEIR SIZES

a protractor – an instrument for measuring angles, typically in the form of a flat semicircle or circle marked with angle degrees along the curved edges

=

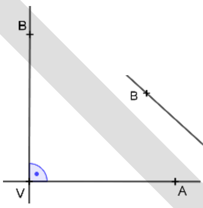


acute angle



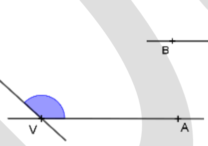
an angle that measures more than 0° and less than 90°

right angle



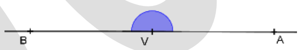
an angle that measures exactly 90°

obtuse angle



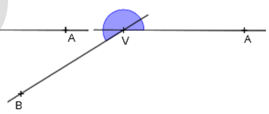
an angle that measures more than 90° and less than 180°

straight angle



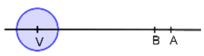
an angle that measures exactly 180°

reflex angle



an angle that measures more than 180° and less than 360°

full angle



an angle that measures exactly 360°