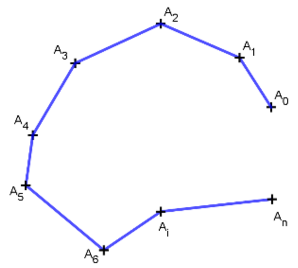
2.3.3 Mnohoúhelníky

2.3.3.1 Zavedení pojmu mnohoúhelník

Pojem mnohoúhelník je možné zavést několika různými způsoby, dále uvedeme některé z nich.

Definice 2.7:
Mnohoúhelník (též *n-úhelník*) je část roviny vymezená úsečkami, které spojují určitý počet bodů (nejméně tři), z nichž žádné tři neleží na jedné přímce.



Poznámka:

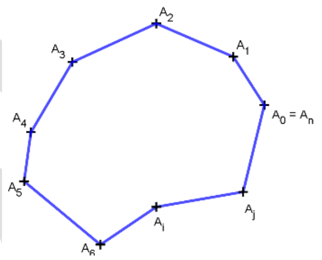
Nechť jsou v rovině dány body A_0, A_1,… , A_n, kde $n \in$ **N**, a nechť sousední úsečky A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$, kde $i \in$ **N**, mají společný pouze jeden krajní bod A_{i+1}, pak sjednocení úseček A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$ nazveme **lomená čára** $A_0A_1…A_n$.

Body A_0, A_1, A_2, …, A_n označujeme jako **vrcholy lomené čáry**. Úsečky A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ nazýváme **stranami lomené čáry**.

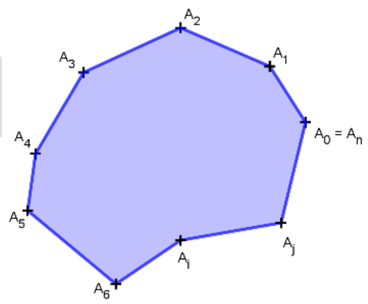
Jestliže $A_0 \equiv A_n$, pak sjednocení úseček A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$, kde $n \in$ **N**, nazveme **uzavřená lomená čára** $A_1A_2…A_n$.

Jestliže žádné dvě nesousední úsečky nemají společný bod, pak sjednocení těchto úseček nazveme **jednoduchá uzavřená lomená čára** $A_1A_2…A_n$.

Jednoduchá uzavřená lomená čára rozdělí body roviny na dvě podmnožiny – vnitřní a vnější oblast.



Definice 2.8:
Sjednocení jednoduché uzavřené lomené čáry $A_0A_1…A_n$ ($A_0 \equiv A_n$, $n \in$ **N**, $n \geq 3$) s její vnitřní oblastí se nazývá ***mnohoúhelník*** (***n-úhelník***) $A_1A_2…A_n$.



Definice 2.9:
Mnohoúhelník (*n-úhelník*) je omezená část roviny ohraničená jednoduchou uzavřenou lomenou čárou.

2.3.3.2 Základní pojmy spojené mnohoúhelníkem

S mnohoúhelníkem jsou spojeny následující pojmy:

- vrcholy mnohoúhelníku – body, které určují mnohoúhelník (body A_1, A_2, …)
- strany mnohoúhelníku – úsečky spojující sousední vrcholy (úsečky A_1A_2, A_2A_3, …, A_iA_{i+1}, …, A_nA_1)
- úhlopříčky mnohoúhelníku – úsečky spojující nesousední vrcholy (úsečky A_1A_3, …, A_iA_j, kde $j \neq i+1$, $i, j \in$ N)
- vnitřní úhly mnohoúhelníku – úhly, které svírají sousední strany (úhly $\angle A_1A_2A_3$, …, $\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}$, $i \in$ N)

Součet velikostí vnitřních úhlů α, β, γ, … mnohoúhelníku (n- úhelníku), kde $n \in$ **N**, určíme na základě platnosti vztahu

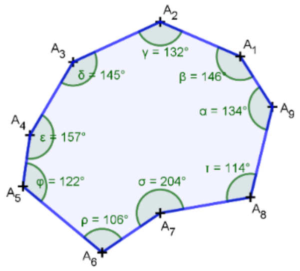
$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = \pi\,(n-2)\ \text{rad}.$$

Chtěli bychom-li vyjádřit součet velikostí vnitřních úhlů ve stupňové míře, pak použijeme převodního vztahu, v němž platí, že

$$1\ \text{rad} \approx 57°\ 17'45''.$$

Vzorový příklad: V případě devítiúhelníku je součet velikostí jeho vnitřních úhlů roven

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \varphi + \rho + \sigma + \tau = 7\pi \text{ rad} \approx 1260°.$$

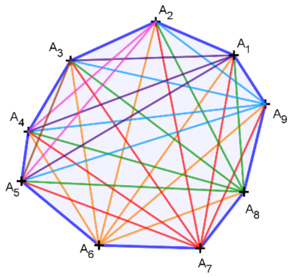


Počet úhlopříček obecného mnohoúhelníku (n-úhelníku), kde $n \in \mathbf{N}$, určíme ze vztahu

$$u = \frac{1}{2} n\,(n-3).$$

Vzorový příklad: V případě devítiúhelníku je počet úhlopříček roven

$$u = 27.$$



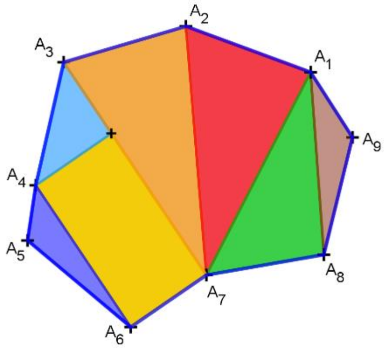
Obvodem mnohoúhelníku rozumíme délku jednoduché uzavřené lomené čáry, která mnohoúhelník v rovině ohraničuje. Obvod o mnohoúhelníku se vypočte jako součet délek všech jeho stran, tj.

$$o = |A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots + |A_iA_{i+1}| + \ldots + |A_nA_1| = a + b + c + \ldots + z,$$

kde $a = |A_1A_2|$, $b = |A_2A_3|$, …, $z = |A_nA_1|$ jsou délky jednotlivých stran mnohoúhelníku (n- úhelníku), $n \in \mathbf{N}$.

Obsahem mnohoúhelníku rozumíme velikost ohraničené plochy, kterou tento mnohoúhelník v rovině zabírá. Obsah S mnohoúhelníku se vypočte pomocí rozložení mnohoúhelníku na vhodné, vzájemně se nepřekrývající trojúhelníky, obdélníky nebo čtverce, jejichž obsahy S_1, S_2, S_3, … se vypočítají podle známých vzorců a tyto obsahy se následně sečtou, tj.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots .$$



Poznámka:

Počet vrcholů, stran a vnitřních úhlů je v jednom mnohoúhelníku stejný. Tento počet určuje název mnohoúhelníku, např. trojúhelník (3 vrcholy, 3 strany a 3 vnitřní úhly), čtyřúhelník (4 vrcholy, 4 strany a 4 vnitřní úhly), pětiúhelník (5 vrcholů, 5 stran a 5 vnitřních úhlů), … .

2.3.3.3 Znázornění a zápis mnohoúhelníku

Mnohoúhelník se znázorňuje pomocí jeho vrcholů a stran, označuje se výčtem vrcholů v jejich přesném pořadí. U speciálních mnohoúhelníků (trojúhelník, čtverec, pětiúhelník, šestiúhelník, …) se v zápise před výčet vrcholů umísťuje příslušný symbol (△, ☐, ⬟, ⬣, …). Vrcholy, strany a vnitřní úhly mnohoúhelníku se zapisují stejným způsobem jako body, úsečky a úhly.

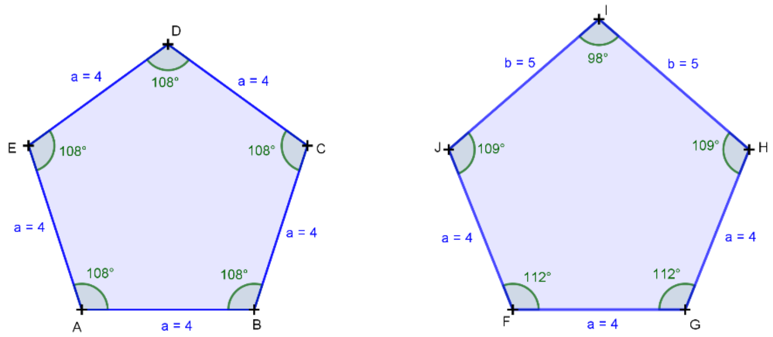
Příklad zápisu šestiúhelníku a jeho jednotlivých prvků:

- šestiúhelník … ⬣ *ABCDEF*
- vrcholy … *A, B, C, D, E, F*
- strany … *AB, BC, CD, DE, EF, FA*
- úhlopříčky … *AC, AD, AE, BD, BE, BF, CE, CF, DF*
- vnitřní úhly … ∠ *FAB*, ∠ *ABC*, ∠ *BCD*, ∠ *CDE*, ∠ *DEF*, ∠ *EFA*

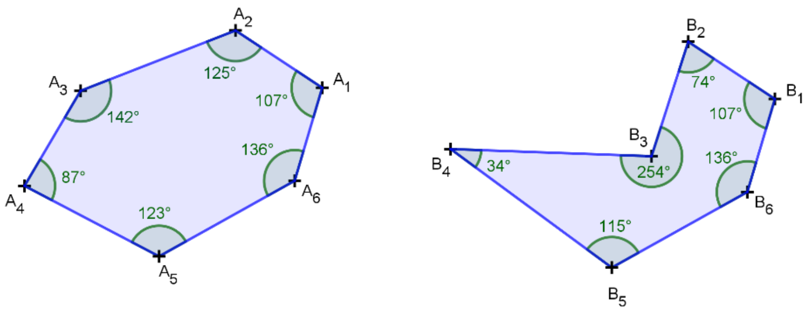
2.3.3.4 Druhy mnohoúhelníků

Kromě mnohoúhelníků, lišících se počtem vrcholů, resp. počtem stran či vnitřních úhlů, se mnohoúhelníky mohou dělit podle následujících kritérií:

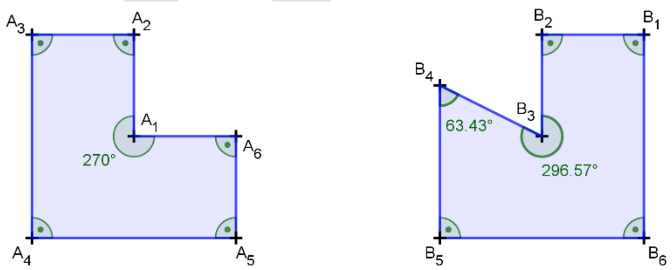
a) **délka stran a velikost vnitřních úhlů mnohoúhelníku**
   a1) **pravidelné** (všechny strany i vnitřní úhly jsou shodné)
   a2) **nepravidelné** (alespoň jedna strana je různě dlouhá než ostatní strany nebo alespoň jeden vnitřní úhel je jinak velký než ostatní vnitřní úhly)



b) **konvexnost/nekonvexnost vnitřních úhlů mnohoúhelníku**
   b1) **konvexní** (všechny vnitřní úhly jsou menší než 180°)
   b2) **nekonvexní** (alespoň jeden vnitřní úhel je větší než 180°)

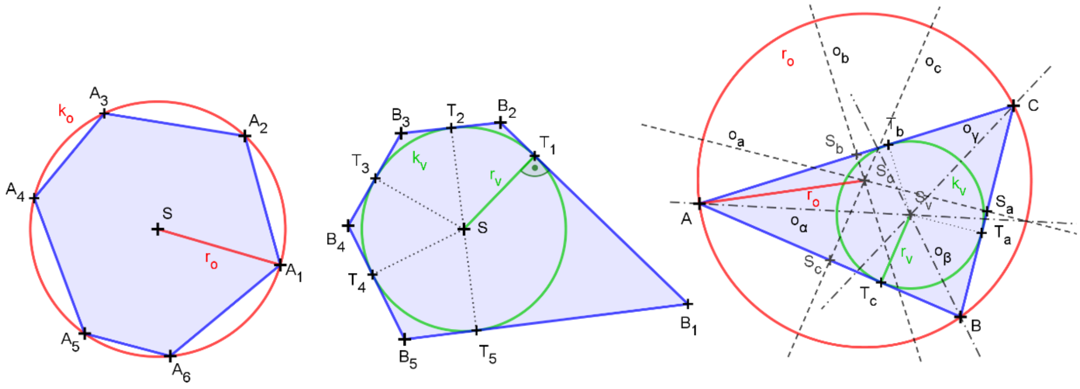


c) **vnitřní úhly mnohoúhelníku jsou pravé/různé od pravých úhlů či úhlů o velikosti 270°**
   c1) **pravoúhelníky** (všechny vnitřní úhly jsou pravé, případně rovny 270°)
   c2) **nepravoúhelníky** (alespoň jeden vnitřní úhel se nerovná pravému úhlu)



d) **mnohoúhelníky, jimž je možné kružnici opsat/vepsat**
   d1) **tětivové mnohoúhelníky** (takové mnohoúhelníky, jimž lze opsat kružnici; tj. existuje taková kružnice, na níž leží všechny vrcholy daného mnohoúhelníku. Říkáme, že je tato kružnice mnohoúhelníku opsaná. Strany tětivového mnohoúhelníku jsou tětivami kružnice mnohoúhelníku opsané.)
   d2) **tečnové mnohoúhelníky** (takové mnohoúhelníky, jimž lze vepsat kružnici; tj. existuje kružnice taková, kterou lze mnohoúhelníku vepsat. Všechny strany mnohoúhelníku se kružnice dotýkají a jsou zároveň tečnami kružnice mnohoúhelníku vepsané.)

d3) **dvojstředové mnohoúhelníky** (takové mnohoúhelníky, jimž lze opsat i vepsat kružnici, přitom středy obou kružnic mohou, ale nemusí splývat. Příkladem dvojstředového mnohoúhelníku jsou např. obecný trojúhelník, ostroúhlý trojúhelník, rovnoramenný trojúhelník, rovnostranný trojúhelník, čtverec a každý pravidelný *n*-úhelník.)



2.3.3.5 Příklady na procvičování

Příklad 2.17:

Kosočtverec je čtyřúhelník, který má všechny strany shodné a přitom není pravidelný. Existuje také

a) trojúhelník,

b) pětiúhelník,

který má všechny strany shodné a přitom není pravidelný?

Je-li Vaše odpověď na jakoukoliv podúlohu kladná, uveďte a nakreslete konkrétní příklad takového obrazce.

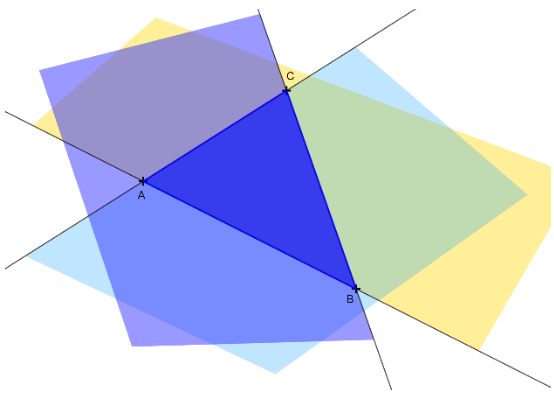
2.3.4 Trojúhelníky

Definice 2.10:

Jsou-li v rovině dány tři nekolineární body *A, B, C*, potom průnik polorovin *ABC, BCA* a *CAB* se nazývá **trojúhelník *ABC***.

2.3.4.1 Znázornění a zápis trojúhelníku

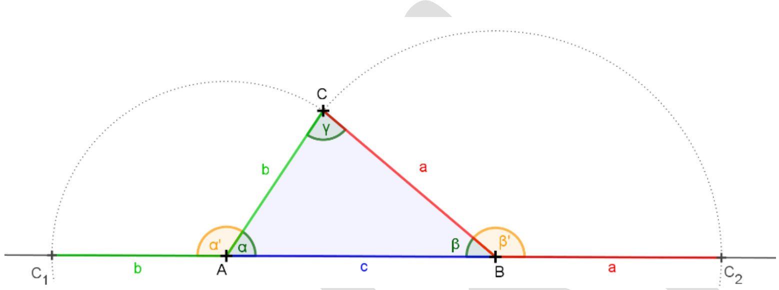
Trojúhelník se znázorňuje pomocí jeho vrcholů a stran. Vrcholy se označují velkým tiskacím písmenem, strany se označují malým písmenem odpovídajícím protějšímu vrcholu, vnitřní úhly se označují malým písmenem řecké abecedy. Trojúhelník se zapisuje symbolem △ následovaným výčtem všech tří jeho vrcholů, tj. např. △ *ABC*.



2.3.4.2 Základní pojmy související s trojúhelníkem

- body *A, B, C* se nazývají **vrcholy** trojúhelníku,
- úsečky spojující sousední vrcholy, tj. úsečky $a \equiv BC$, $b \equiv AC$ a $c \equiv AB$, se nazývají **strany** trojúhelníku,
- úhly, které spolu svírají dvě sousední strany trojúhelníku, se nazývají **vnitřní úhly** trojúhelníku *ABC;* jsou to úhly $\alpha = |\angle CAB|$, $\beta = |\angle ABC|$, $\gamma = |\angle BCA|$,
- úhly vedlejší k vnitřním úhlům trojúhelníku se nazývají **vnější úhly** trojúhelníku,
- každý trojúhelník má 3 vrcholy, 3 strany, 3 vnitřní úhly a 6 vnějších úhlů (u každého vrcholu dva shodné vnější úhly),
- trojúhelník nemá úhlopříčky,
- sjednocení stran trojúhelníku tvoří jeho **obvod**. Obvod *o* trojúhelníku vypočteme součtem délek jeho stran, tj.

$$o = a + b + c,$$



- body trojúhelníku nenáležící jeho obvodu jsou **body vnitřku trojúhelníku**, body nenáležící trojúhelníku jsou body vnějšku trojúhelníku,
- **obsah** *S* trojúhelníku se vypočte jako polovina součinu délky libovolné strany trojúhelníku a k ní příslušné výšky, tj.

$$S = \frac{1}{2}\, a\, v_a = \frac{1}{2}\, b\, v_b = \frac{1}{2}\, c\, v_c\,.$$

2.3.4.3 Konstrukce trojúhelníku

Pro úspěšné sestrojení trojúhelníku je nutné, aby vždy platila tzv**. trojúhelníková nerovnost**: „Součet délek dvou kratších stran trojúhelníku je větší než délka třetí strany téhož trojúhelníku."

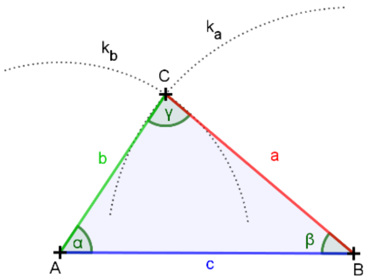
Je-li dán $\triangle ABC$ se stranami *a, b, c*, pak trojúhelníkovou nerovnost můžeme symbolicky zapsat následovně:

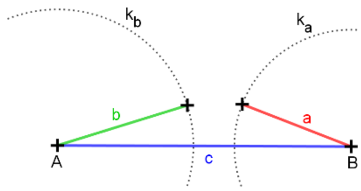
$$a + b > c,\ a + c > b \text{ nebo } b + c > a.$$

Důsledkem trojúhelníkové nerovnosti je tvrzení: „Rozdíl délek dvou stran trojúhelníku je menší než délka třetí strany téhož trojúhelníku."

Je-li dán $\triangle ABC$ se stranami *a, b, c*, pak důsledek trojúhelníkové nerovnosti můžeme symbolicky zapsat ve tvaru:

$$|a - b| < c,\ |a - c| < b \text{ nebo } |b - c| < a.$$

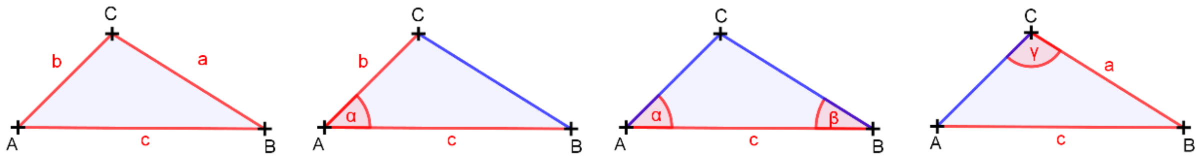




Trojúhelník může být určen:

- délkami všech tří jeho stran (věta **sss**),

- délkami dvou jeho stran a velikostí úhlu, který tyto dvě jeho strany svírají (věta **sus**),
- délkou jedné jeho strany a velikostmi dvou jeho vnitřních úhlů, které k této jeho jedné straně přiléhají (věta **usu**),
- délkami dvou jeho stran a velikostí úhlu proti větší z nich (věta **Ssu**).



Ke konstrukci trojúhelníku se mohou použít ale i výšky trojúhelníku, těžnice trojúhelníku, poloměr kružnice trojúhelníku opsané či vepsané atd.

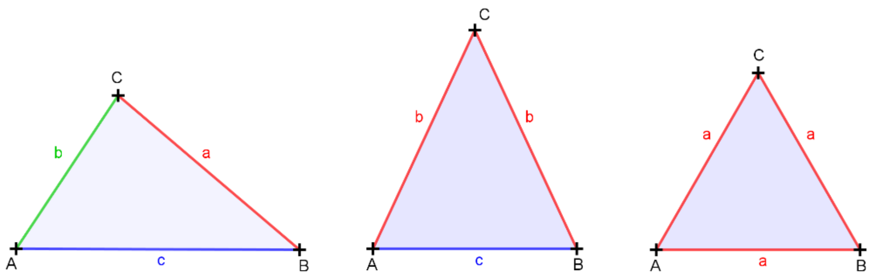
2.3.4.4 Vlastnosti trojúhelníků

Následují důležité vlastnosti platné pro trojúhelníky:

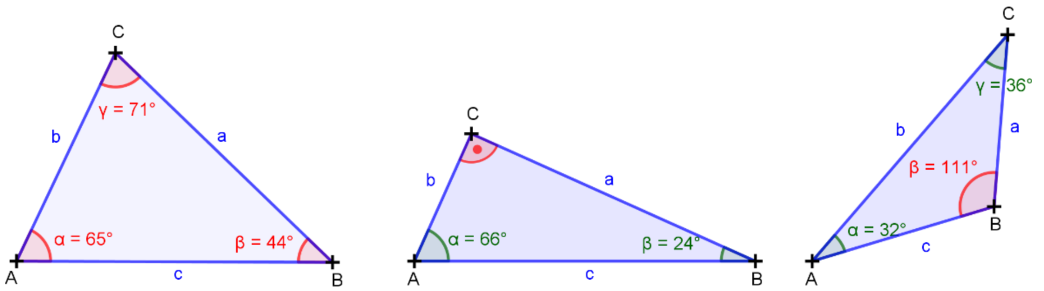
- součet velikostí všech *vnitřních úhlů* je v každém trojúhelníku 180°,
- součet vnitřního a příslušného vnějšího úhlu trojúhelníku je 180°,
- součet velikostí dvou vnitřních úhlů trojúhelníku se rovná velikosti vnějšího úhlu u zbývajícího vrcholu téhož trojúhelníku,
- proti většímu úhlu leží delší strana trojúhelníku.

2.3.4.5 Dělení trojúhelníků

- **podle velikostí stran:**
  - **různostranné/obecné** (žádné dvě strany trojúhelníku nejsou shodné, tj. např. $a \neq b \neq c$)
  - **rovnoramenné** (dvě strany trojúhelníku jsou navzájem shodné, ale nejsou shodné s jeho třetí stranou, tj. např. $a = b \neq c$)
  - **rovnostranné** (všechny tři strany trojúhelníku jsou shodné, tj. např. $a = b = c$)

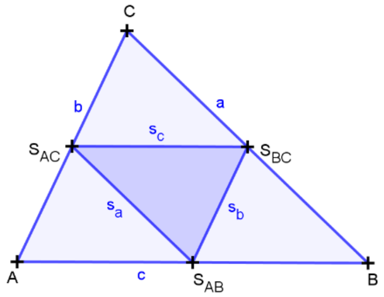


- **podle velikostí vnitřních úhlů:**
  - **ostroúhlé** (všechny vnitřní úhly trojúhelníku jsou ostré, tj. např. $0° < \{\alpha, \beta, \gamma\} < 90°$)
  - **pravoúhlé** (právě jeden vnitřní úhel trojúhelníku je pravý, zbývající dva vnitřní úhly trojúhelníku jsou ostré, tj. např. $0° < \{\alpha, \beta\} < 90°$, $\gamma = 90°$)
  - **tupoúhlé** (právě jeden vnitřní úhel trojúhelníku je tupý, zbývající dva vnitřní úhly trojúhelníku jsou ostré, tj. např. $0° < \{\alpha, \beta\} < 90°$, $90° < \gamma < 180°$)

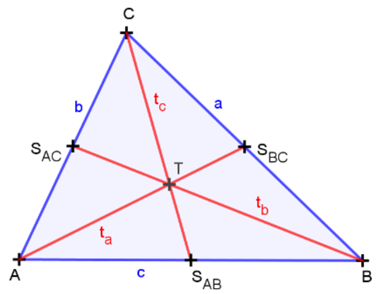


2.3.4.6 Důležité úsečky, přímky a body v trojúhelníku

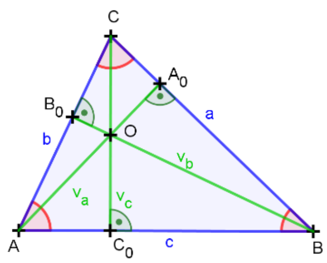
- **střední příčka**
  - **střední příčka** je spojnice středů dvou stran trojúhelníku,
  - každý trojúhelník má tři střední příčky,
  - střední příčka je rovnoběžná se stranou, jejímž středem neprochází, a má délku rovnou polovině délky této strany,
  - střední příčky rozdělují trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky – tzv. **příčkový trojúhelník** a tři trojúhelníky při jednotlivých vrcholech,
  - těžiště trojúhelníku je zároveň těžištěm jeho příčkového trojúhelníku,
  - střední příčky se zpravidla označují malým písmenem *s*.

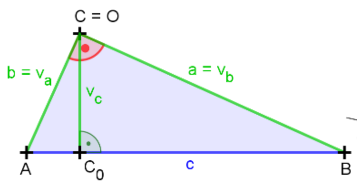


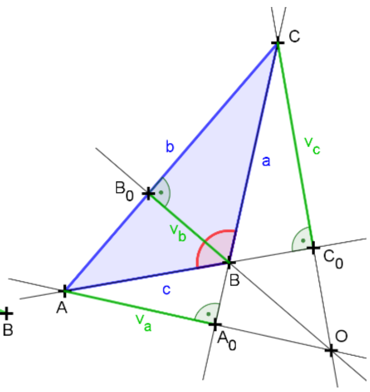
- **těžnice a těžiště**
  - **těžnice** trojúhelníku je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany;
  - každý trojúhelník má právě tři těžnice, značíme např. t_a, t_b, t_c;
  - těžnice se protínají v jednom bodě, který se nazývá **těžiště**;
  - těžiště se označuje písmenem *T*;
  - těžiště vždy náleží vnitřku trojúhelníku;
  - těžiště rozděluje každou těžnici na dva díly v poměru 2 : 1, přitom vzdálenost těžiště od vrcholu trojúhelníku je dvojnásobek vzdálenosti těžiště od středu protější strany, tj. např. $|TA| = 2|S_{BC}T|$, $|TB| = 2|S_{AC}T|$ nebo $|TC| = 2|S_{AB}T|$. Jinými slovy řečeno, vzdálenost těžiště od vrcholu je rovna dvěma třetinám délky příslušné těžnice;
  - každá těžnice rozděluje trojúhelník na dvě části se *stejným obsahem*;
  - těžiště a dva vrcholy trojúhelníku tvoří postupně tři trojúhelníky ($\triangle ABT$, $\triangle ACT$, $\triangle CBT$), všechny tři trojúhelníky mají *stejný obsah*.



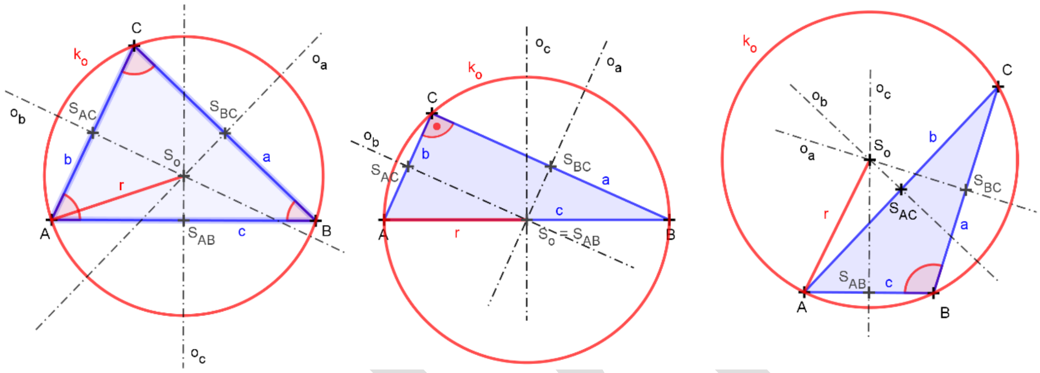
- **výška, pata výšky a ortocentrum**
  - **výška trojúhelníku** je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem k přímce, na níž leží protější strana trojúhelníku;
  - průsečík výšky s příslušnou přímkou, na níž leží strana trojúhelníku, ke které je výška kolmá, se nazývá **pata výšky**;
  - každý trojúhelník má právě tři výšky, značíme je např. v_a, v_b, v_c;
  - přímky, na nichž leží výšky trojúhelníku, se protínají v jednom bodě, který se nazývá **ortocentrum**;
  - ortocentrum
    a) leží uvnitř trojúhelníku, pokud je trojúhelník ostroúhlý,
    b) splývá s vrcholem, při němž je pravý úhel, pokud je trojúhelník pravoúhlý,
    c) leží vně trojúhelníku, pokud je trojúhelník tupoúhlý.





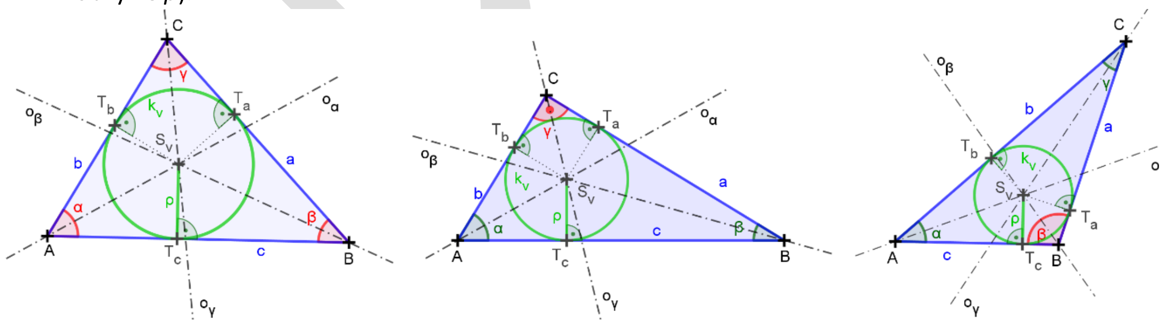


- **osy stran a střed kružnice trojúhelníku opsané**
  - **osa strany** trojúhelníku je kolmice vedená středem příslušné strany trojúhelníku;
  - každý trojúhelník má právě tři osy stran, značíme je např. o_a, o_b, o_c;
  - osy stran se protínají právě v jednom bodě, tento bod má stejnou vzdálenost od všech tří vrcholů trojúhelníku, je tedy středem kružnice trojúhelníku opsané;
  - střed kružnice trojúhelníku opsané
    a) leží uvnitř trojúhelníku, pokud je trojúhelník ostroúhlý,
    b) splývá se středem přepony, pokud je trojúhelník pravoúhlý (Thaletova kružnice),
    c) leží vně trojúhelníku, pokud je trojúhelník tupoúhlý;



  - **kružnice trojúhelníku opsaná** prochází všemi vrcholy trojúhelníku (poloměr kružnice trojúhelníku opsané se tedy rovná vzdálenosti jejího středu od libovolného vrcholu trojúhelníku, značíme jej obvykle *r*).

- **osy vnitřních úhlů a střed kružnice trojúhelníku vepsané**
  - **osa vnitřního úhlu** trojúhelníku dělí příslušný vnitřní úhel na dvě shodné poloviny a současně dělí protější stranu v poměru délek přilehlých stran;
  - každý trojúhelník má právě tři osy vnitřních úhlů, značíme je např. $o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$, jsou-li vnitřní úhly trojúhelníku označeny α, β, γ;
  - osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají právě v jednom bodě, který je středem kružnice trojúhelníku vepsané;
  - střed kružnice trojúhelníku vepsané leží vždy uvnitř trojúhelníku;
  - střed kružnice trojúhelníku vepsané má stejnou vzdálenost od všech tří stran trojúhelníku, tj. **kružnice trojúhelníku vepsaná** se dotýká všech stran trojúhelníku (poloměr kružnice trojúhelníku vepsané se tedy rovná vzdálenosti jejího středu od libovolné strany trojúhelníku, značíme jej obvykle ρ).



2.3.4.7 Speciální typy trojúhelníků a jejich vlastnosti

V tomto paragrafu zmíníme některé důležité vlastnosti, které se týkají dvou speciálních typů trojúhelníků:

a) rovnostranný trojúhelník

Kromě vlastností, které jsou společné pro každý trojúhelník, má rovnostranný trojúhelník ještě navíc tyto následující vlastnosti:

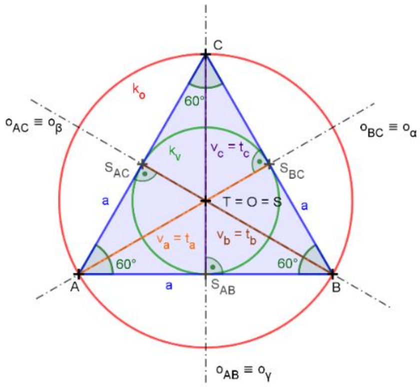
- je osově souměrný podle 3 os souměrnosti, ty jsou osami stran rovnostranného trojúhelníku a procházejí vždy vrcholem rovnostranného trojúhelníku a středem jeho protější strany;
- všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné a velikost každého z nich je 60°;
- všechny jeho výšky a těžnice jsou shodné;
- těžnice a výška příslušné k téže straně jsou totožné (splývající);
- střed kružnice rovnostrannému trojúhelníku vepsané, střed kružnice rovnostrannému trojúhelníku opsané, průsečík těžnic (těžiště) a průsečík výšek (ortocentrum) splývají;
- poloměr ρ kružnice rovnostrannému trojúhelníku vepsané je roven jedné třetině výšky v, resp. těžnice t, tj.

$$\rho = \frac{1}{3} v = \frac{1}{3} t = \frac{\sqrt{3}}{6} a\,,$$

  kde a je délka strany rovnostranného trojúhelníku;
- poloměr r kružnice rovnostrannému trojúhelníku opsané je dvakrát větší než poloměr ρ kružnice témuž rovnostrannému trojúhelníku vepsané, tj.

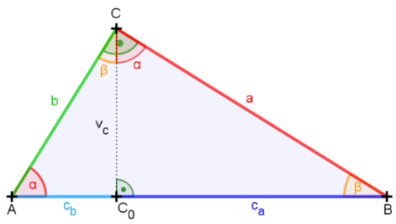
$$r = 2\,\rho = \frac{2}{3} v = \frac{2}{3} t = \frac{\sqrt{3}}{3} a\,;$$

- vzdálenost těžiště od libovolné strany rovnostranného trojúhelníku je taktéž $\frac{\sqrt{3}}{6} a$, vzdálenost těžiště od jakéhokoli vrcholu je $\frac{\sqrt{3}}{3} a$.



b) pravoúhlý trojúhelník

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C nazýváme strany a, b **odvěsny** a stranu c **přepona**. Pata C_0 výšky v_c rozděluje stranu c na dvě úsečky AC_0, resp. C_0B, které nazýváme **úseky přilehlé** k odvěsně b, resp. k odvěsně a a značíme c_b, resp. c_a.



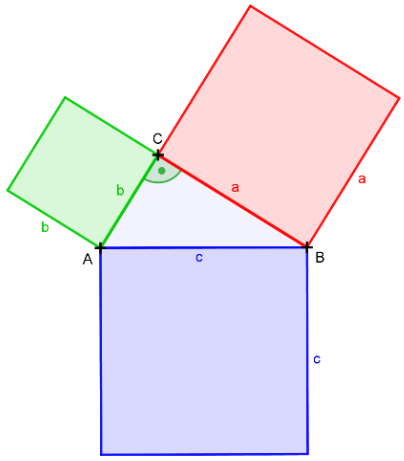
V pravoúhlém trojúhelníku platí:

- **Pythagorova věta**

  Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu velikostí obsahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami.

  Pro △ ABC s pravým úhlem při vrcholu C můžeme Pythagorovu větu zapsat symbolicky ve tvaru:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

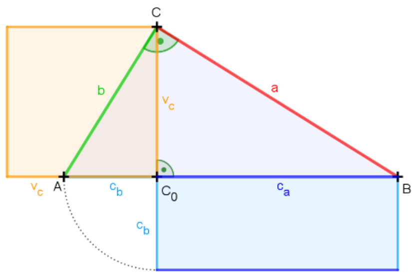


- **Eukleidova věta o výšce**

  Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z úseků přepony.

  Pro △ ABC s pravým úhlem při vrcholu C můžeme Eukleidovu větu o výšce zapsat symbolicky např. ve tvaru:

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b.$$



- **Eukleidova věta o odvěsně**

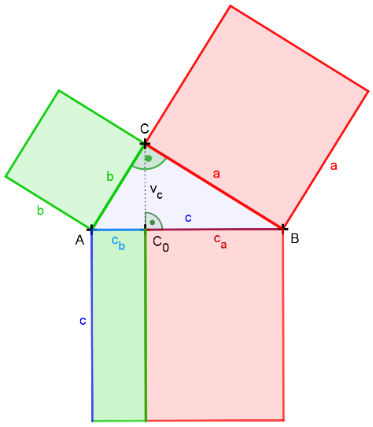
  Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku, jehož jednou stranou je přepona a druhá strana je shodná s úsekem přepony přilehlým k této odvěsně.

Pro △ *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C* můžeme Eukleidovu větu o odvěsně zapsat symbolicky např. ve tvaru:

$$a^2 = c \cdot c_a,$$

anebo ve tvaru

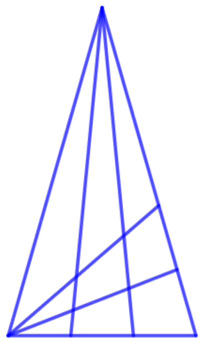
$$b^2 = c \cdot c_b.$$



2.3.4.8 Příklady na procvičování

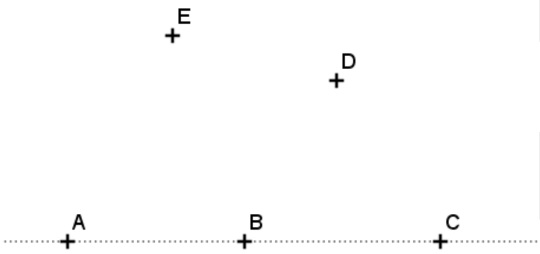
Příklad 2.18:

Určete, kolik trojúhelníků je na obrázku.



Příklad 2.19:

V rovině je dáno pět různých bodů *A, B, C, D, E*, z nichž právě tři body *A, B, C* leží v jedné přímce, viz obrázek. Kolik trojúhelníků (s vrcholy v daných bodech) je jimi určeno? Zobrazte a zapište všechny takové možné trojúhelníky.

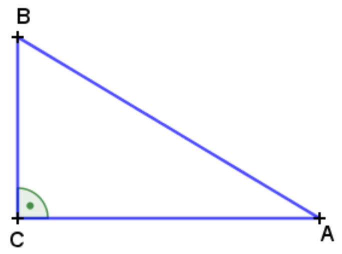


Příklad 2.20:

Narýsujte 4 přímky tak, aby jimi byly určeny 4 trojúhelníky.

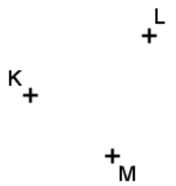
Příklad 2.21:

Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník a rozdělte ho na dva rovnoramenné trojúhelníky.



Příklad 2.22:

V rovině jsou dány tři nekolineární body *K, L, M*. Sestrojte trojúhelník *ABC* tak, aby body *K, L, M* byly středy jeho stran.



Příklad 2.23:

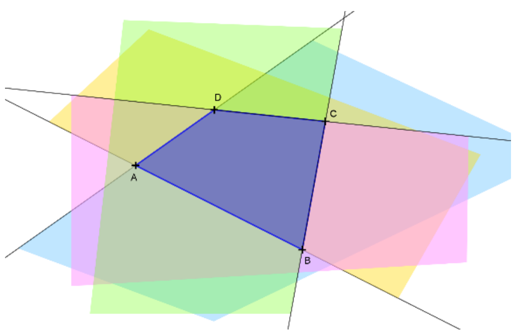
Narýsujte kružnici *k* (*S*, *r* = 3 cm) a její vnější přímku *AB*. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník *ABC* se základnou *AB* tak, aby bod *C* ležel na kružnici *k*. Určete všechny možnosti řešení úlohy.

2.3.5 Čtyřúhelníky

Pojem čtyřúhelník je možné zavést několika různými způsoby, dále uvedeme dva z nich.

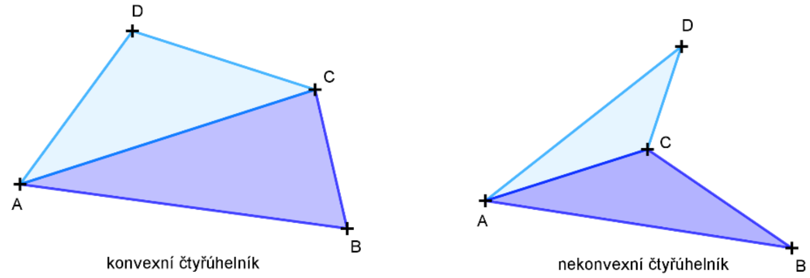
Definice 2.11:

Obecným konvexním čtyřúhelníkem *ABCD* rozumíme průnik čtyř polorovin → *ABC,* → *BCD,* → *CDA,* → *DAB,* jestliže žádné tři body *A, B, C, D* nejsou kolineární.



Definice 2.12:

Čtyřúhelníkem *ABCD* nazýváme sjednocení dvou trojúhelníků *ACB, ACD* ležících v navzájem opačných polorovinách s hraniční přímkou *AC*, jestliže žádné tři body *A, B, C, D* nejsou kolineární.

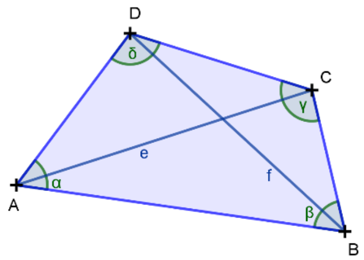


Uvedená definice 2.12 čtyřúhelníku připouští, že daný útvar může být i nekonvexní. Nekonvexními čtyřúhelníky se ale zabývat nebudeme, proto pod názvem čtyřúhelník budeme nadále rozumět vždy jen čtyřúhelník konvexní – v opačném případě nekonvexnost čtyřúhelníku zdůrazníme.

2.3.5.1 Základní pojmy související se čtyřúhelníkem

V tomto paragrafu je sestaven přehled základních pojmů souvisejících se čtyřúhelníkem:

- body *A, B, C, D* se nazývají **vrcholy** čtyřúhelníku *ABCD*;
- úsečky spojující sousední vrcholy čtyřúhelníku, tj. úsečky *a = AB*, *b = BC*, *c = CD* a *d = DA,* se nazývají **strany** čtyřúhelníku *ABCD*;
- úhly, které svírají vždy dvě sousední strany čtyřúhelníku, se nazývají **vnitřní úhly** čtyřúhelníku *ABCD;* jsou to úhly $\alpha = |\angle DAB|$, $\beta = |\angle ABC|$, $\gamma = |\angle BCD|$, $\delta = |\angle CDA|$;
- úsečky spojující protější vrcholy čtyřúhelníku, tj. úsečky *e = AC*, *f = BD*, se nazývají **úhlopříčky** čtyřúhelníku *ABCD*;
- každý čtyřúhelník má 4 vrcholy, 4 strany, 4 vnitřní úhly a 2 úhlopříčky;



- sjednocení stran čtyřúhelníku tvoří jeho **obvod**. Obvod *o* čtyřúhelníku vypočteme součtem délek jeho stran, tj.

$$o = a + b + c + d;$$

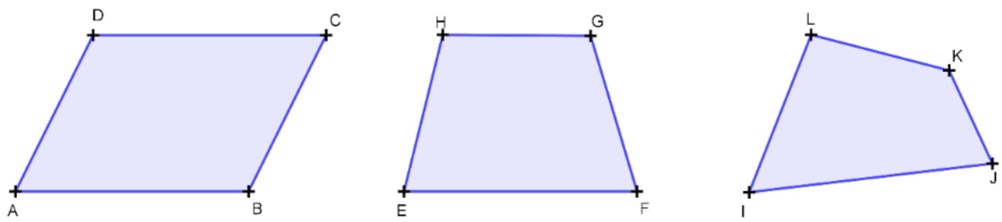
- body čtyřúhelníku nenáležící jeho obvodu jsou **body vnitřku čtyřúhelníku**, body nenáležící čtyřúhelníku jsou body vnějšku čtyřúhelníku;
- velikosti **obsahů** *S* jednotlivých čtyřúhelníků počítáme dle specifických vzorců.

2.3.5.2 Dělení konvexních čtyřúhelníků

Konvexní čtyřúhelníky lze třídit podle několika kritérií, tj. podle:

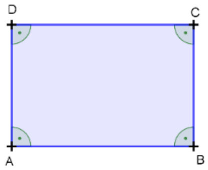
a) počtu rovnoběžných stran

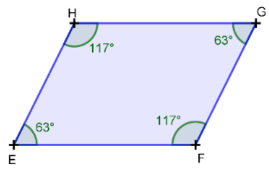
- **rovnoběžníky** (dvě dvojice navzájem rovnoběžných stran)
- **lichoběžníky** (jedna dvojice navzájem rovnoběžných stran)
- **různoběžníky** (žádná dvojice navzájem rovnoběžných stran)



b) velikostí vnitřních úhlů

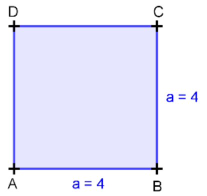
- **pravoúhelníky** (všechny vnitřní úhly jsou pravé)
- **kosoúhelníky** (vnitřní úhly jsou ostré nebo tupé)

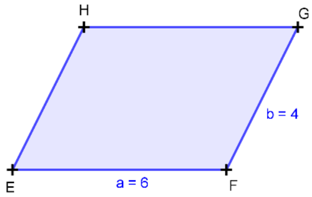




c) délek stran

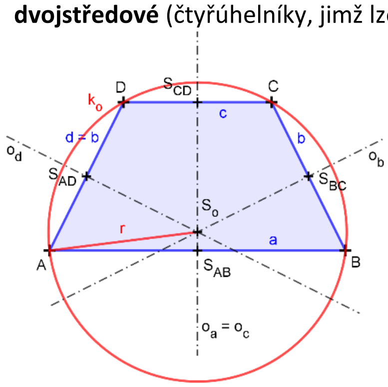
- **rovnostranné** (všechny strany jsou shodné)
- **různostranné** (alespoň dvě strany jsou různě dlouhé)
- **rovnoramenné** (pouze v případě lichoběžníku)

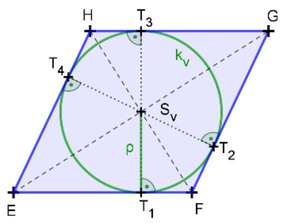


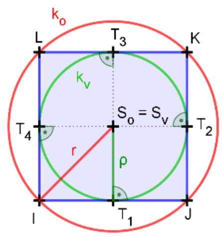


d) kružnice, kterou jim je možné opsat/vepsat

- **tětivové** (čtyřúhelníky, jimž lze kružnici opsat)
- **tečnové** (čtyřúhelníky, jimž lze kružnici vepsat)
- **dvojstředové** (čtyřúhelníky, jimž lze kružnici vepsat i opsat)







2.3.5.3 Přehled známých konvexních čtyřúhelníků

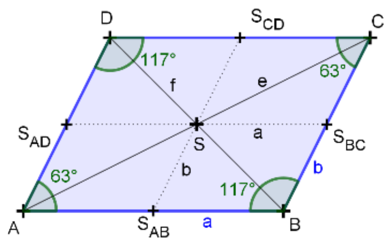
Konvexní čtyřúhelníky a jejich roztřídění podle počtu navzájem rovnoběžných stran a podle velikostí vnitřních úhlů:

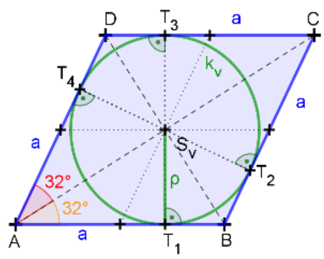
A) rovnoběžníky ($a \parallel c \wedge b \parallel d$)

A1) kosoúhelníky ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 90°$)

- kosodélník ($a = c \wedge b = d \wedge a \neq b$)

- kosočtverec ($a = b = c = d$)

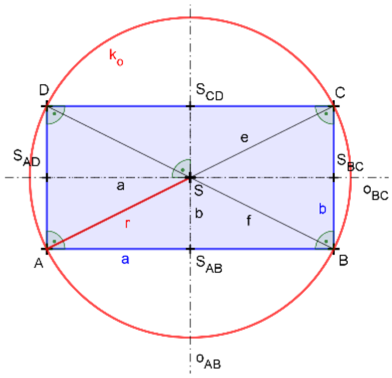


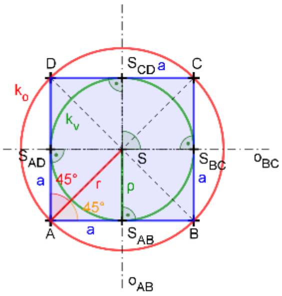


A2) pravoúhelníky ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$)

- **obdélník** ($a = c \wedge b = d \wedge a \neq b$)

- **čtverec** ($a = b = c = d$)





Vlastnosti kosodélníku (rovnoběžníku):

- čtyřúhelník, ve kterém jedna dvojice protějších stran jsou shodné a navzájem rovnoběžné úsečky, je kosodélník;
- protější strany kosodélníku jsou shodné úsečky. Obráceně, jestliže ve čtyřúhelníku jsou protější strany shodné, potom je to kosodélník;
- úhlopříčky kosodélníku se navzájem půlí, takže kosodélník je středově souměrný útvar. Obráceně, jestliže se úhlopříčky čtyřúhelníku navzájem půlí, pak je to kosodélník;
- součet úhlů přilehlých ke kterékoli straně kosodélníku je 180°;
- protější úhly kosodélníku jsou shodné;
- střední příčka kosodélníku prochází jeho středem, je rovnoběžná s těmi stranami kosodélníku, jejichž středy nespojuje, a je shodná s každou z nich;
- obvod kosodélníku vypočteme ze vzorce
$$o = 2 \cdot (a + b),$$
kde *a*, *b* jsou délky stran kosodélníku;
- obsah kosodélníku vypočteme ze vzorce
$$S = a \cdot v_a,$$
kde *a* je délka strany kosodélníku a v_a je velikost výšky kosodélníku k této straně.

Vlastnosti kosočtverce:

- úhlopříčky kosočtverce jsou k sobě kolmé. Obráceně, kosodélník, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé, je kosočtverec nebo čtverec;
- kosočtverec má dvě osy souměrnosti; jsou to přímky, ve kterých leží jeho úhlopříčky. Obráceně, kosodélník, který má za osu souměrnosti přímku procházející jeho protějšími vrcholy, je kosočtverec nebo čtverec;
- úhlopříčka kosočtverce půlí jeho úhly při vrcholech, z nichž vychází. Obráceně, kosodélník, jehož jedna úhlopříčka půlí jeho úhel při vrcholu, z něhož vychází, je kosočtverec nebo čtverec;
- ze středu kosočtverce lze sestrojit kružnici, která se dotýká všech jeho stran (kružnice kosočtverci vepsaná). Obráceně, jestliže lze kosodélníku vepsat kružnici, pak je to kosočtverec nebo čtverec;
- obvod kosočtverce vypočteme ze vzorce
$$o = 4 \cdot a,$$
kde *a* je délka strany kosočtverce;
- obsah kosočtverce vypočteme ze vzorců
$$S = a \cdot v = \frac{1}{2} e \cdot f,$$
kde *a* je délka strany kosočtverce a *v* je velikost výšky kosočtverce, resp. *e, f* jsou délky úhlopříček kosočtverce.

Vlastnosti obdélníku:

- kosodélník, jehož alespoň jeden úhel je pravý a který má shodné úhlopříčky, je obdélník;
- obdélník má dvě osy souměrnosti; jsou to přímky, ve kterých leží střední příčky obdélníku;
- obdélník je středově souměrný podle svého středu;

- jeho úhlopříčky jsou shodné a navzájem se půlí;
- ze středu obdélníku lze opsat kružnici, která prochází všemi jeho vrcholy (kružnice obdélníku opsaná);
- obvod obdélníku vypočteme ze vzorce

$$o = 2 \cdot (a + b),$$

  kde *a*, *b* jsou délky stran obdélníku;
- obsah obdélníku vypočteme ze vzorce

$$S = a \cdot b,$$

  kde *a, b* jsou délky stran obdélníku.

Vlastnosti čtverce:

- jeho protější strany jsou navzájem rovnoběžné;
- má shodné všechny čtyři strany;
- všechny čtyři jeho vnitřní úhly jsou pravé;
- je souměrný podle svého středu a podle čtyř os (úhlopříček a středních příček);
- jeho úhlopříčky se navzájem půlí;
- jeho úhlopříčky i jeho střední příčky jsou k sobě navzájem kolmé;
- úhlopříčky svírají se stranami čtverce úhly o velikosti 45˚;
- čtverci lze opsat i vepsat kružnici (je příkladem dvojstředového čtyřúhelníku)
- obvod čtverce vypočteme ze vzorce

$$o = 4 \cdot a,$$

  kde *a* je délka strany čtverce;
- obsah čtverce vypočteme ze vzorců

$$S = a^2 = \frac{1}{2}u^2,$$

  kde *a* je délka strany čtverce, resp. *u* je délka úhlopříčky čverce.

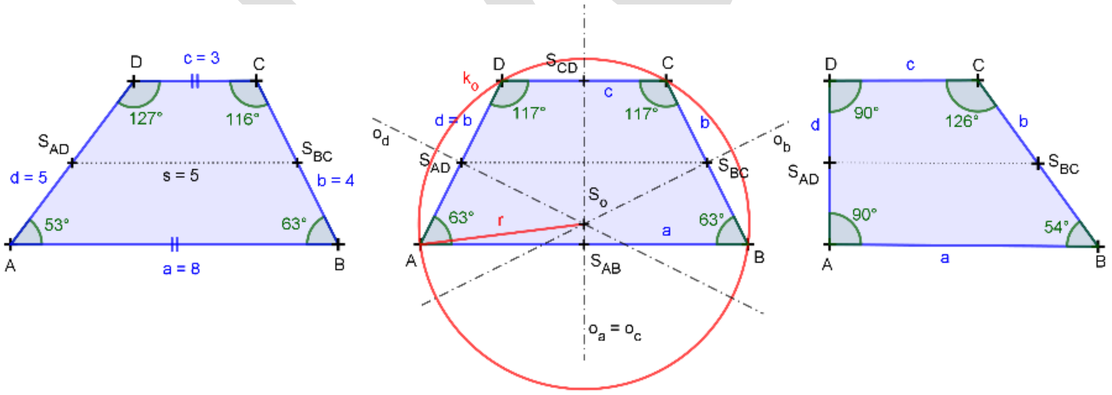
B) lichoběžníky ($a \parallel c \wedge b \nparallel d$)

– strany *a, c* nazýváme **základny** a strany *b, d* **ramena** lichoběžníku

B1) obecný

B2) rovnoramenný ($b = d$)

B3) pravoúhlý ($\alpha = 90°$)



Vlastnosti lichoběžníku (*ABCD* se základnami $|AB| > |CD|$ platí)**:**

- součet úhlů přilehlých k témuž rameni lichoběžníku je 180°;
- střední příčka lichoběžníku je rovnoběžná se základnami lichoběžníku a její délka je rovna velikosti polovičního součtu délek obou základen;
- obvod lichoběžníku vypočteme ze vzorce

$$o = a + b + c + d,$$

  kde *a, b, c, d* jsou délky stran lichoběžníku;

- obsah lichoběžníku vypočteme ze vzorců

$$S = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v = s \cdot v\,,$$

kde *a, b* jsou délky základen lichoběžníku a *v* je velikost výšky lichoběžníku, resp. *s* je délka střední příčky lichoběžníku, pro jejíž délku platí, že

$$s = \frac{1}{2}(a + c).$$

Vlastnosti rovnoramenného lichoběžníku (*ABCD* se základnami $|AB| > |CD|$ platí)**:**

- v rovnoramenném lichoběžníku jsou úhly při téže základně shodné; při delší základně jsou ostré, při kratší základně jsou tupé. Obráceně, jestliže jsou v lichoběžníku oba úhly při téže základně shodné, je to rovnoramenný lichoběžník;
- společná osa obou základen rovnoramenného lichoběžníku je jeho osou souměrnosti.

Pravoúhlý lichoběžník:

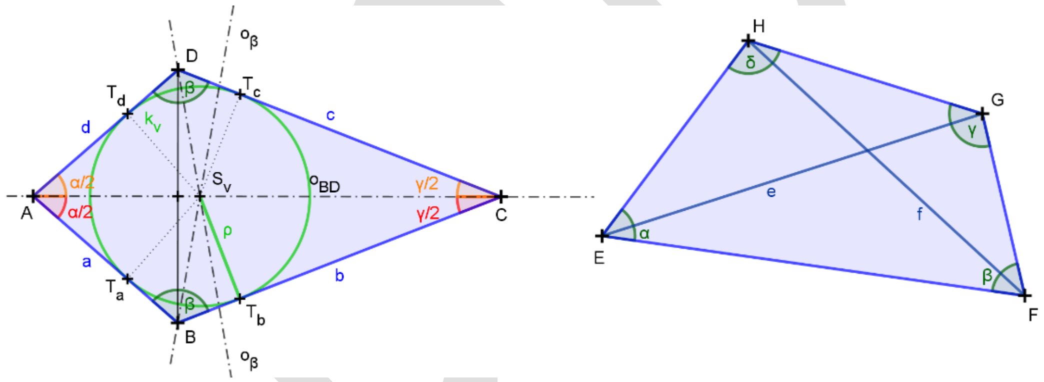
Lichoběžník *ABCD*, v němž je *AB // CD*, $|AB| > |CD|$ a který má při jednom rameni dva pravé úhly, se nazývá pravoúhlý lichoběžník. Potom jsou nutně oba zbývající úhly kosé. Kdyby byly pravé, nejednalo by se o lichoběžník, ale o obdélník.

C) různoběžníky ($a \nparallel c \wedge b \nparallel d$)

C1) pravidelné

- př. **deltoid** ($a = d \wedge b = c \wedge a \neq b$)

C2) nepravidelné



Vlastnosti deltoidu *ABCD*:

- strany deltoidu jsou po dvou shodné, tj. $|AB| = |AD|$, $|BC| = |DC|$;
- úhlopříčka *AC* je osou souměrnosti deltoidu *ABCD*;
- úhlopříčka *AC* je osou úhlopříčky *BD* a půlí úhly deltoidu při vrcholech *A, C;*
- úhly při vrcholech *B, D* jsou shodné;
- střed *S* kružnice deltoidu vepsané leží na ose *AC* a na osách úhlů $\angle ABC$ a $\angle ADC$;
- k určení deltoidu je třeba tří určovacích prvků (stran, úhlů, úhlopříček apod.);
- obvod deltoidu vypočteme ze vzorce

$$o = 2 \cdot (a + b),$$

kde *a, b* jsou délky stran deltoidu;
- obsah deltoidu vypočteme ze vzorce

$$S = \frac{1}{2} e \cdot f,$$

kde *e, f* jsou délky úhlopříček deltoidu.

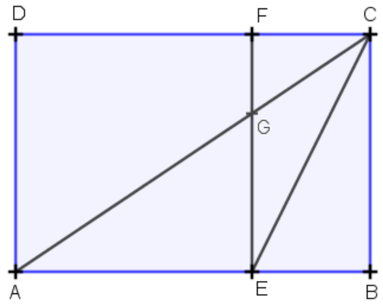
2.3.5.4 Příklady konvexních čtyřúhelníků, jimž lze opsat/vepsat kružnici

Každému trojúhelníku lze vepsat i opsat kružnici, u čtyřúhelníku tomu však tak obecně být nemusí. Některým čtyřúhelníkům lze opsat kružnici (tzv. **tětivové čtyřúhelníky** – obdélník, rovnoramenný lichoběžník, čtverec), jiným čtyřúhelníkům lze kružnici vepsat (tzv. **tečnové čtyřúhelníky** – např. kosočtverec, deltoid, čtverec). Většinou však nelze čtyřúhelníku kružnici ani opsat, ani vepsat. Čtyřúhelník, jemuž můžeme opsat i vepsat kružnici (středy kružnic mohou, ale nemusejí splývat) se nazývá **dvojstředový čtyřúhelník**. Příkladem je čtverec.

2.3.5.5 Příklady na procvičování

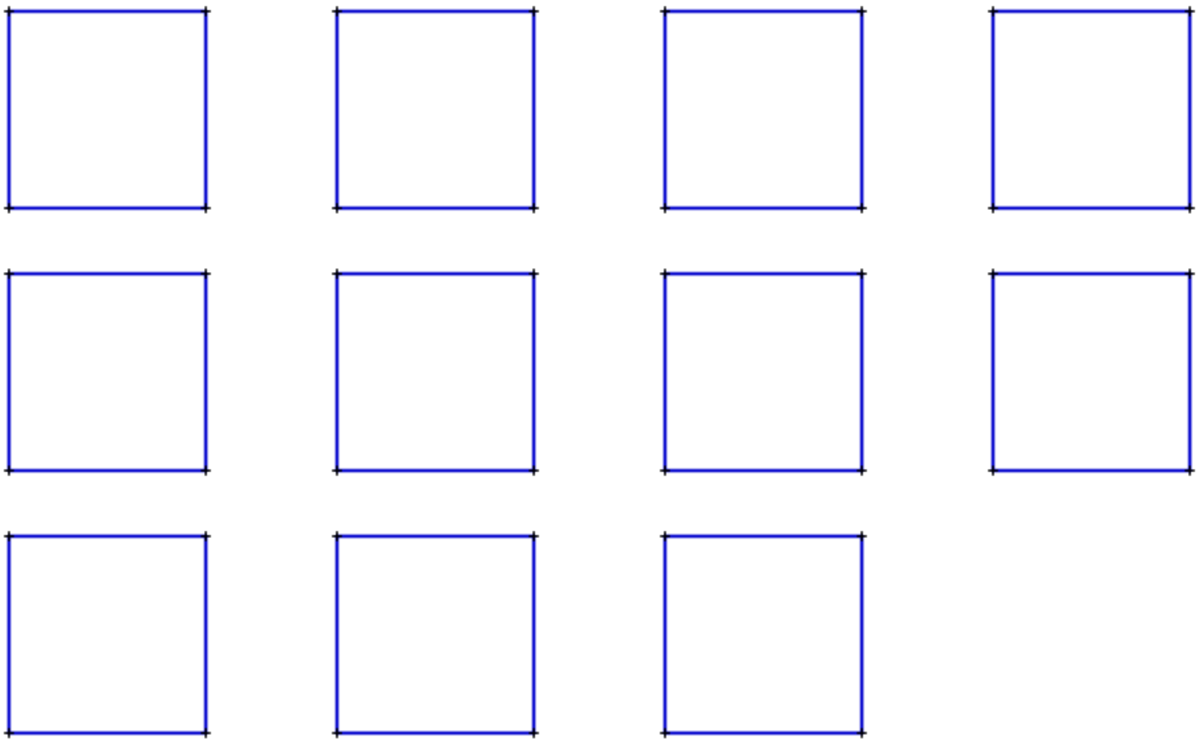
Příklad 2.24:

Je dán obdélník *ABCD* společně s dalšími vyznačenými úsečkami a body *E, F, G*, viz obrázek. Zapište všechny čtyřúhelníky, jejichž vrcholy splývají s označenými body *E, F, G* a s vrcholy *A, B, C, D* obdélníku *ABCD* a jejichž strany splývají se zobrazenými úsečkami, případně se stranami obdélníku *ABCD*.



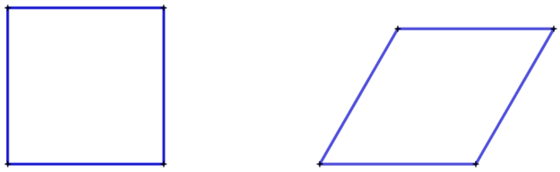
Příklad 2.25:

Je dáno 11 shodných čtverců. Čtverce rozdělte postupně na 6 až 16 dílčích čtverců, tj. první čtverec rozdělte na 6 dílčích čtverců, druhý čtverec rozdělte na 7 dílčích čtverců atd.



Příklad 2.26:

Ukažte, že čtverec a kosočtverec se dají rozdělit na části, ze kterých se je možné složit obdélník. Své tvrzení odůvodněte, případně popište.



2.3.6 Pravidelné mnohoúhelníky a jejich konstrukce

V tomto odstavci je uveden přehled několika vybraných pravidelných konvexních mnohoúhelníků. Přitom u každého z těchto pravidelných mnohoúhelníků je popsána jeho eukleidovská konstrukce.

Některé pravidelné mnohoúhelníky lze tzv. eukleidovskou konstrukcí (tj. konstrukcí s užitím pouze pravítka a kružítka) vytvořit jednoduše, jiné ne. To vedlo k otázce, zda je možné eukleidovskou konstrukcí sestrojit všechny pravidelné mnohoúhelníky.

Pomocí pravítka a kružítka lze sestrojit stranu pravidelného mnohoúhelníku pro:

1) 2^k, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$,

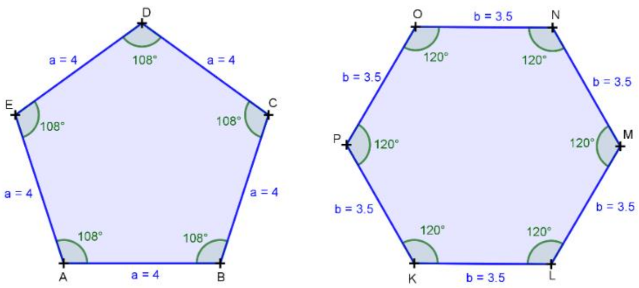
2) $2^{2^k} + 1$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 0$,

Johann Carl Friedrich Gauss (* 30. 4. 1777, Braunschweig – ✞ 23. 2. 1855, Göttingen) byl slavný německý matematik a fyzik, viz jeho portrét na obrázku. Z matematiky se zabýval mimo jiné především geometrií, matematickou analýzou a teorií čísel. Silně ovlivnil většinu oborů vědění, kterým se věnoval. *J. C. F. Gauss* roku 1796 dokázal existenci eukleidovské konstrukce pro pravidelné n-úhelníky, kde $n = \{3, 5, 17, 257, \ldots\}$.

3) $2^i \cdot (2^{2^k} + 1)$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, $i \geq 1$, $k \geq 0$.

Díky možnosti půlit úhly je možné eukleidovsky sestrojit **2*n*-úhelník** právě tehdy, když lze sestrojit n-úhelník, kde $n \in \mathbf{N}$. Je však dokázáno, že pro sedmi- a devítiúhelník přesné eukleidovské konstrukce neexistují. Pro $n > 5$ lze n-úhelník sestrojit jen výjimečně a to netriviálními způsoby. Pro ostatní n existují **přibližné** konstrukce.

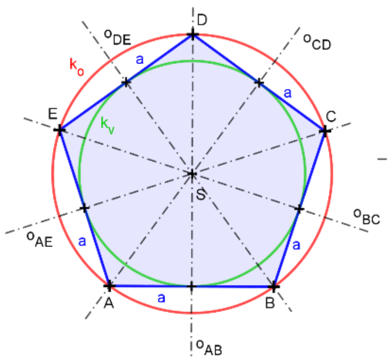
Definice 2.13:
Pravidelný mnohoúhelník (**pravidelný *n*-úhelník**, kde $n \in \mathbf{N}$) je mnohoúhelník, který má všechny vnitřní úhly stejně velké a všechny strany stejně dlouhé.

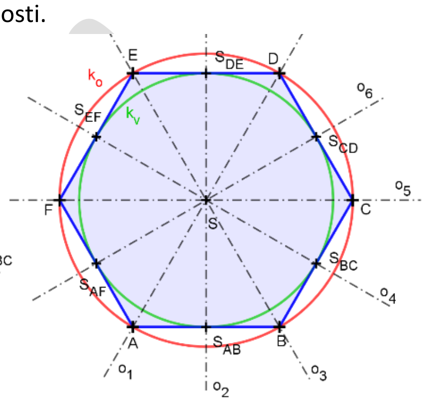


2.3.6.1 Obecné vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků

Mezi obecné vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků řadíme tyto následující vlastnosti:

- všechny vrcholy pravidelného mnohoúhelníku leží na stejné kružnici (kružnice pravidelnému mnohoúhelníku opsaná);
- existence stejné délky všech stran u pravidelného mnohoúhelníku znamená, že má i kružnici vepsanou, která se dotýká každé strany pravidelného mnohoúhelníku v jejím středu;
- každému pravidelnému mnohoúhelníku lze tedy opsat i vepsat kružnici. Tyto kružnice mají společný střed, jsou tzv. soustředné;
- pravidelný *n*-úhelník ($n \in \mathbf{N}$) je konstruovatelný eukleidovskou konstrukcí tehdy a jen tehdy, když jsou liché dělitele *n* různá Fermatova prvočísla;
- pravidelné *n*-úhelníky ($n \in \mathbf{N}$) jsou symetrické, tj.
  - pravidelný *n*-úhelník má *n* os souměrnosti,
  - je-li *n* sudé číslo, pak má i střed souměrnosti.





2.3.6.2 Přehled vybraných pravidelných konvexních mnohoúhelníků

I. pravidelný pětiúhelník (pentagon)

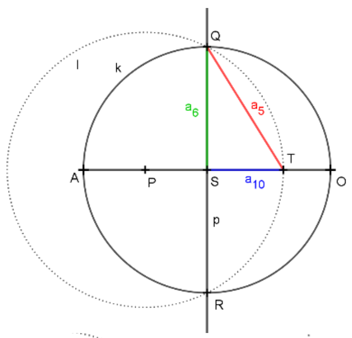
Pravidelný pětiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) s pěti vrcholy a pěti shodnými stranami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice jemu vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku je roven přesně 540°, v obloukové míře 3π (tj. velikost vnitřního úhlu u vrcholu pravidelného pětiúhelníku je 108°).

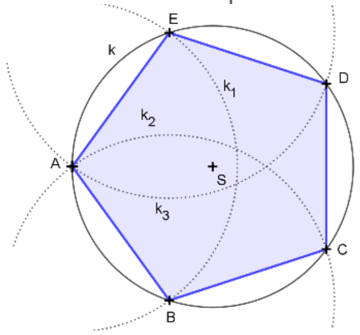
Pravidelný pětiúhelník je v podstatě složen z pěti shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{3}{10}\pi$ a při vrcholu $\frac{2}{5}\pi$.

Eukleidovská konstrukce pravidelného pětiúhelníku (desetiúhelníku):

Pro vyrýsování úsečky o délce strany pravidelného pětiúhelníku (desetiúhelníku) sestrojme:

1) úsečku *AO* se středem *S;*
2) kružnici *k* (*S*, *r* = |*AS*|);
3) střed *P* úsečky *AS*, tj. platí $|AP| = |PS| \wedge P \in AS$;
4) kolmici *p* k úsečce *AO* vedenou bodem *S;*
5) body *Q, R* jako průsečíky přímky *p* a kružnice *k,* přitom $R \not\equiv Q$;
6) kružnici *l* (*P*, *r* = |*PQ*|);
7) bod *T* jako průsečík kružnice *l* a úsečky *SO;*
8) délka úsečky *QT* je délka strany pravidelného pětiúhelníku;
   (délka úsečky *ST* je délka strany pravidelného desetiúhelníku)
9) kružnici k_1 (*A*, *r* = |*QT*|);
10) vrcholy *B* a *E* jako průsečíky kružnic *k* a k_1, přitom $B \not\equiv E$;
11) kružnici k_2 (*B*, *r* = |*QT*|);
12) vrchol *C* jako průsečík kružnic *k* a k_2, přitom $C \not\equiv A$;
13) kružnici k_3 (*E*, *r* = |*QT*|);





14) vrchol D jako průsečík kružnic k a k_3, přitom $D \not\equiv A$;
15) pravidelný pětiúhelník *ABCDE*

II. pravidelný šestiúhelník (hexagon)

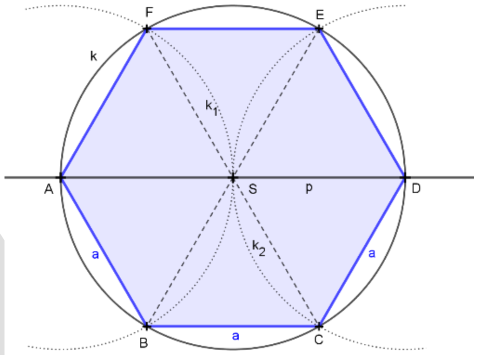
Pravidelný šestiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) s šesti vrcholy a šesti shodnými stranami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice jemu vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného šestiúhelníku je roven přesně 720°, v obloukové míře 4π (tj. velikost vnitřního úhlu u vrcholu pravidelného šestiúhelníku je 120°).

Pravidelný šestiúhelník je v podstatě složen z šesti shodných rovnostranných trojúhelníků, jejichž úhly při základně i při vrcholu mají velikost 60° = $\frac{\pi}{3}$.

Eukleidovská konstrukce pravidelného šestiúhelníku:

Pravidelný šestiúhelník sestrojíme eukleidovskou konstrukcí následovně, tj. sestrojíme:

1) kružnici k *(S, r);*
2) přímku p, která prochází bodem S a protíná kružnici k;
3) průsečíky přímky p a kružnice k označíme A a D, přitom $D \not\equiv A$;
4) kružnici k_1 *(A, r);*
5) body B, F jako průsečíky kružnic k a k_1, přitom $B \not\equiv F$;
6) kružnici k_2 *(D, r);*
7) body C, E jako průsečíky kružnic k a k_2, přitom $C \not\equiv E$;
8) pravidelný šestiúhelník *ABCDEF*



III. pravidelný sedmiúhelník (heptagon)

Pravidelný sedmiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) se sedmi vrcholy a se sedmi shodnými stranami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice jemu vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného sedmiúhelníku je přesně 900°, v obloukové míře 5π.

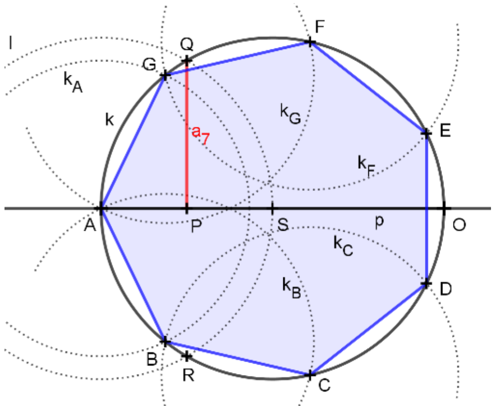
Pravidelný sedmiúhelník je složen ze sedmi shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{5}{14}\pi$ a při vrcholu $\frac{2}{7}\pi$.

Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku:

Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku za použití kružítka a pravítka je pouze přibližná. Neexistuje způsob, jak tuto konstrukci provést pomocí těchto nástrojů úplně přesně.

Pravidelný sedmiúhelník zkonstruujeme následovně, tj. sestrojíme:

1) kružnici k *(S, r);*
2) přímku p, která prochází bodem S a protíná kružnici k;
3) průsečíky přímky p a kružnice k označíme A a O, přitom $A \not\equiv O$;
4) bod P, který je středem úsečky AS;
5) kružnici l $(A, r = |SA|)$;
6) bod Q jako jeden z průsečíků kružnic k a l;
7) velikost úsečky $a_7 = |PQ|$ je přibližně rovna délce strany pravidel-ného sedmiúhelníku;
8) vrcholy B, G jako průsečíky kružnic k_A $(A, a_7 = |PQ|)$ a k, přitom $B \not\equiv G$;
9) vrchol C jako průsečík kružnic k_B $(B, a_7 = |PQ|)$ a k, přitom $C \not\equiv A$, …
10) pravidelný sedmiúhelník *ABCDEFG*



IV. pravidelný osmiúhelník (oktagon)

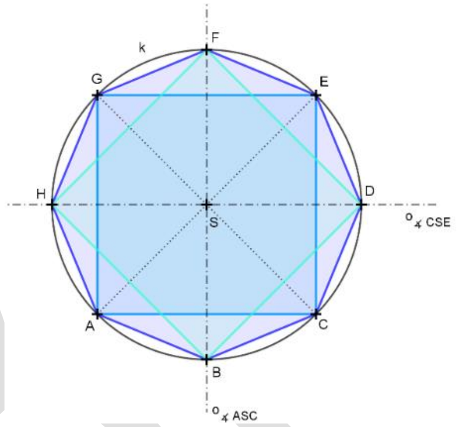
Pravidelný osmiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) s osmi vrcholy a s osmi shodnými stranami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice jemu vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného osmiúhelníku je přesně 1080°, v obloukové míře 6π.

Pravidelný osmiúhelník je složen z osmi shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{3}{8}\pi$ a při vrcholu $\frac{\pi}{4} = 45°$.

Eukleidovská konstrukce pravidelného osmiúhelníku:

Pravidelný osmiúhelník sestrojíme eukleidovskou konstrukcí následovně, tj. sestrojíme:

1) čtverec *ACEG* se středem *S*;
2) kružnici *k (S, r* = *|AS|);*
3) osy $o_{\angle ASC}$, $o_{\angle CSE}$ po řadě úhlů $\angle ASC$, $\angle CSE$;
4) body *B, F* jako průsečíky osy $o_{\angle ASC}$ a kružnice *k*, přitom $B \not\equiv F$;
5) body *D, H* jako průsečíky osy $o_{\angle CSE}$ a kružnice *k,* přitom $D \not\equiv H$;
6) pravidelný osmiúhelník *ABCDEFGH*



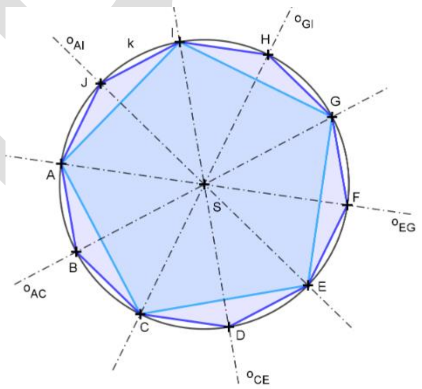
Poznámka:

Body *B, D, F, H* jsou vrcholy čtverce, který je oproti čtverci *ACEG* otočený kolem bodu *S* o úhel 45° proti směru hodinových ručiček.

V. pravidelný desetiúhelník

Pravidelný desetiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) s deseti vrcholy, s deseti shodnými stranami a s 35 úhlopříčkami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice jemu vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního desetiúhelníku je přesně 1440°, v obloukové míře 8π.

Pravidelný desetiúhelník je složen z deseti shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{2}{5}\pi$ a při vrcholu $\frac{\pi}{5}$.



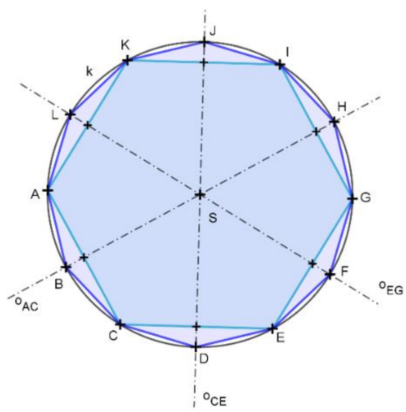
Eukleidovská konstrukce pravidelného desetiúhelníku

Vrcholy pravidelného desetiúhelníku vzniknou jako průsečíky os stran pravidelného pětiúhelníku s kružnicí pravidelnému pětiúhelníku opsanou.

VI. pravidelný dvanáctiúhelník

Pravidelný dvanáctiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) s dvanácti vrcholy a s dvanácti shodnými stranami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice jemu vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního dvanáctiúhelníku je přesně 1800°, v obloukové míře 10π.

Pravidelný dvanáctiúhelník je složen z dvanácti shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{5}{12}\pi$ a při vrcholu $\frac{\pi}{6} = 30°$.



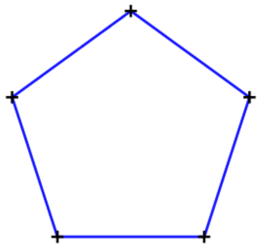
Eukleidovská konstrukce pravidelného dvanáctiúhelníku

Šest vrcholů pravidelného dvanáctiúhelníku vznikne jako průsečíky os stran pravidelného šestiúhelníku s kružnicí tomuto pravidelnému šestiúhelníku opsanou. Ty pak spolu s vrcholy pravidelného šestiúhelníku tvoří vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku.

2.3.6.3 Příklady na procvičování

<u>Příklad 2.27:</u>

Je dán pravidelný pětiúhelník *ABCDE*. Rozdělte jej na nepřekrývající se trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech *A, B, C, D, E* pětiúhelníku *ABCDE*. Kolik existuje různých možností rozdělit pravidelný pětiúhelník popsaným způsobem? Všechny možné způsoby nakreslete.



<u>Příklad 2.28:</u>

Je dán pravidelný šestiúhelník. Vyznačte v něm body *A, B* tak, aby byly průsečíky jeho úhlopříček. Vyšetřete všechny možnosti a doplňte je ilustračními obrázky.