3. Stereometrie

Stereometrie čili **prostorová geometrie** je základem všech zobrazovacích metod deskriptivní geometrie. Přitom deskriptivní geometrií rozumíme vědu o zobrazení prostorových útvarů do roviny. Podstatou deskriptivní geometrie je jednoznačný vztah mezi zobrazovaným objektem a jeho průmětem.

Stereometrie je budována na axiomatickém systému. Pomocí axiómů jsou pak dokazovány základní věty stereometrie. Ty se týkají základních geometrických objektů euklidovského prostoru, jejich vzájemných vztahů, poloh a metrických vlastností.

Základními geometrickými objekty euklidovského prostoru jsou **bod, přímka** a **rovina**.

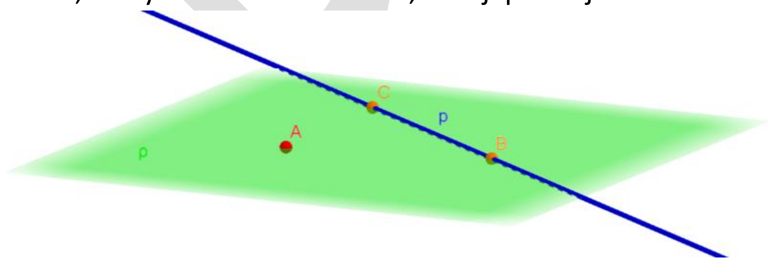
Základní objekty téhož typu mohou být **různé** nebo **totožné**. Například $a \equiv b$, $\alpha \equiv \beta$, tj. přímky *a, b* jsou totožné a taktéž roviny α, β jsou totožné; $A \not\equiv B$, tj. body *A, B* jsou různé, nejsou totožné.

Základní objekty různých typů mohou být buď **incidentní,** anebo **neincidentní**. Např. $A \in p$ znamená, že bod *A* inciduje s přímkou *p*, tj. bod *A* **leží na** přímce *p* nebo přímka *p* **prochází** bodem *A*; $q \notin \alpha$ znamená, že přímka *q* neinciduje s rovinou α, tj. že přímka *q* **neleží** v rovině α.

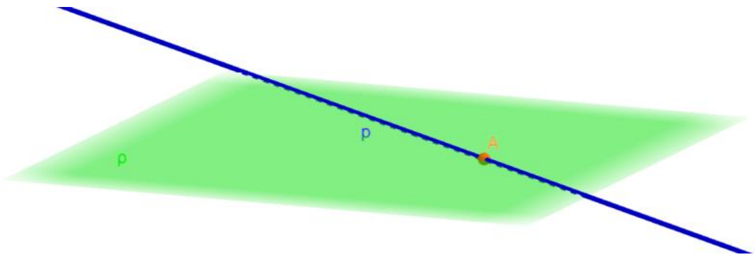
3.1 Axiomy stereometrie

Axiomy stereometrie jsou založeny na rozšíření axiomů planimetrie z roviny do prostoru. Incidence základních geometrických objektů - bodů, přímek a rovin – ve trojrozměrném euklidovském prostoru jsou vyjádřeny čtyřmi axiomy:

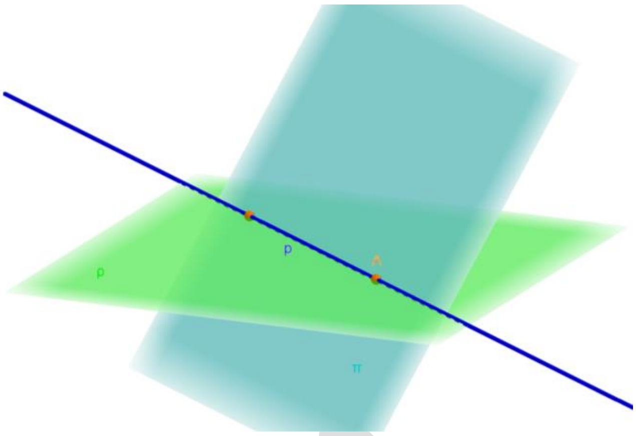
I-1 – Přímka *p* a bod *A*, který s ní není incidentní, určují právě jednu rovinu.



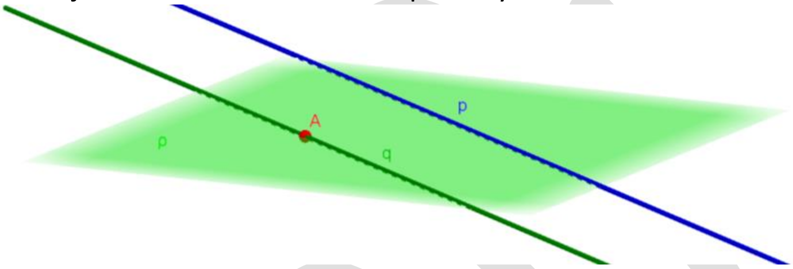
I-2 – Jestliže bod *A* leží na přímce *p* a přímka *p* leží v rovině *ρ*, pak i bod *A* leží v rovině *ρ*.



I-3 – Mají-li dvě různé roviny ρ a π společný bod A, pak mají společnou celou přímku, která tímto bodem A prochází. Mimo tuto přímku nemají již žádné společné body.



I-4 – Ke každé přímce lze bodem, který na ní neleží, vést právě jednu přímku, která s danou přímkou leží v jedné rovině a nemá s ní společný bod.



Uvedené axiomy nestačí samy o sobě k vybudování prostorové geometrie. Na jejich základě jsou definovány odvozené pojmy stereometrie a jsou odvozovány složitější věty a vztahy.

Z uvedené soustavy axiomů stereometrie lze odvodit základní věty stereometrie čtyř následujících typů:

1) věty o vzájemné poloze bodů, přímek a rovin
2) věty o rovnoběžnosti přímek a rovin
3) věty o odchylkách a o kolmosti přímek a rovin
4) věty o vzdálenostech bodů, přímek a rovin

3.2 Základní a odvozené pojmy stereometrie

Stereometrie jako geometrie v prostoru v sobě zahrnuje i geometrii v rovině (planimetrii), tzn., že pojmy známé z planimetrie jsou s výhodou využívány i ve stereometrii. Mezi základní pojmy stereometrie řadíme:

OBJEKTY:

- **bod** (označení *A, B, …*),
- **přímka** (označení *p, q*, ↔ *AB*, …),
- **rovina** (označení *α, β*, …, ↔ *ABC*, …, ↔ *pC*, …),
- **prostor** (označení ↔ *ABCD*, ↔ *αC*, …)

RELACE:

- **náležet/incidovat** (označení $A \in p$),

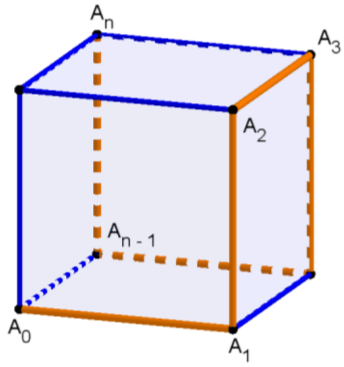
- **ležet mezi** (označení $B \mu AC$),
- **být shodný** (označení $AB \cong KL$)

Všechny ostatní pojmy užívané ve stereometrii lze z těchto základních pojmů odvodit, ovšem za předpokladu platností axiomů planimetrie a také stereometrie, ale také za předpokladu užití pojmů z teorie množin, např. průnik, sjednocení apod.

Kromě odvozených pojmů planimetrie jako např. úsečka, polopřímka, polorovina, trojúhelník apod. je třeba v prostoru definovat pojmy nové, speciálně prostorové. Těmito pojmy jsou např. následující pojmy: prostorová lomená čára, poloprostor, hranolová plocha, hranolový prostor, hranol, klín, krychle, kvádr, … Všechny tyto pojmy postupně v dalším textu definujeme.

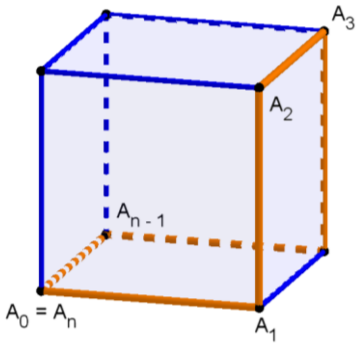
3.2.1 Prostorová lomená čára

Definice 3.1:
Nechť jsou ve trojrozměrném prostoru dány body $A_0, A_1, \dots , A_n$, kde $n \in \mathbf{N}$, z nichž vždy tři po sobě jdoucí body nejsou kolineární, a nechť sousední úsečky A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$, kde $i \in \mathbf{N}$, mají společný pouze jeden krajní bod A_{i+1}, pak sjednocení úseček A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$ nazveme **prostorová lomená čára** $A_0A_1 \dots A_n$.



Definice 3.2:
Body A_0, A_1, A_2, …, A_n označujeme jako **vrcholy prostorové lomené čáry**. Úsečky A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ nazýváme **stranami prostorové lomené čáry**.

Definice 3.3:
Jestliže $A_0 \equiv A_n$, pak sjednocení úseček A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$, kde $n \in \mathbf{N}$, nazveme **uzavřená lomená čára** $A_1A_2 \dots A_n$.



Definice 3.4:
Jestliže žádné dvě nesousední úsečky nemají společný bod, pak sjednocení těchto úseček nazveme **jednoduchá uzavřená lomená čára** $A_1A_2 \dots A_n$.

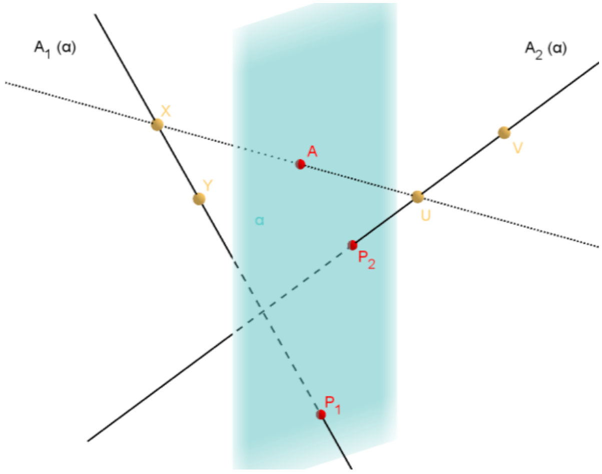
3.2.2 Poloprostor

Definice 3.5:
Nechť je v prostoru dána rovina α. Tato rovina α rozdělí body prostoru do dvou podmnožin $A_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)$, pro které platí:

- podmnožiny $A_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)$ jsou disjunktní množiny, tj. množiny, jejichž průnikem je prázdná množina;

- mezi body X, Y podmnožiny A_1 (α), resp. mezi body U, V podmnožiny A_2 (α) neleží body roviny α;
- mezi body $X \in A_1$ (α) a $U \in A_2$ (α) leží bod roviny α,

pak sjednocení podmnožiny A_1 (α) s rovinou α nazýváme **poloprostor s hraniční rovinou α**. Označujeme jej $\rightarrow \alpha X$. Poloprostory $\rightarrow \alpha X$, $\rightarrow \alpha U$ se **nazývají poloprostory navzájem opačné.**



Definice poloprostoru plyne přímo z definice polopřímky, je pouze o jednu dimenzi povýšena. Analogická situace platí pro definici opačného poloprostoru.

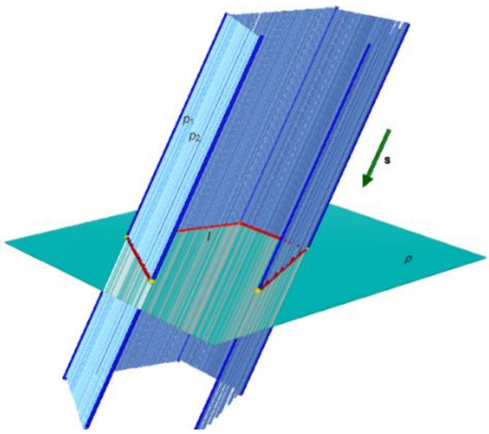
Připomeňme si, že přímku lze rozdělit na dvě navzájem opačné polopřímky s hraničním bodem P právě tehdy, když vnitřní body navzájem opačných polopřímek jsou prvky navzájem disjunktních množin. Podobným způsobem vzniknou dva navzájem opačné poloprostory, tj. prostor rozdělíme na dva navzájem opačné poloprostory s hraniční rovinou α právě tehdy, když jejich vnitřní body jsou prvky dvou navzájem disjunktních množin, rovina α je jedinou společnou částí pro oba dva poloprostory.

3.3 Základní plochy a tělesa

3.3.1 Hranolová plocha, hranolový prostor a hranoly

Definice 3.6:

Nechť l je lomená čára ležící v rovině ρ a nechť **s** je směr různoběžný s rovinou ρ. Množina všech přímek p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, které protínají lomenou čáru l a které jsou rovnoběžné se směrem **s,** se nazývá **hranolová plocha**.



Poznámka: Lomená čára l se nazývá **řídicí čára**, směr **s** se nazývá **řídicí směr** a přímky p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, plochy se nazývají **površky**.

Definice 3.7a:

Je-li lomená čára *l* uzavřená a omezuje-li v rovině ρ konvexní množinu, pak hranolová plocha rozdělí trojrozměrný prostor na dvě části. Konvexní část prostoru se nazývá **hranolový prostor**.

Definici hranolového prostoru můžeme vyslovit i jiným způsobem a to tak, že místo lomené čáry *l* ležící v rovině ρ budeme uvažovat konvexní mnohoúhelník Ω ležící v rovině ρ, tj.

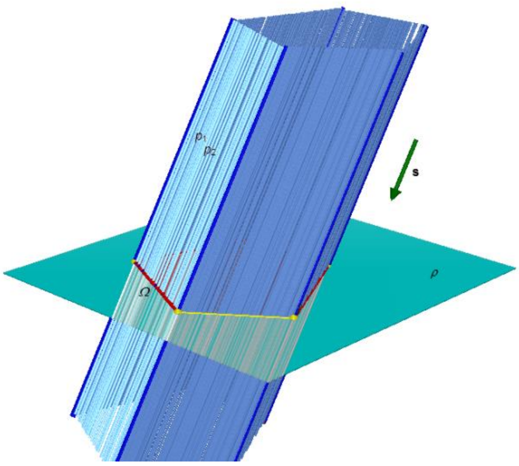
Definice 3.7b:
Nechť Ω je konvexní mnohoúhelník ležící v rovině ρ a nechť **s** je směr různoběžný s rovinou ρ. **Hranolovým prostorem** rozumíme množinu bodů všech přímek p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, protínajících daný mnohoúhelník Ω a rovnoběžných se směrem **s**.

Poznámka: Mnohoúhelník Ω se nazývá **řídicí mnohoúhelník** hranolového prostoru.

Definice 3.8:
(Pobočné) hrany hranolového prostoru jsou přímky vedené ve směru **s** vrcholy mnohoúhelníku Ω a **stěny hranolového prostoru** jsou množiny všech přímek p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, směru **s,** které protínají strany řídicího mnohoúhelníku Ω, tj. jsou to pásy určené (pobočnými) hranami hranolového prostoru.

Uvažujeme-li místo lomené čáry *l* konvexní mnohoúhelník Ω, můžeme hranolovou plochu definovat následovně:

Definice 3.9:
Hranolová plocha je množina všech přímek p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, směru **s**, které protínají strany mnohoúhelníku Ω, neboli je to množina všech bodů stěn hranolového prostoru.



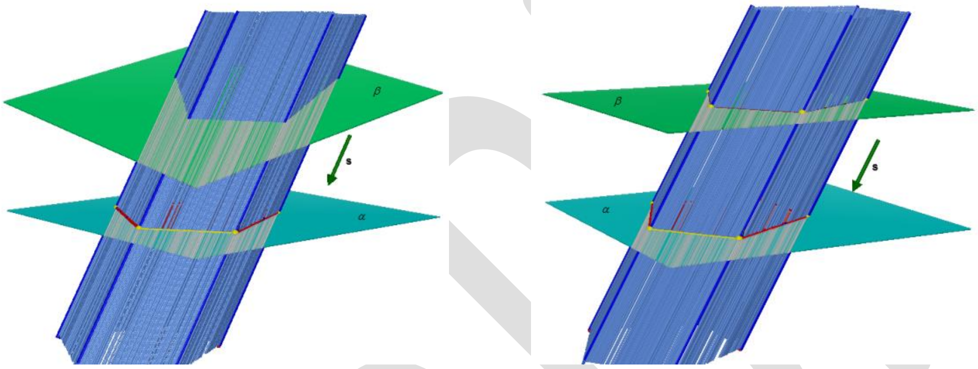
Definice 3.10:
Je-li konvexní mnohoúhelník Ω konvexním *n*-úhelníkem s *n* vrcholy, pak příslušný hranolový prostor nazýváme ***n*-boký hranolový prostor** a příslušnou hranolovou plochu nazýváme ***n*-boká hranolová plocha**.

Definice 3.11:

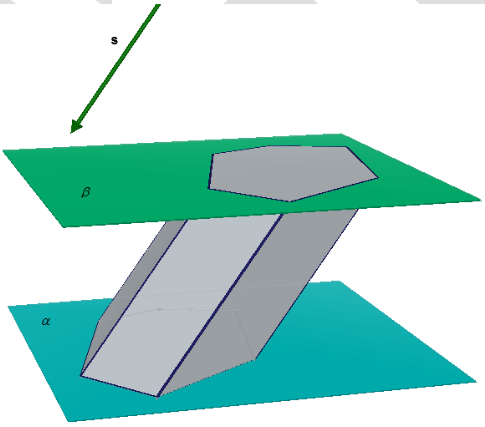
Přímky, které patří témuž směru jako pobočné hrany hranolové plochy, se nazývají **vrcholové přímky**. Roviny, které jsou rovnoběžné s pobočnými hranami hranolové plochy, se nazývají **vrcholové roviny**.

Věta 3.1:
Dvě navzájem rovnoběžné různé roviny α, β, které nejsou vrcholové, protínají n-boký hranolový prostor ve dvou shodných n-úhelnících.

Definice 3.12:
Hranol je určen hranolovým prostorem a dvěma různými rovinami α, β, které nejsou rovnoběžné se směrem **s**. Tj. je to průnik hranolového prostoru s klínem určeným různoběžnými rovinami α, β nebo s vrstvou určenou navzájem rovnoběžnými rovinami α, β.



Poznámka: Ve školské matematice a také v dalším textu uvažujeme hranolem těleso vzniklé vyříznutím hranolového prostoru dvěma různými, navzájem rovnoběžnými rovinami α, β.



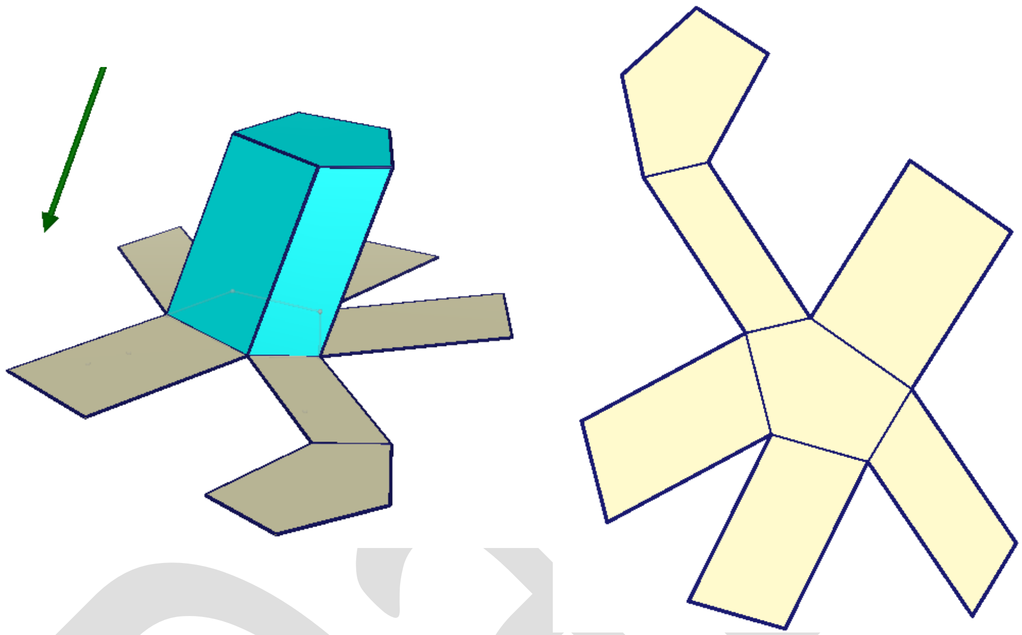
Definice 3.13:
Roviny α, β nazýváme **podstavnými rovinami** hranolu. Řídicí konvexní n-úhelníky Ω, Φ, které jsou řezy rovin α, β s daným hranolovým prostorem, nazýváme **podstavné stěny/podstavy** hranolu. Strany řídicích konvexních n-úhelníků Ω, Φ jsou **podstavnými hranami** hranolu a vrcholy řídicích konvexních n-úhelníků Ω, Φ jsou **vrcholy** hranolu.

Definice 3.14:
Pobočnými/bočními hranami hranolu rozumíme části (pobočných) hran hranolové plochy omezené rovinami α, β, tj. úsečky na hranách hranolové plochy, jejichž krajní body jsou vrcholy hranolu. **Pobočnými/bočními stěnami** hranolu uvažujeme části stěn hranolového

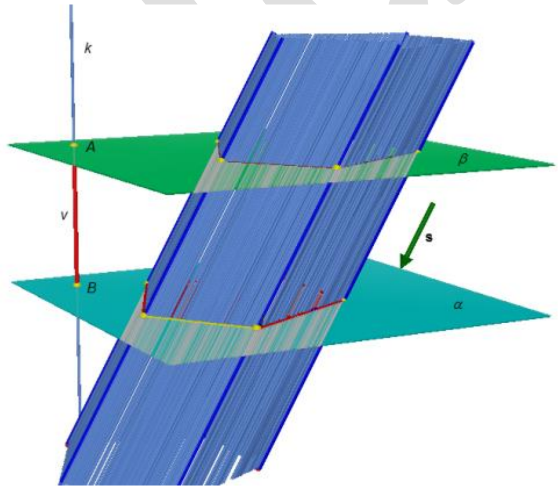
prostoru omezené rovinami α, β, tj. rovnoběžníky určené čtyřmi vrcholy hranolu ležícími v téže stěně hranolového prostoru.

Definice 3.15:
Souhrn všech pobočných stěn hranolu tvoří **plášť** hranolu. Obě podstavy hranolu společně s pláštěm tvoří jeho **povrch**.

Definice 3.16:
Zobrazením povrchu hranolu do jedné roviny získáme **síť** hranolu.



Poznámka: **Výškou** hranolu rozumíme vzdálenost podstavných rovin α, β.



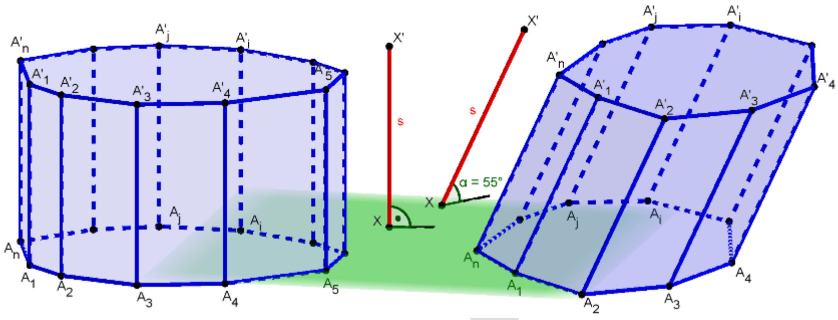
Poznámka: **Tělesová úhlopříčka** je úsečka omezená dvěma vrcholy, které neleží v téže stěně hranolu. Úhlopříčka pobočné stěny se nazývá **stěnová úhlopříčka**.

3.3.1.1 Rozdělení hranolů

Hranoly rozdělujeme podle

a) ***úhlu, který svírají pobočné hrany a površky hranolu s podstavnými rovinami,*** na

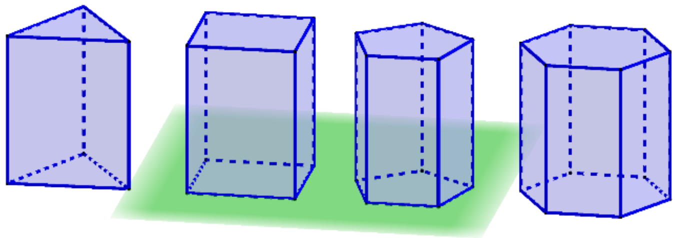
- **kolmé hranoly** – pobočné hrany hranolu jsou kolmé k rovinám podstav
- **kosé hranoly** - pobočné hrany hranolu svírají s rovinami podstav libovolný ostrý úhel.



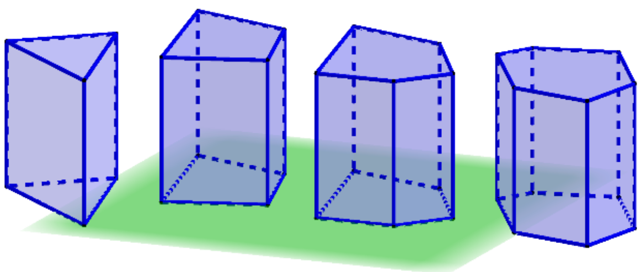
Poznámka: **Plášť kolmého hranolu** má tvar obdélníka o rozměrech obvod podstavy a výška hranolu.

b) ***typu řídicího mnohoúhelníku*** Ω, tj. je-li řídicím mnohoúhelníkem

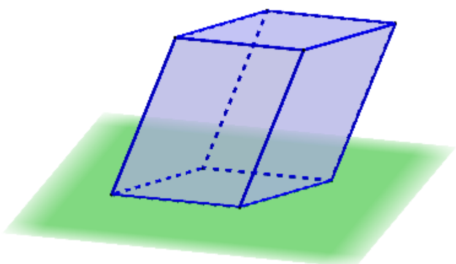
- kolmého hranolu čtverec, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník, …, pravidelný *n*-úhelník – hovoříme o **pravidelném čtyřbokém, pětibokém, šestibokém, …, *n*-bokém hranolu**



- čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, …, *n*-úhelník - hovoříme o **čtyřbokém, pětibokém, šestibokém, …, *n*-bokém hranolu**



- rovnoběžník – hovoříme o **rovnoběžnostěnu**



Definice 3.17:

Hranol, jehož podstavy jsou rovnoběžníky, se nazývá **rovnoběžnostěn**.

Poznámka: V případě rovnoběžnostěnu jsou vždy dvě stěny spolu navzájem rovnoběžné. Každé dvě takové stěny můžeme považovat za jeho podstavy. Proto u rovnoběžnostěnu nerozlišujeme podstavy a boční stěny.

Definice 3.18:
Rovnoběžnostěn, jehož všechny stěny jsou pravoúhelníky, je **kvádr**. Je-li každý z těchto pravoúhelníků čtverec, je kvádr **krychle**.

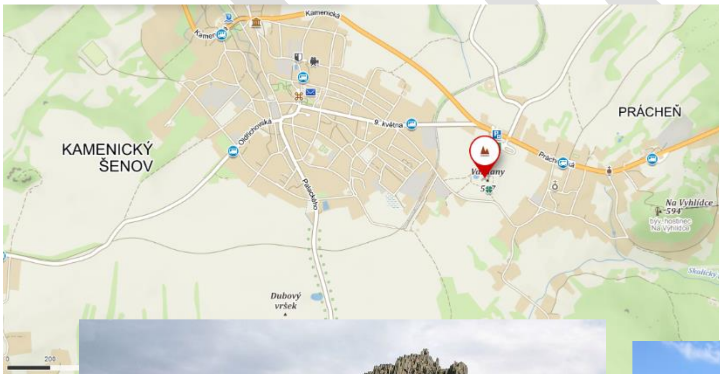
Poznámka: Na 1. stupni ZŠ jsou vyučovány pouze kolmé hranoly, ty jsou v učebnicích označovány většinou jen pojmem hranol. V dalším textu proto přídavné jméno „kolmý" vynecháme a budeme používat jenom pojem hranol. V případě potřeby rozlišení kolmých a kosých hranolů použijeme příslušné přídavné jméno (kolmý či kosý).

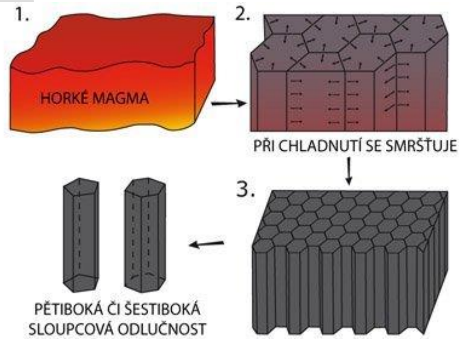
3.3.1.2 Příklady hranolů v přírodě a v reálném životě

Panská skála u Kamenického Šenova (Severní Čechy)

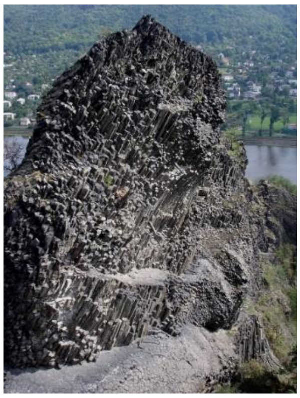
Národní přírodní památka **Panská skála** je geologická lokalita, na které se nacházejí ***kamenné varhany*** vzniklé sloupcovou odlučností čediče při tuhnutí magmatu, které bylo obnažené vlivem lidské těžební činnosti do současné podoby. Nachází se v Chráněné krajinné oblasti České středohoří, na katastru obce Prácheň, dnes součásti města Kamenický Šenov, které lokalitu využilo jako turistickou atrakci. Chráněny jsou ***svislé pěti až šestiboké sloupce***, z nichž některé dosahují délky až 12 metrů a jsou vedle sebe uspořádány jako píšťaly u kostelních varhan.

Další informace o Panské skále je možné najít např. na https://cs.wikipedia.org/wiki/Panská_skála





Vrkoč ve Vaňově u Ústí nad Labem (Severní Čechy)

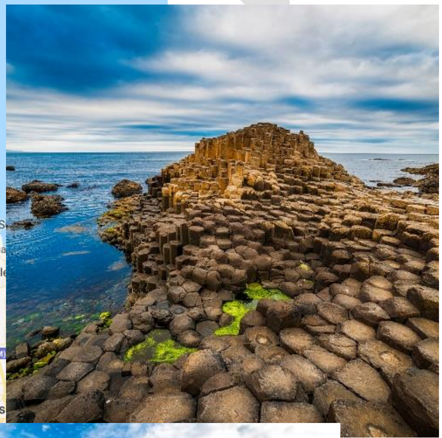


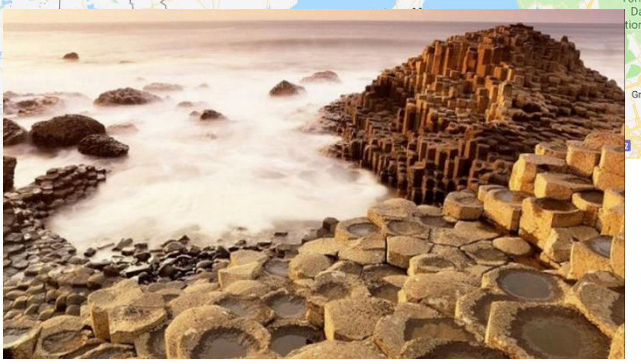
Národní přírodní památka leží v chráněné krajinné oblasti České středohoří, asi 4 km jižně od středu krajského města Ústí nad Labem. Vrkoč patří mezi evropsky významné památky pro charakteristický sloupovitý rozpad čediče. Snad právě tyto nepravidelné vějíře, připomínající svou podobou rozčesané vlasy daly skalnímu útvaru název Vrkoč. Tvoří stěnu asi 100 m dlouhou s přístupnou vyhlídkovou plošinou.

Giant's Causeway (Obrův chodník či Obrovy schody), Severní Irsko

- světové dědictví UNESCO

Giant's Causeway je zvláštní geologický útvar v Severním Irsku, který se řadí mezi kamenné varhany vzniklé díky sloupcovité odlučnosti bazaltů. V oblasti se nachází okolo 40 000 sloupců čediče, které vznikly jako výsledek dávné sopečné erupce. Nachází se v hrabství Antrim v Severním Irsku přibližně tři kilometry od města Bushmills. Tento přírodní úkaz byl v roce 1986 zařazen na Seznam světového dědictví v Evropě a o rok později byl prohlášen národní přírodní rezervací. Sloupce čediče vytváří přirozené útesy vedoucí do moře, kde pokračují i pod jeho hladinou. Většina těchto sloupců je šestistěnná, ale dají se mezi nimi pozorovat i kusy, které mají čtyři, pět, sedm i osm stěn. Nejvyšší odkrytý sloupec měří 12 metrů a lávový příkrov zde dosahuje mocnosti 28 metrů.

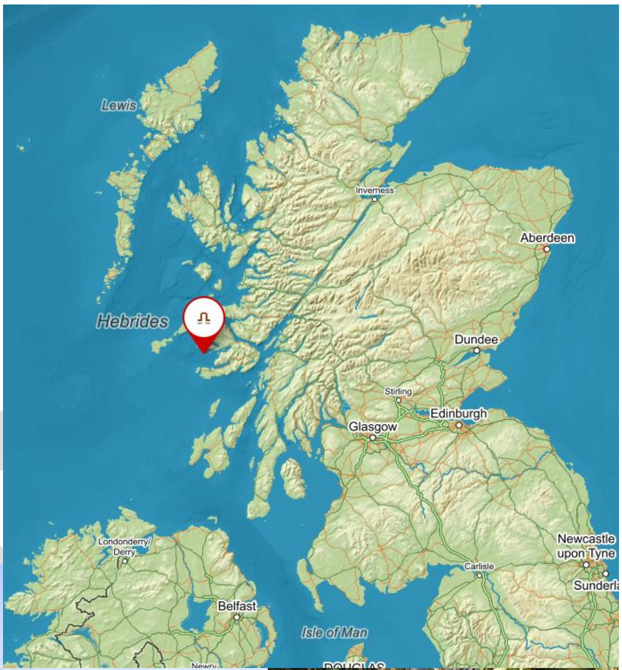


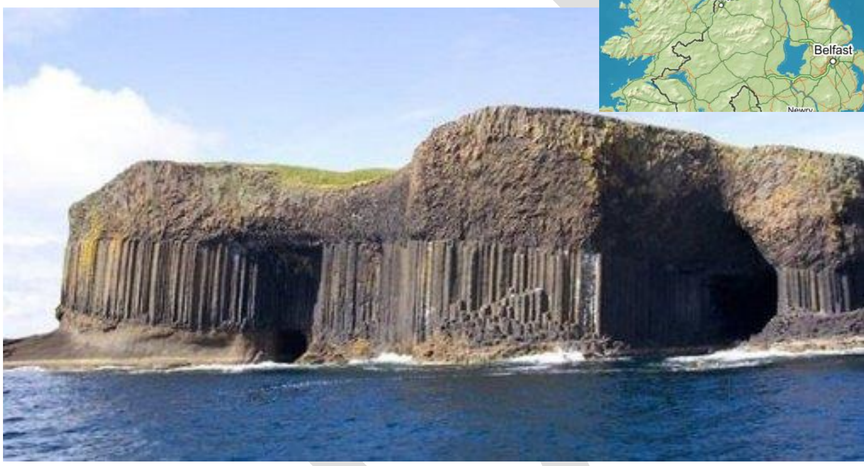


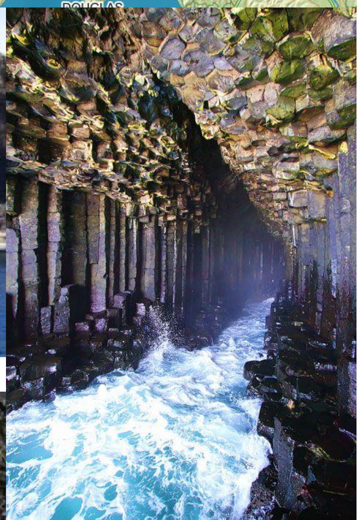
Jeskyně Fingal´s Cave na ostrově Staffa, Vnitřní Hebridy, Skotsko

Ostrov Staffa je bezpochyby jedním z nejpozoruhodnějších přírodních útvarů Skotska vůbec. Lze zde vidět učebnicové příklady sloupcové odlučnosti bazaltu podobně jako na Giant's Causeway v severním Irsku nebo na našich Kamenných varhanech u Kamenického Šenova. Tato odlučnost je důsledkem fyzikálních změn probíhajících v tuhnoucím magmatu, kdy dochází k jeho smršťování a vzniká systém zákonitě orientovaných trhlin, charakteristických pro jednotlivé horninové typy. Například bazalt obvykle tvoří sloupce převážně šestibokého průřezu, zatímco granity se rozpadají podle ploch kvádru.

Místní obyvatelé však mají na vznik Staffy poněkud poetičtější názor než geologové. Podle starobylé legendy obr Torquil Macleod, když právě dokončoval Giant`s Causeway v Irsku, se jednoho večera vracel na skotský ostrov Eigg, kde přebýval. A aby večer nezahálel, vzal si kus práce domů. Nejhezčí kousek bazaltu, který se měl stát Staffou, uložil do pytle a pečlivě zavázal. Pytel se však pod tou tíhou protrhl a obr za mohutného zaklení, taktéž dokumentovaného v legendě, upustil Staffu do moře. A protože byl hladový a unavený, nechal ji ležet, kde mu vypadla a kde ji lze dodnes spatřit.







Vodopád Svartifoss, Island

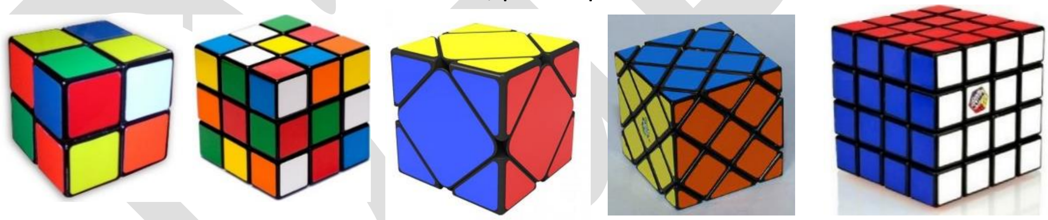
Svartifoss, Černý vodopád, leží v Národním parku Skaftafell. Řadí se k nejzajímavějším vodopádům na Islandu. Pojmenovaný je podle temných šestiúhelníkových sloupců, přes které se valí voda, a byl inspirací pro architektonický projekt Národního divadla Harpa v Reykjavíku.


Rubikovy hlavolamy

a) Rubikovy kostky (krychle)

Rubikova kostka je mechanický hlavolam, ve své původní podobě tvořený krychlí složenou z dílčích barevných krychliček, jehož úkolem je rotacemi přeuspořádat jednotlivé dílčí části tak, aby každá stěna celého tělesa byla obarvena jen jednou barvou. V atypických variantách se jedná o hranoly (které nejsou krychlemi), jehlany, mnohostěny a další tělesa.

Kostka formátu 3×3×3 se stala hitem na přelomu 70. a 80. let 20. století, kdy byla vyráběna v milionových sériích a stala se nejprodávanějším produktem na Zemi. Vynalezl ji maďarský sochař a architekt **Ernő Rubik** 19. května 1974, patent podal 30. ledna 1975.



b) Rubikovy věže (kvádry)

c) Rubikovy hranoly – pravidelný osmistěnný hranol

Kostkový cukr

Osladit si čaj či kávu nebylo před dvěma sty lety zdaleka tak snadné jako dnes. Hospodyňky musely nejdříve nasekat až 1,5 metru vysoké cukrové homole na menší části - zacházet se sekáčkem na cukr přitom nebylo jednoduché.

Za objev kostky cukru podle legendy vděčí svět manželce Jacoba Christopha Rada, ředitele rafinerie cukru v Dačicích na Moravě, která se při sekání cukru zranila. Od vydání patentu na kostkový cukr, který Rad dostal od císaře, uplynulo 23.1.2018 přesně 175 let. Za svůj vynález dostal Rad tzv. císařské privilegium, což byl jakýsi předchůdce patentu. Pod privilegiem uděleným Švýcarovi Radovi byl podepsán rakouský císař Ferdinand I., v českých dějinách známější jako král Ferdinand V. Dobrotivý.

Nová technologie, kterou Rad vyvinul údajně kvůli zranění své manželky, spočívala v naplnění mosazné formy se čtyřmi sty čtvercovými přihrádkami cukrovou moučkou, jejím následném lisování a dvanáctihodinovém sušení. V dačické továrně Rad postupně vyráběl 1,1 tuny kostkového cukru denně.

Krychlové zátarasy - Univerzitní náměstí – kampus TUL, Liberec

Za účelem znemožnění nekontrolovaného vjezdu vozidel na Univerzitní náměstí kampusu Technické univerzity v Liberci byly na boční příjezdovou cestu umístěny kamenné zátarasy ve tvaru shodných krychlí.

Kovová socha ve tvaru krychle, park v Trenčianských Teplicích, Slovensko

Lázeňský park v Trenčianských Teplicích byl založený správou koupelí v roce 1873. Jde o romantický park s množstvím romantických zákoutí. V posledních letech přibyly do parku železné sochy. Jednou z nich je socha ve tvaru krychle.

Tetrapack nápojové obaly

Nápojový karton je obecně obal vyrobený z kompozitních materiálů pro uchování tekutin. Tetra pakové obaly jsou vyráběny v různých tvarech, většinou ve tvaru kvádru, pravidelného čtyřbokého hranolu.

Již v roce 1915 si John van Wormer nechal v USA patentovat nápojový karton a již v roce 1930 se mléko začalo plnit do kartonů.

Krabičky od zápalek

Zápalky (též **sirky**) jsou podlouhlé kousky dřeva, např. osikového, smrkového či topolového, méně často z lepenky se zápalnou látkou na jednom z jeho konců, které slouží k rozdělávání ohně. Dřívka jsou dále částečně nebo zcela nasycena látkou usnadňující hoření. Zápalná látka na konci dřívka, tzv. **hlavička**, chytá v důsledku tření. Výrobci balí vyrobené zápalky zpravidla do krabiček tvaru kvádru.

Bytové doplňky

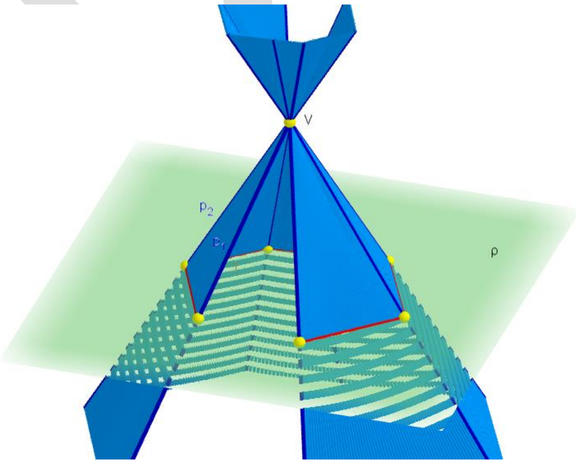
Různé typy nábytku – komody, skříně, sedátka taburetů apod. jsou ve tvaru kvádru a některé bytové doplňky jsou představovány objekty ve tvaru krychle – např. čísla na hodinovém číselníku atd.



3.3.2 Jehlanová plocha, jehlanový prostor a jehlany

Definice 3.19:

Nechť l je lomená čára ležící v rovině ρ a nechť bod V není bodem roviny ρ. Množina všech přímek p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, které protínají lomenou čáru l a které procházejí bodem V, se nazývá **jehlanová plocha**.



Poznámka: Lomená čára l se nazývá **řídicí čára**, bod V se nazývá **vrchol** jehlanové plochy a přímky p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, jehlanové plochy se nazývají **površky**.

Definice 3.20a:

Je-li lomená čára *l* uzavřená a omezuje-li v rovině ρ konvexní množinu, pak jehlanová plocha rozdělí trojrozměrný prostor na dvě části. Konvexní část prostoru se nazývá **jehlanový prostor**.

Definici jehlanového prostoru můžeme analogicky jako definici hranolového prostoru vyslovit i jiným způsobem a to tak, že místo lomené čáry *l* ležící v rovině ρ budeme v rovině ρ uvažovat konvexní mnohoúhelník Ω, tj.

Definice 3.20b:
Nechť Ω je konvexní mnohoúhelník ležící v rovině ρ a nechť *V* je bod neincidentní s rovinou ρ. **Jehlanovým prostorem** rozumíme množinu bodů všech přímek protínajících daný mnohoúhelník Ω a procházejících daným bodem *V*.

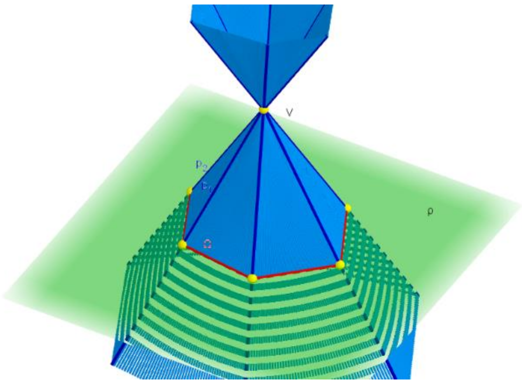
Poznámka: Konvexní mnohoúhelník Ω se nazývá **řídicí mnohoúhelník** a bod *V* je **vrchol** jehlanového prostoru.

Definice 3.21:
(Pobočné) hrany jehlanové plochy jsou přímky vedené vrcholem *V* a vrcholy konvexního mnohoúhelníku Ω. **Stěny jehlanové plochy a jehlanového prostoru** jsou množiny všech přímek procházejících vrcholem *V* a protínajících strany řídicího mnohoúhelníku Ω. Ostatní přímky jehlanového prostoru se nazývají **vnitřní přímky** jehlanového prostoru a jejich body (kromě
vrcholu *V*) vyplňují vnitřek tohoto prostoru a nazývají se **vnitřní body** jehlanového prostoru.

Definice 3.22:
Přímky, které procházejí vrcholem jehlanového prostoru, se nazývají **vrcholové přímky**. Analogicky, roviny, které procházejí vrcholem jehlanového prostoru, se nazývají **vrcholové roviny**.

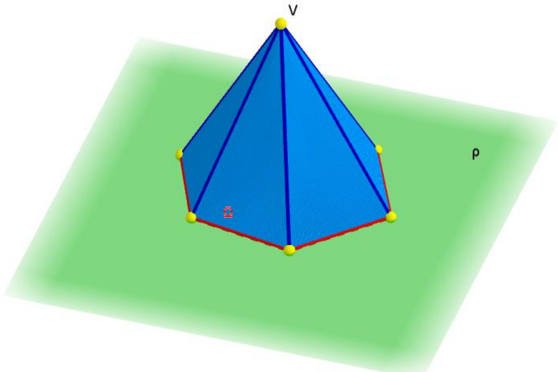
Uvažujeme-li místo lomené čáry *l* konvexní mnohoúhelník Ω, můžeme jehlanovou plochu definovat také následovně:

Definice 3.23:
Jehlanová plocha je množina všech přímek p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, procházejících bodem *V* a protínajících strany mnohoúhelníku Ω, neboli je to množina všech bodů stěn jehlanového prostoru.



Definice 3.24:

Buď dán jehlanový prostor s vrcholem *V* a buďte dány dvě různé, navzájem rovnoběžné roviny ρ, τ, kde $V \in \tau$. Průnik jehlanového prostoru s vrstvou (ρ, τ) se nazývá **jehlan**.



Definice 3.25:
Řez roviny ρ s jehlanovým prostorem se nazývá **podstava jehlanu**. Rovinu ρ nazýváme **podstavnou rovinou/rovinou podstavy** jehlanu.

Poznámka: Řídicí konvexní mnohoúhelník Ω ležící v rovině ρ je **podstavnou stěnou/podstavou** jehlanu.

Definice 3.26:
Strany řídicího konvexního mnohoúhelníku Ω nazýváme **podstavnými hranami/hranami podstavy** jehlanu, vrcholy řídicího konvexního mnohoúhelníku Ω nazýváme **podstavnými vrcholy** jehlanu.

Definice 3.27:
Vrchol *V* nazýváme **hlavní vrchol jehlanu** (stručně jen vrchol).

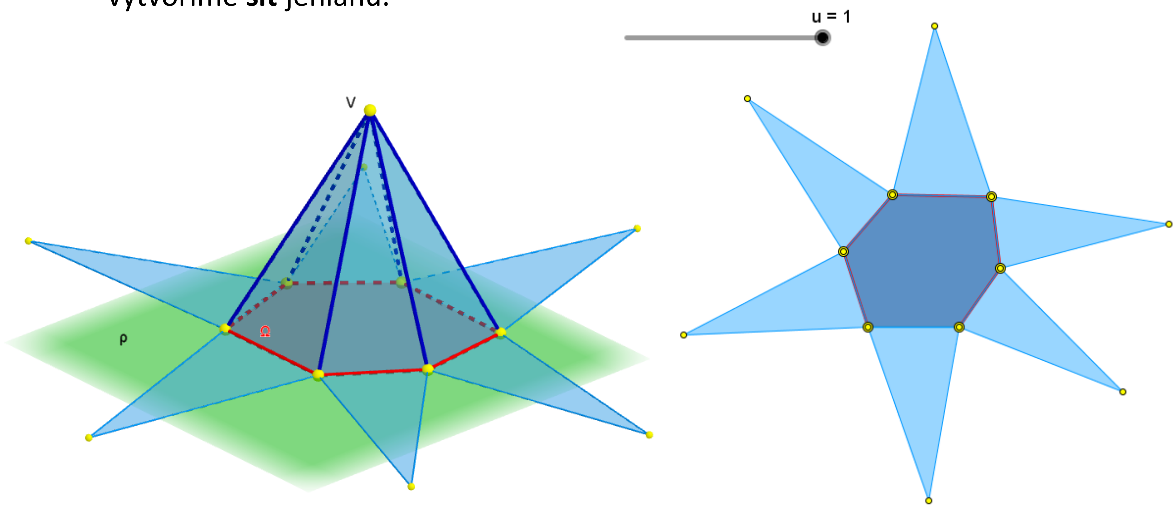
Definice 3.28:
Úsečky na hranách jehlanové plochy, jejichž krajní body jsou hlavní vrchol *V* a jednotlivé podstavné vrcholy, se nazývají **pobočné hrany** jehlanu, tj. jinými slovy řečeno, **pobočnými/bočními hranami** jehlanu rozumíme části hran jehlanové plochy omezené vrcholem *V* a rovinou ρ.

Definice 3.29:
Trojúhelníky, z nichž každý je určen hlavním vrcholem *V* a dvěma sousedními vrcholy podstavy, se nazývají **pobočné stěny**, tj. jinými slovy řečeno, **pobočné/boční stěny** jehlanu jsou části stěn jehlanového prostoru omezené vrcholem *V* a rovinou ρ.

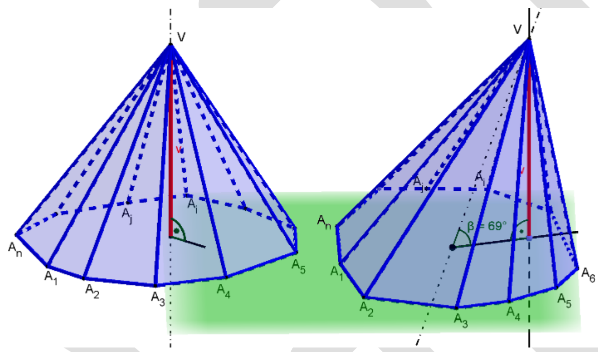
Definice 3.30:
Všechny pobočné stěny jehlanu tvoří **plášť** jehlanu. Podstava jehlanu společně s pláštěm tvoří **povrch** jehlanu.

Poznámka: Pobočné stěny jehlanu, čili plášť jehlanu tvoří *n* (je-li podstavou jehlanu konvexní *n*-úhelník) rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem *V*.

Poznámka: Zobrazením povrchu jehlanu, tj. zobrazením podstavy a pláště jehlanu, do roviny vytvoříme **síť** jehlanu.



Definice 3.31:
Výškou *v* jehlanu rozumíme vzdálenost vrcholu *V* od podstavné roviny ρ.



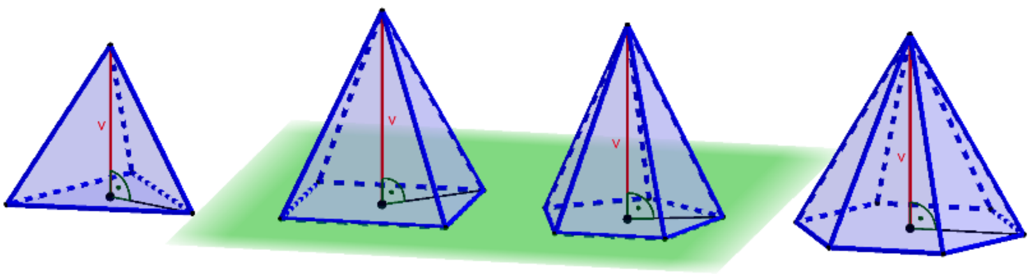
Definice 3.32:
Je-li podstavou jehlanu pravidelný mnohoúhelník Ω a prochází-li kolmice k podstavě jehlanu vedená hlavním vrcholem *V* středem pravidelného mnohoúhelníku Ω, pak se tento **jehlan** nazývá **pravidelný**.

3.3.2.1 Rozdělení jehlanů

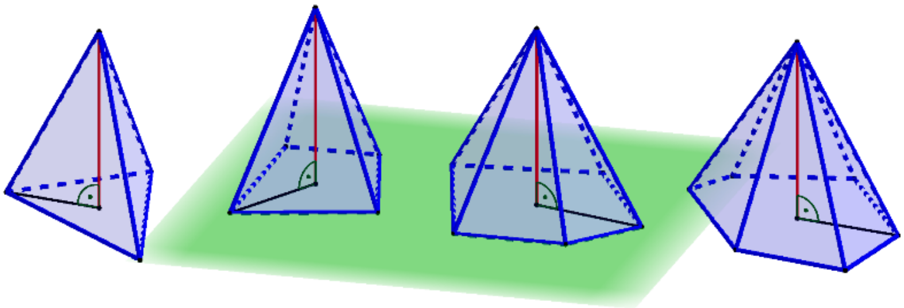
Jehlany rozdělujeme podobně jako hranoly podle

a) ***typu řídicího mnohoúhelníku*** Ω, tj. je-li řídicím mnohoúhelníkem

- rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník, …, pravidelný *n*-úhelník – hovoříme o **pravidelném trojbokém, čtyřbokém, pětibokém, šestibokém, …, *n*-bokém jehlanu**



- trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, …, *n*-úhelník - hovoříme o **trojbokém**, **čtyřbokém, pětibokém, šestibokém, …, *n*-bokém jehlanu**

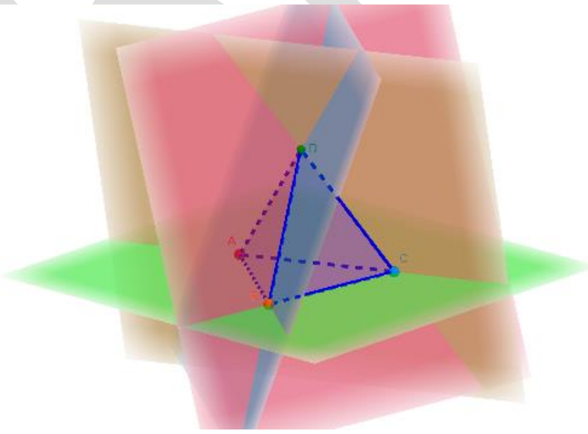


Poznámka: **Název** jehlanu je určen počtem vrcholů řídicího mnohoúhelníku Ω.

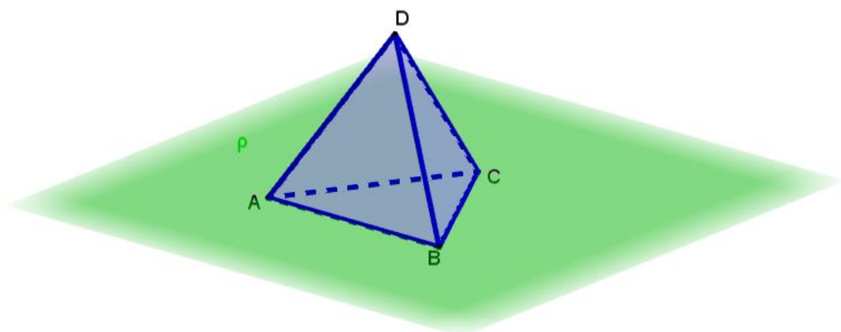
Definice 3.33:
Trojboký jehlan nazýváme obvykle **čtyřstěn**. Kterýkoliv vrchol čtyřstěnu můžeme pokládat za hlavní vrchol a kteroukoliv jeho stěnu za podstavu.

Poznámka: Tělesa je možné definovat také na základě průniku poloprostorů, analogicky jako se mnohoúhelníky definují jako průniky polorovin. Jako konkrétní příklad uveďme definici trojbokého jehlanu.

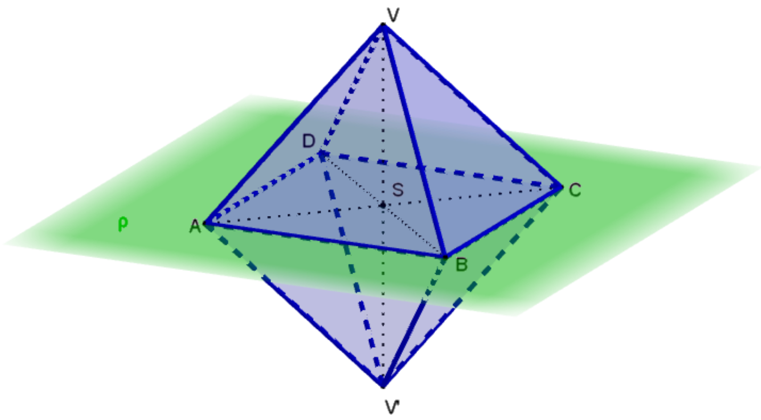
Definice 3.34:
Nechť jsou dány nekomplanární body (tj. body neležící v jedné rovině) *A, B, C, V*, pak průnikem poloprostorů *ABCV, BCVA, CVBA* a *VABC* nazýváme **trojboký jehlan** *ABCV* (**čtyřstěn** *ABCV*).



Definice 3.35:
Pravidelný čtyřstěn je čtyřstěn, jehož všechny stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky.



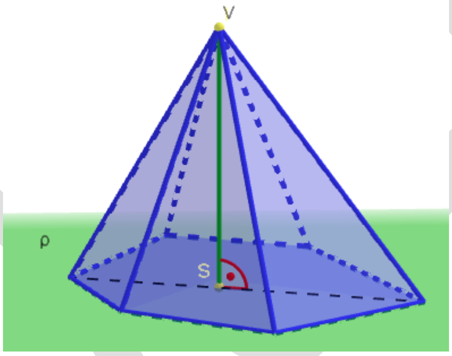
Definice 3.36:
Buď *ABCDV* pravidelný čtyřboký jehlan, jehož pobočné stěny jsou rovnostranné trojúhelníky, a buď *V´* bod souměrně sdružený s hlavním vrcholem *V* jehlanu podle roviny čtvercové podstavy *ABCD*, potom těleso složené z pravidelných jehlanů *ABCDV* a *ABCDV´* se jmenuje **pravidelný osmistěn**.



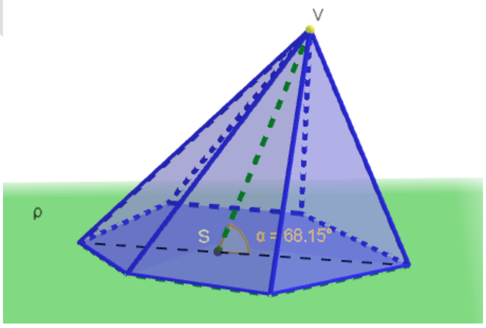
Definice 3.37:
Body *A, B, C, D, V* a *V´* se nazývají **vrcholy pravidelného osmistěnu**, pobočné trojúhelníkové stěny jehlanů se nazývají **stěny pravidelného osmistěnu**, hrany jehlanu jsou **hrany pravidelného osmistěnu**, úsečky *AC, BD* a *VV´* se nazývají **(tělesové) úhlopříčky pravidelného osmistěnu**. Průsečík *S* úhlopříček se nazývá **střed pravidelného osmistěnu**.

b) ***úhlu, který svírá spojnice vrcholu V a středu S podstavy s podstavnou rovinou*** ρ, na

- **kolmé jehlany** – přímka *VS* jehlanu je kolmá k rovině podstavy



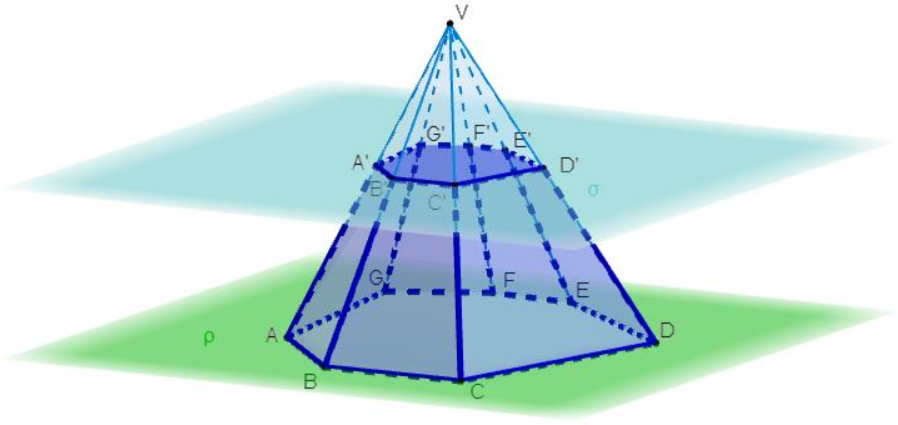
- **kosé jehlany** – přímka *VS* jehlanu svírá s rovinou podstavy ρ libovolný ostrý úhel



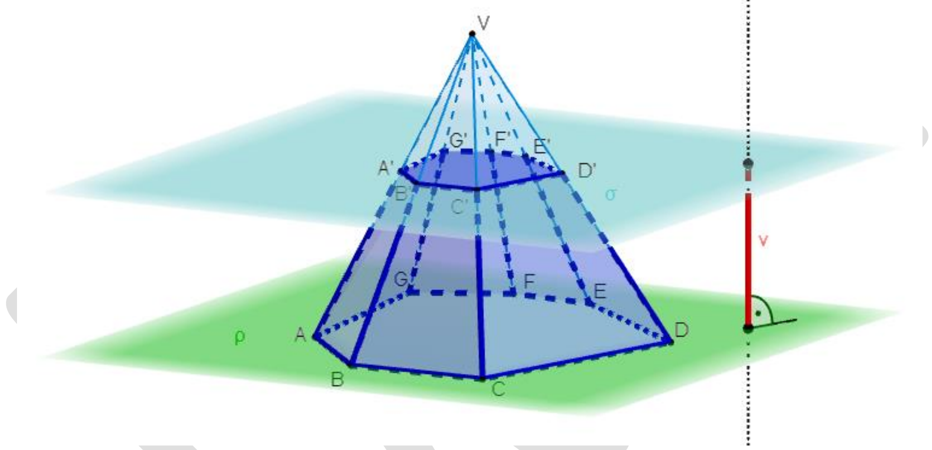
Poznámka: Na 1. stupni ZŠ jsou vyučovány analogicky jako pouze kolmé hranoly také jen kolmé jehlany, ty jsou v učebnicích označovány většinou jen pojmem jehlan. V dalším textu proto přídavné jméno „kolmý“ vynecháme a budeme používat jen pojem jehlan. V případě potřeby rozlišení kolmých a kosých jehlanů použijeme příslušné přídavné jméno (kolmý či kosý).

3.3.2.2 Komolý jehlan

Definice 3.38:
Komolým jehlanem nazýváme průnik jehlanového prostoru a vrstvy určené rovinou *ρ* podstavy a rovinou *σ* s ní rovnoběžnou, která má s jehlanovým prostorem společné alespoň dva body.



Definice 3.39:
Tloušťku vrstvy, tj. vzdálenost rovin *ρ* a *σ* nazýváme **výška komolého jehlanu**.

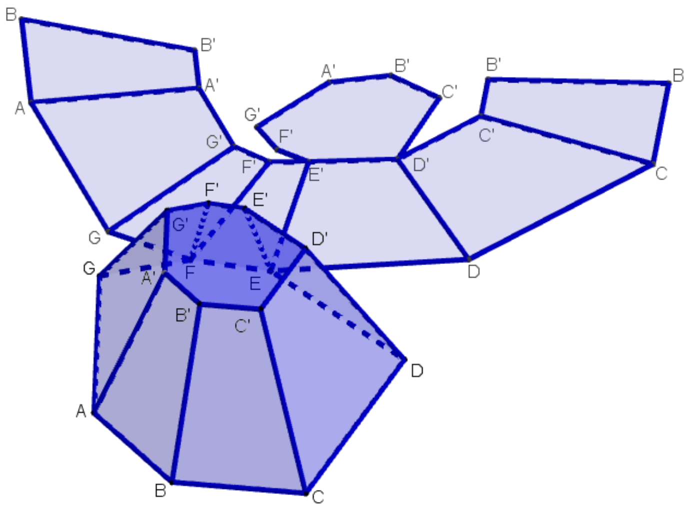


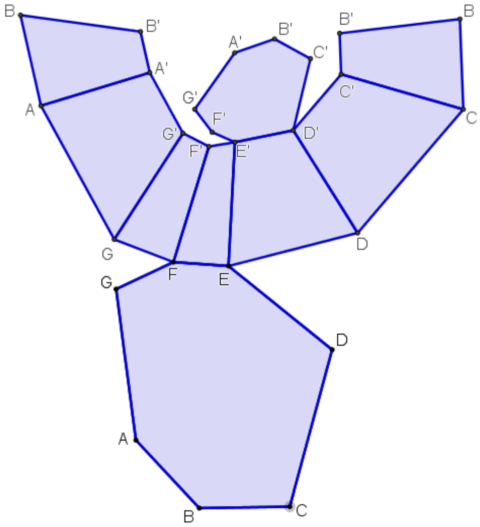
Definice 3.40:
Roviny *ρ, σ* protínají daný jehlanový prostor v konvexních mnohoúhelnících, které se nazývají **podstavy komolého jehlanu**. Roviny *ρ, σ* nazýváme **podstavnými rovinami** komolého jehlanu.

Definice 3.41:
Lichoběžníkové stěny komolého jehlanu se jmenují **pobočné stěny**. Průsečnice pobočných stěn, resp. pobočných stěn a podstav se nazývají hrany. Hrany, které patří k některé podstavě, jsou **podstavné hrany**. Ostatní jsou **pobočné hrany**.

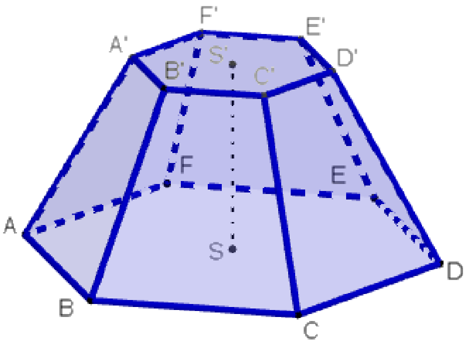
Poznámka: **Povrch** komolého jehlanu se skládá ze dvou podobných *n*-úhelníkových podstav a z pláště. **Plášť** komolého jehlanu tvoří boční stěny lichoběžníkových tvarů.

Poznámka: Zobrazením povrchu komolého jehlanu, tj. zobrazením obou podstav a pláště komolého jehlanu do roviny vytvoříme **síť** komolého jehlanu.

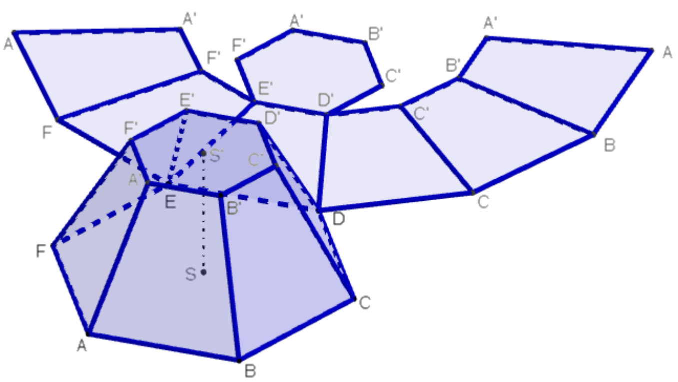


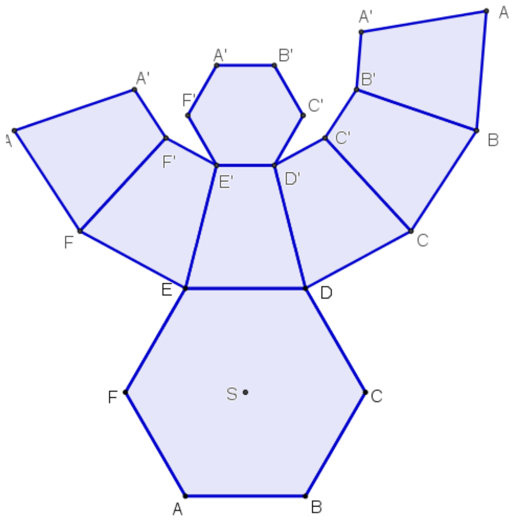


Definice 3.42:
Pravidelným komolým jehlanem nazýváme komolý jehlan, jehož podstavami jsou podobné pravidelné *n*-úhelníky.



Poznámka: **Plášť** pravidelného komolého jehlanu je tvořen shodnými rovnoramennými lichoběžníky.





3.3.2.3 Příklady jehlanů, jehlanových ploch v reálném životě

Egyptské pyramidy, Gíza, Egypt

Pyramida je jehlanovitá stavba. Základem pyramid bývá zpravidla čtyřúhelník nebo trojúhelník, obecně to však může být jakýkoliv polygon. To znamená, že pyramida má obvykle čtyři nebo tři stěny. Tyto stěny musí být trojúhelníkové. Konstrukčně nejjednodušší je postavit pyramidu na čtvercové základně, protože nevzniká problém spojit stěny do jednoho bodu. Tuto vlastnost má drtivá většina starověkých pyramid.

Pyramidy v Egyptě jsou nejznámější a nejstarší z pyramidových staveb, patří k největším stavbám v historii. Cheopsova pyramida je řazena mezi sedm divů světa a byla nejvyšší stavbou světa až do dokončení Lincolnské katedrály v roce 1311, jejíž věž pyramidu převyšovala. Věž však roku 1549 shořela po zásahu bleskem a nebyla nikdy obnovena v původní výšce.

Egyptské pyramidy jsou postaveny z velkých kamenných bloků, nebo z cihel. Stavba pyramid probíhala bez znalosti železa a složitějších technologií. Všechny byly postaveny v mezi lety 2700 a 1700 př. n. l.

Cestiova pyramida, Řím, Itálie

Cestiova pyramida je pyramida, která se nachází v Římě, v rione Testaccio. Nechal si ji v roce 12 př. n. l. jako náhrobek postavit Gaius Cestius Epulo. Základnu tvoří čtverec se stranou 22 m, vysoká je 27 m. Postavena byla z betonu a obložena mramorovými deskami.


Hrobka zakladatele města markraběte Karla III. Viléma, Karlsruhe, Německo

Město Karlsruhe je jedním z největších evropských měst založených *podle návrhu z rýsovacího prkna*. Založeno bylo roku 1715 markrabětem Karlem III, který se rozhodl přesídlit ze své středověké, stísněné rezidence Durlach (dnes největší části města Karlsruhe) do nově postaveného *otevřeného* moderního města, jehož ulice se budou vějířovitě rozbíhat od jeho zámku. V plánu bylo 32 ulic, většina z nich *přežila* dodnes.

Karlsruhe je město s přibližně 300 000 obyvateli ležící na břehu řeky Rýn na jihozápadě Německa ve spolkové zemi Bádensko-Württembersko blízko německo-francouzských hranic.

Budova Slovenského rozhlasu, Bratislava, Slovensko

Budova Slovenského rozhlasu je architektonicky zajímavá stavba v Bratislavě na Mýtné ulici. Je postavena z ocelové konstrukce ve tvaru obrácené pyramidy. Autory projektu jsou Štefan Svetko, Štefan Ďurkovič a Barnabáš Kissling. Projekt vznikl v roce 1967. Stavba byla dokončena až v roce 1983. Obsahuje velkorysé vnitřní prostory, vynikající koncertní síň a dobře vybavená nahrávací studia. Jsou zde umístěny i jedny z největších varhan na Slovensku. Celková výška budovy po vrchol antény je 80 metrů. Je nositelem titulu Stavba století na Slovensku v kategorii Společenské stavby.

Benátské věže, Barcelona, Španělské království

Benátské věže (v katalánštině : *Torres Venecianes*) je populární jméno pro dvojici věží na Avinguda de la Reina Maria Cristina na křižovatce s Plaça d'Espanya v Barceloně, Katalánsko, Španělsko.

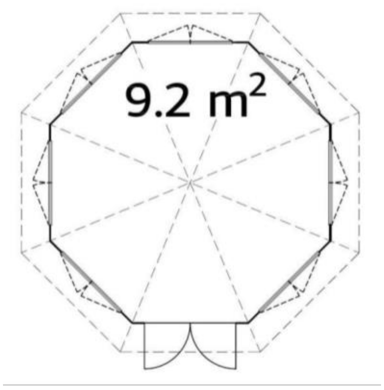
Na každé straně ulice je jedna věž. Věže jsou vysoké 47 metrů a mají průřez 7,2 metrů čtverečních. Dolní část každé z nich je postavena z umělého kamene, hlavní část pak z červených cihel. Horní část je kolonádová vyhlídková galerie postavená z umělého kamene a zakončená pyramidovou měděnou střechou. Věže byly modelovány podle zvonice Baziliky svatého Marka v Benátkách.

Byly postaveny v letech 1927 až 1929 jako součást přestavby oblasti pro mezinárodní výstavu v Barceloně v roce 1929. V současnosti mají ozdobnou funkci, označují vstup do výstavní čtvrti nyní známé jako Fira de Barcelona.

Původně byly věže otevřené pro veřejnost, která mohla vylézt po vnitřních schodech do vyhlídkových galerií, ale nyní jsou zavřené a veřejnosti nepřístupné.

Střecha zahradního domku ve tvaru pláště pravidelného osmibokého jehlanu

Zahradní domek jako místo pro uskladnění zahradního nářadí nebo jako základ pohodlného posezení je vyráběn v různých variantách s různými tvary půdorysů a tedy i s odpovídajícími typy střech. Na obrázku je zahradní domek s osmiúhelníkovým půdorysem a se střechou v podobě pláště pravidelného osmibokého jehlanu.



Stříška prolézačky ve tvaru čtyřboké jehlanové plochy

Prolézací věže na dětských hřištích jsou většinou zastřešeny čtyřbokými jehlanovými plochami.

Jehlanové stany

Jehlanové stany mají atraktivní tvar pláště šestibokého jehlanu s velkými plochami pro reklamní potisk. Jejich hlavní využití je tedy pro prezentační účely. Výhodou je jednoduché provedení s rozsáhlými možnostmi využití.

Konstrukce jehlanových stanů je velice jednoduchá a snadno sestavitelná. Tyto stany se skládají pouze z hliníkové podpěry a textilní plachtové střechy ve tvaru šestiboké jehlanové plochy. V hranách stanu jsou všité vypínací popruhy.

Čtyřstěnná hrací kostka

Čtyřstěnná hrací kostka umožňuje házet čísla 1 – 4. Hodí se k některým stolním hrám. Někteří si ji pořizují pouze jen ze sběratelské vášně.

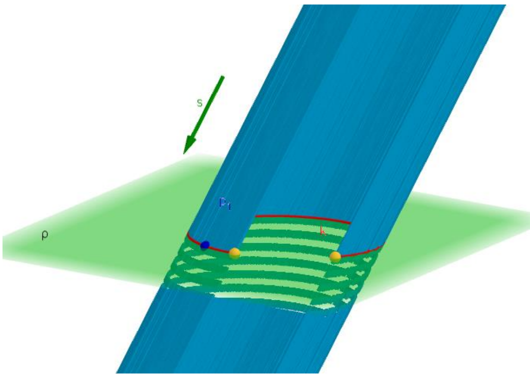
Kompostéry

Plastové kompostéry s automatickým otevíráním poklopu díky svým speciálním tvarům (komolý čtyřboký jehlan, komolý šestiboký jehlan) umožňují **lepší cirkulaci vzduchu. Ta pak** urychluje kompostování.

3.3.3 Válcová plocha, válcový prostor a válce

Definice 3.43:

Nechť k je křivka ležící v rovině ρ a nechť **s** je směr různoběžný s rovinou ρ. Množina všech přímek p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, které protínají křivku k a které jsou rovnoběžné se směrem **s,** se nazývá **válcová plocha**.



Poznámka: Křivka k se nazývá **řídicí křivka**, směr **s** se nazývá **řídicí směr** a přímky p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, plochy se nazývají **površky**.

Definice 3.44:

Je-li křivka k uzavřená a omezuje-li v rovině ρ konvexní množinu, pak válcová plocha rozdělí trojrozměrný prostor na dvě části. Konvexní část prostoru se nazývá **válcový prostor**.

Místo obecného válcového prostoru lze definovat speciálně i tzv. kruhový válcový prostor a to tak, že místo uzavřené křivky k ležící v rovině ρ budeme v rovině ρ uvažovat kruh κ daný kružnicí k_ρ, tj.:

Definice 3.45:

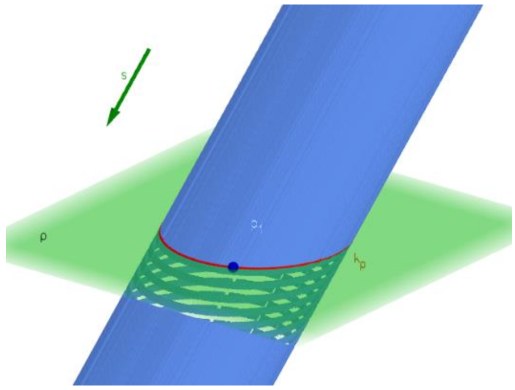
Nechť κ je kruh (elipsa) ležící v rovině ρ a nechť **s** je směr různoběžný s rovinou ρ. **Kruhovým (eliptickým) válcovým prostorem** rozumíme množinu bodů všech přímek p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, protínajících kruh (elipsu) κ daný/danou kružnicí (elipsou) k_ρ a rovnoběžných se směrem **s**.

Poznámka: Kružnice (elipsa) k_ρ se nazývá **řídicí kružnice (elipsa)** kruhového (eliptického) válcového prostoru nebo kruhové (eliptické) válcové plochy.

Uvažujeme-li v rovině ρ místo křivky k kružnici (elipsu) k_ρ, můžeme kruhovou válcovou plochu definovat následovně:

Definice 3.46:

Kruhová (eliptická) válcová plocha je množina všech přímek p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, rovnoběžných se směrem **s** a protínajících řídicí kružnici (elipsu) k_ρ.



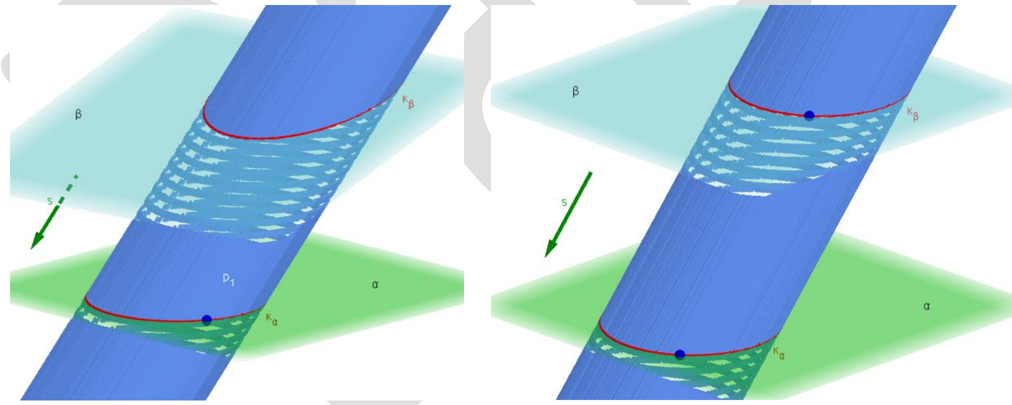
Definice 3.47:
Přímky válcového prostoru, které nejsou přímkami válcové plochy, se nazývají **vnitřní přímky** válcového prostoru. Všechny body vnitřních přímek válcového prostoru vyplňují vnitřek tohoto prostoru a nazývají se **vnitřní body** válcového prostoru.

Definice 3.48:
Přímky, které patří do téhož směru **s** jako přímky válcové plochy, se nazývají **vrcholové přímky**.

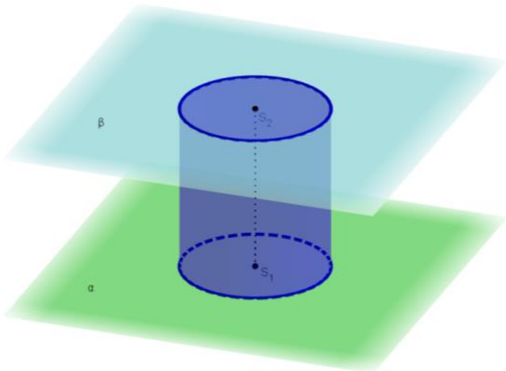
Definice 3.49:
Roviny, které jsou rovnoběžné s přímkami válcové plochy, se jmenují **vrcholové roviny**. Ta vrcholová rovina, která obsahuje střed řídicí kružnice (elipsy) plochy a která je kolmá k její rovině, se nazývá **hlavní vrcholová rovina** válcové plochy.

Definice 3.50:
Válcový prostor nebo **válcová plocha** se nazývá **rotační**, jestliže směr **s**, do něhož patří přímky válcového prostoru nebo válcové plochy, je kolmý k rovině řídicí kružnice k_ρ. **Válcový prostor**, který není rotační, se nazývá **kosý** a analogicky se nerotační **válcová plocha** nazývá **kosá**.

Definice 3.51:
Kruhový (eliptický) válec je dán kruhovým (eliptickým) válcovým prostorem a dvojicí různých rovin α, β, které nejsou rovnoběžné se směrem **s**. Tj. kruhový (eliptický) válec je průnikem kruhového (eliptického) válcového prostoru buď s klínem určeným různoběžnými rovinami α, β anebo s vrstvou určenou různými, navzájem rovnoběžnými rovinami α, β.

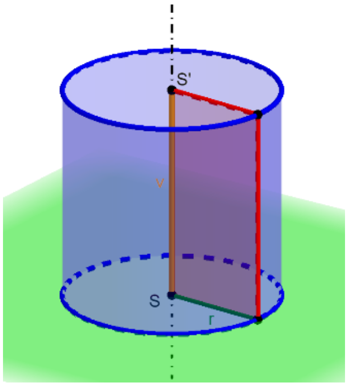


Poznámka: Ve školské matematice a také v dalším textu uvažujeme kruhovým válcem těleso vzniklé vyříznutím kruhového válcového prostoru dvěma různými, navzájem rovnoběžnými rovinami α, β. Jinými slovy řečeno, kruhovým válcem rozumíme geometrický útvar společný kruhovému válcovému prostoru a vrstvě určené různými, navzájem rovnoběžnými rovinami α, β.



Na 2. stupni ZŠ se setkáváme s následující definicí rotačního válce.

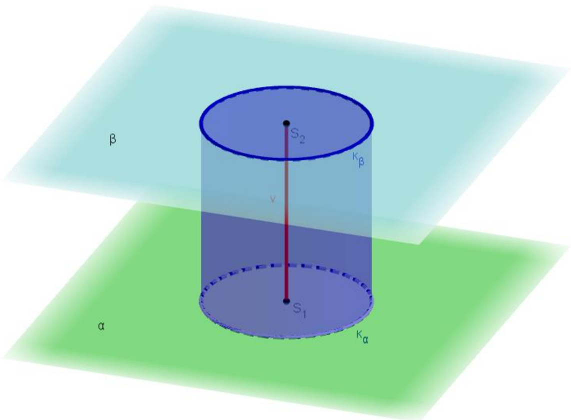
Definice 3.52:
Část prostoru vymezená rotací obdélníku kolem jedné jeho strany nebo kolem jedné jeho střední příčky se nazývá **rotační válec.** Tato jeho strana (resp. střední příčka) v, kde $v \in \mathbf{R}$, $v > 0$, kolem níž obdélník rotuje, je **výškou** rotačního válce, s ní sousední strana (resp. jedna polovina druhé střední příčky) r, kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, je **poloměrem řídicí kružnice** rotačního válce a strana rovnoběžná se stranou v daného obdélníku je **površkou/stranou** rotačního válce.



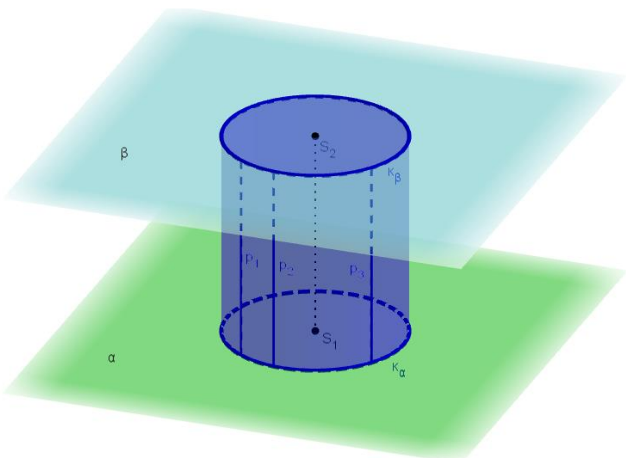
Poznámka: Pojmy kruhový válec a rotační válec jsou ekvivalentní pojmy.

Definice 3.53:
Roviny α, β nazýváme **podstavnými rovinami** kruhového válce. Kruhy $\kappa_\alpha, \kappa_\beta$, v nichž po řadě roviny α, β protínají kruhový válcový prostor, nazýváme **podstavami kruhového válce.**

Poznámka: **Výškou** válce rozumíme vzdálenost podstavných rovin α, β nebo vzdálenost kruhů $\kappa_\alpha, \kappa_\beta$.

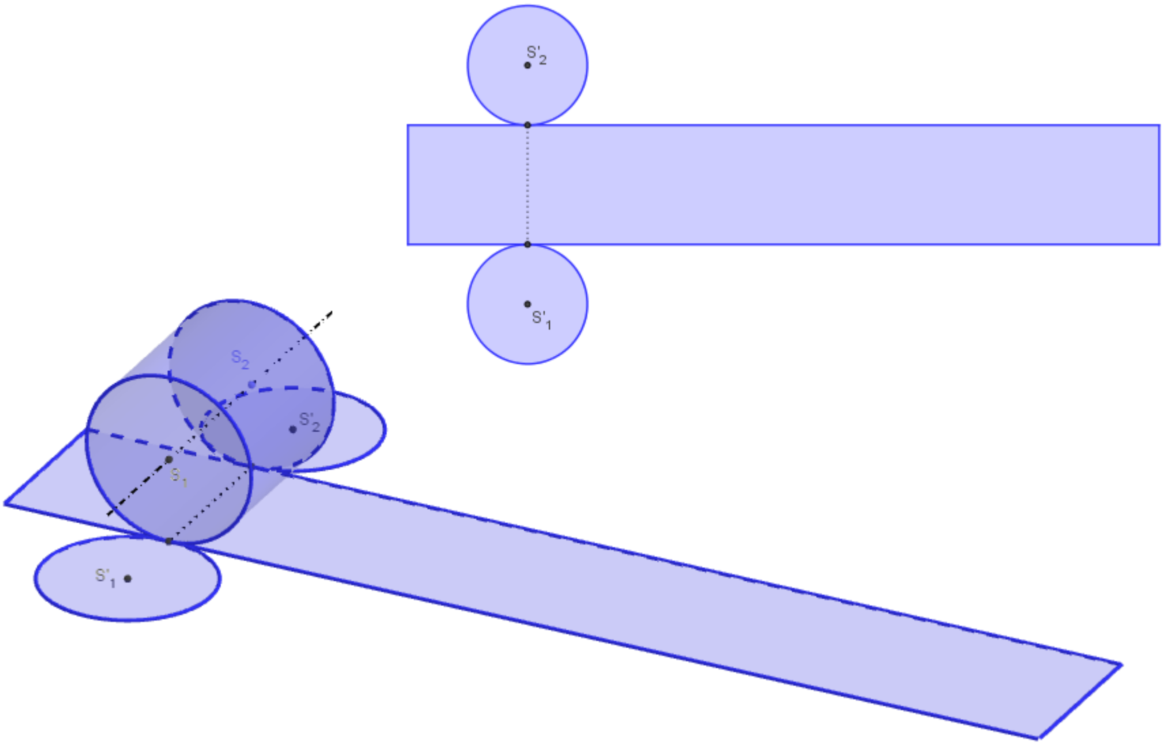


Definice 3.54:
Úsečky vyťaté na přímkách příslušné kruhové válcové plochy rovinami α, β nazýváme **površky** p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, kruhového válce. Površky p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, kruhového válce tvoří jeho **plášť.**



Poznámka: Oba podstavné kruhy κ_α, κ_β společně s pláštěm válce tvoří jeho **povrch**.

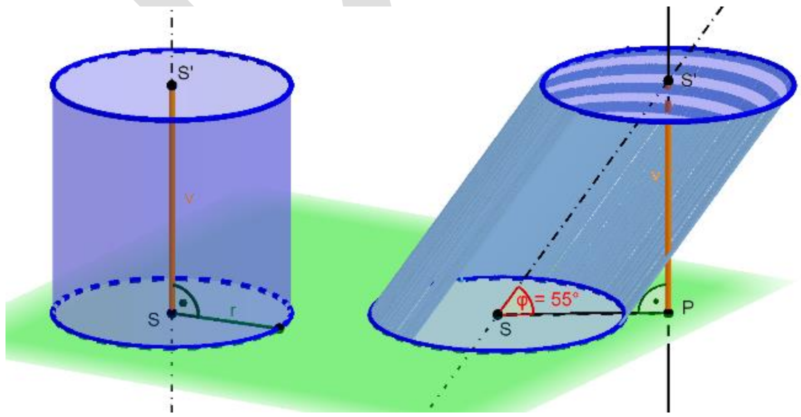
Poznámka: Zobrazením povrchu kruhového válce do roviny získáme **síť** kruhového válce.



3.3.3.1 Rozdělení válců

Válce rozdělujeme podle ***úhlu, který svírají površky*** (resp. ***osa***) ***kruhového válce s podstavnou rovinou***, na

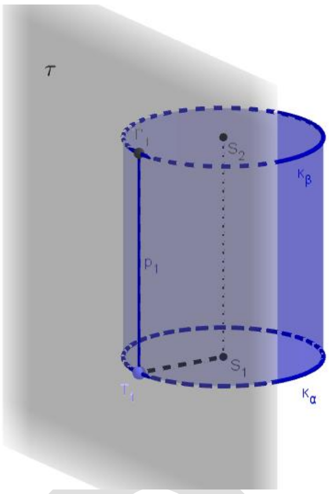
- **kolmé kruhové válce** – površky, resp. osa kruhového válce jsou kolmé k rovině podstavy válce
- **kosé kruhové válce** - površky, resp. osa kruhového válce svírají s rovinou podstavy libovolný ostrý úhel



Definice 3.55:
Válec se nazývá **rotační válec**, jestliže k němu příslušný válcový prostor je rotační válcový prostor. Válec, který není rotační, se nazývá **kosý válec**.

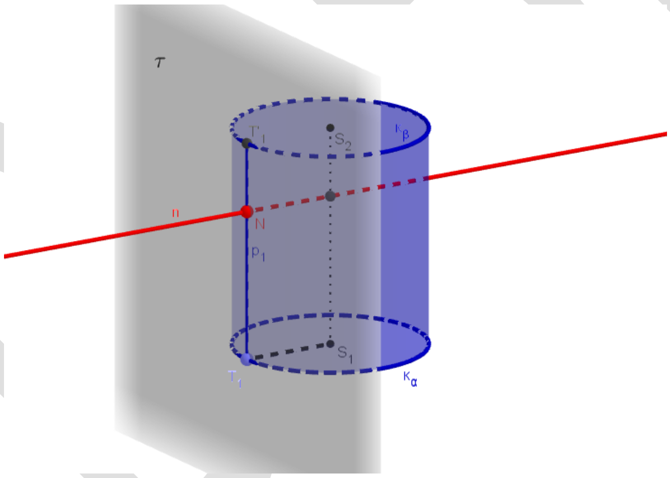
Definice 3.56:

Tečnou rovinou τ kruhového válce rozumíme takovou rovinu, jejímž průnikem s kruhovým válcem je právě jedna površka *p* plochy. Površku *p* nazýváme **dotykovou površkou** tečné roviny τ s pláštěm kruhového válce.



Definice 3.57:

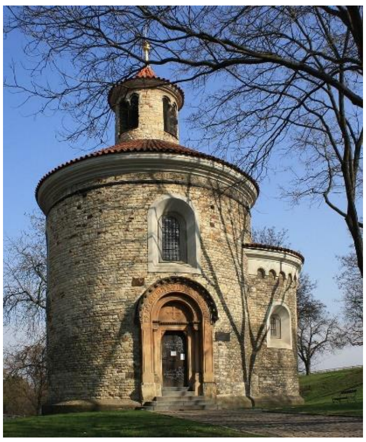
Kolmice k tečné rovině τ vedená libovolným bodem *N* dotykové površky *p* se nazývá **normála kruhového válce** v tomto bodě.



3.3.3.2 Příklady válců, plášťů válců a válcových ploch v reálném životě

Rotunda

Rotunda (z lat. *rotundus*, „kruhový“) je typ stavby na kruhovém půdorysu typický pro předrománský a románský sloh, tedy období raného středověku.



Kostel sv. Jakuba s věží válcovitého tvaru, Jemnice, ČR

Kostel svatého Jakuba (případně **Kostel svatého Jakuba staršího**) se nachází na terénní výspě nad údolím řeky Želetavky na hřbitově v severozápadní části města Jemnice. Je filiálním kostelem římskokatolické farnosti Jemnice. Kostel je pozdně románskou jednolodní stavbou s románskou válcovou věží, věž je postavena na rotundě z počátku 12. století. Kostel je chráněn jako kulturní památka České republiky.

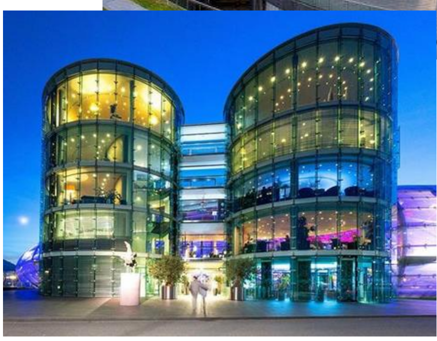
,

Silážní věž, pivovar Svijany, ČR

Pivovar *Svijany* patří mezi nejstarší pivovary v Česku, byl založen před rokem 1564. Součástí komplexu pivovaru je i silážní věž válcovitého tvaru.

Mayday Bar, Red Bull Hangar - 7, Salzburg, Rakousko

Mayday Bar Red Bull Hangar – 7 patří mezi jedno z fantastických míst Salzburgu. Jedná se o bar s restaurací umístěný v těsné blízkosti salzburského letiště. Z restaurace je možné pozorovat historická letadla umístěná v proskle-ném hangáru.



Nápojová plechovka

Nápojová plechovka je společně s lahvemi a nápojovými kartony nejběžnější malospotřebitelský obal pro nápoje. Slouží pro transport nápojů i jako nádoba na pití. Plechovky se používají především pro nápoje sycené oxidem uhličitým jako je pivo a nápoje na bázi koly. Moderní nápojové plechovky jsou vyrobeny jako jednodílné válcové nádoby z hliníku nebo bílého plechu, uzavřené zalemovaným hliníkovým víčkem.

Herní sestava - mašinka

Na dětských hřištích se objevují prolézačky různých typů a tvarů. Jedním z příkladů je dřevěná mašinka s prolézacím tunelem ve tvaru válcové plochy.

Bytové doplňky

Předměty válcovitých tvarů lze najít i např. v bytovém designérství. Jedním z příkladů je taburet s válcovitým sedátkem.

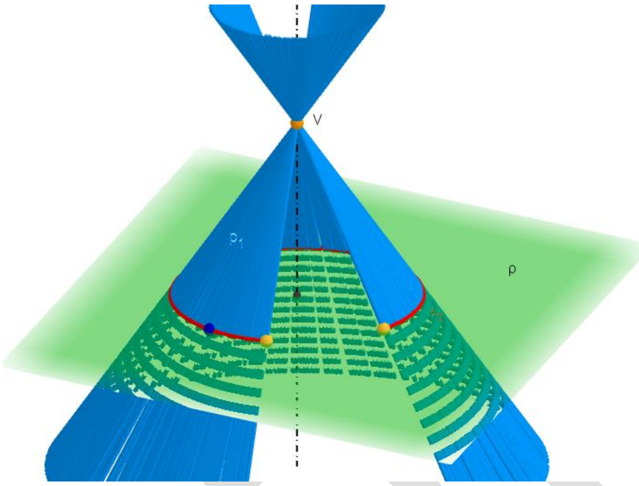
Rubikův sýr

Kromě klasické Rubikovy kostky ve tvaru krychle 3 x 3 x 3 se vyrábí i válcová variace Rubikovy kostky. Ta si co do zábavnosti nic se svou klasickou předchůdkyní nezadá.

3.3.4 Kuželová plocha, kuželový prostor a kužele

Definice 3.58:

Nechť k je křivka ležící v rovině ρ a nechť bod V není bodem roviny ρ. Množina všech přímek p_i, i = 1, 2, 3, …, které protínají křivku k a které procházejí bodem V, se nazývá **kuželová plocha**.



Poznámka: Křivka k se nazývá **řídicí křivka**, bod V se nazývá **vrchol** kuželové plochy a přímky p_i, i = 1, 2, 3, …, plochy se nazývají **površky**.

Definice 3.59:

Je-li křivka k uzavřená a omezuje-li v rovině ρ konvexní množinu, pak kuželová plocha rozdělí trojrozměrný prostor na dvě části. Konvexní část prostoru se nazývá **kuželový prostor**.

Místo obecného kuželového prostoru lze definovat speciálně i tzv. kruhový kuželový prostor a to tak, že místo uzavřené křivky k ležící v rovině ρ budeme v rovině ρ uvažovat kruh κ daný kružnicí k_ρ , tj.:

Definice 3.60:

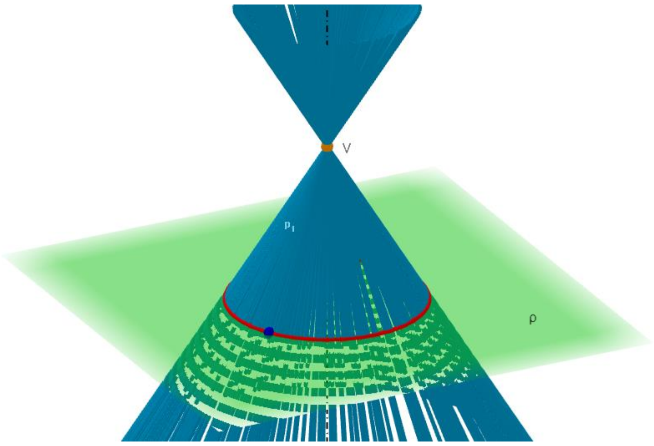
Nechť κ je kruh ležící v rovině ρ a nechť V je bod neincidentní s rovinou ρ. **Kruhovým kuželovým prostorem** rozumíme množinu bodů všech přímek p_i, i = 1, 2, 3, …, protínajících kruh κ a procházejících daným bodem V.

Poznámka: Kružnice k_ρ se nazývá **řídicí kružnice** kruhového kuželového prostoru nebo kruhové kuželové plochy.

Uvažujeme-li v rovině ρ místo křivky k kružnici k_ρ, můžeme kruhovou kuželovou plochu definovat následovně:

Definice 3.61:

Kruhová kuželová plocha je množina všech přímek p_i, i = 1, 2, 3, …, procházejících bodem V neincidentním s rovinou ρ a protínajících řídicí kružnici k_ρ.



Definice 3.62:
Přímky kuželového prostoru, které nejsou přímkami kuželové plochy, se nazývají **vnitřní přímky** kuželového prostoru. Všechny body vnitřních přímek kuželového prostoru vyplňují vnitřek tohoto prostoru a nazývají se **vnitřní body** kuželového prostoru. Vrchol *V* kuželového prostoru (kuželové plochy) však nepočítáme k vnitřku kuželového prostoru (kuželové plochy).

Definice 3.63:
Přímky, které procházejí vrcholem kuželové plochy, se nazývají **vrcholové přímky**.

Definice 3.64:
Roviny, které procházejí vrcholem kuželové plochy, se nazývají **vrcholové roviny**. Ta vrcholová rovina, která obsahuje střed řídicí kružnice plochy a která je kolmá k její rovině, se nazývá **hlavní vrcholová rovina** kuželové plochy.

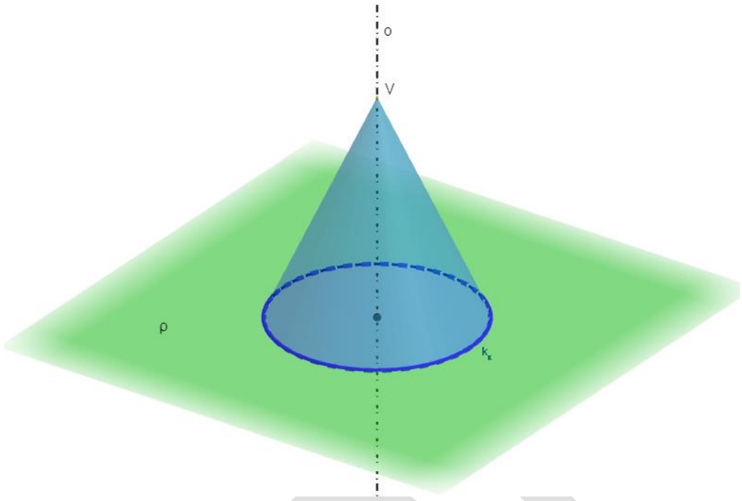
Definice 3.65:
Každá přímka kuželového prostoru je vrcholem *V* rozdělena na dvě opačné polopřímky. Ty polopřímky, které procházejí body řídicího kruhu κ, vyplňují **část kruhového kuželového prostoru**, kterou nazýváme **přilehlou k řídicí kružnici k_ρ**. Ty polopřímky, které protínají řídicí kružnici k_ρ, vyplní **část kruhové kuželové plochy**, jíž říkáme **přilehlá k řídicí kružnici k_ρ.**

Definice 3.66:
Kuželový prostor (**kuželová plocha**) se nazývá **rotační**, jestliže přímka spojující vrchol *V* se středem řídicí kružnice k_ρ je kolmá k rovině, v níž řídicí kružnice k_ρ leží. **Kuželový prostor**, který není rotační, se nazývá **kosý** a analogicky nerotační kuželová plocha se nazývá **kosá kuželová plocha**.

Definice 3.67:
Označme *K* tu část kruhového kuželového prostoru s vrcholem *V*, která je přilehlá k řídicí kružnici k_ρ ležící v rovině ρ. Potom geometrický útvar společný útvaru *K* a poloprostoru (ρV) nazýváme **kruhovým kuželem**.

Jinými slovy je možné kruhový kužel definovat také následovně:

Definice 3.68:
Kruhový kužel je část kruhového kuželového prostoru ohraničená rovinou ρ a bodem *V*, který v rovině ρ neleží.

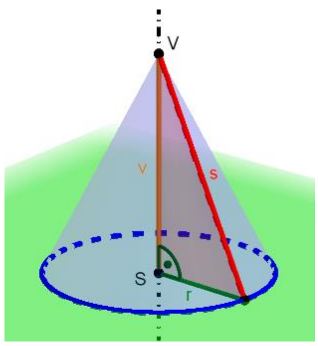


Definice 3.69:
Rovinu ρ nazýváme **podstavnou rovinou** kruhového kužele a kruh κ omezený řídicí kružnicí k_ρ ležící v rovině ρ nazýváme **podstavou kruhového kužele.**

Definice 3.70:
Bod *V* se nazývá **vrchol kužele**.

Na 2. stupni ZŠ se setkáváme s následující definicí rotačního kužele.

Definice 3.71:
Část prostoru vymezená rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho odvěsny se nazývá **rotační kužel.** Jeho odvěsna *v,* kde $v \in \mathbf{R}$, $v > 0$, je **výškou** rotačního kužele, druhá odvěsna *r,* kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, je **poloměrem řídicí kružnice** rotačního kužele a přepona *s,* kde $s \in \mathbf{R}$, $s > 0$, pravoúhlého trojúhelníku je **površkou/stranou** rotačního kužele.

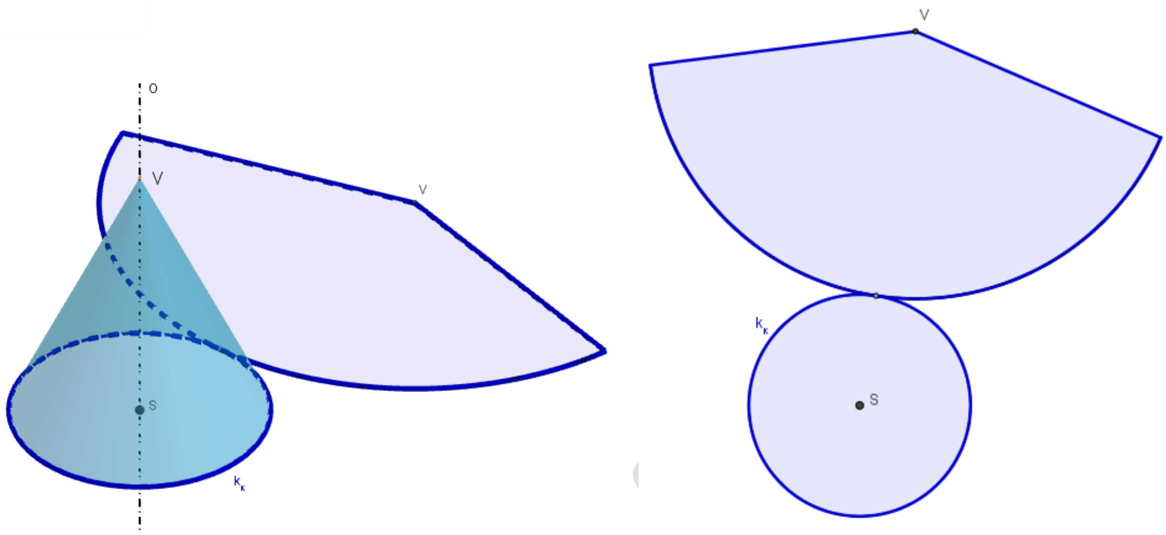


Poznámka: Pojmy kužel s kruhovou podstavou/kruhový kužel a rotační kužel jsou ekvivalentní pojmy.

Definice 3.72:
Úsečky, které leží na přímkách kuželové plochy a které jsou ohraničené vrcholem *V* kužele a body řídicí kružnice k_ρ, se nazývají **površky** kužele. Všechny površky p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, kruhového kužele tvoří jeho **plášť.**

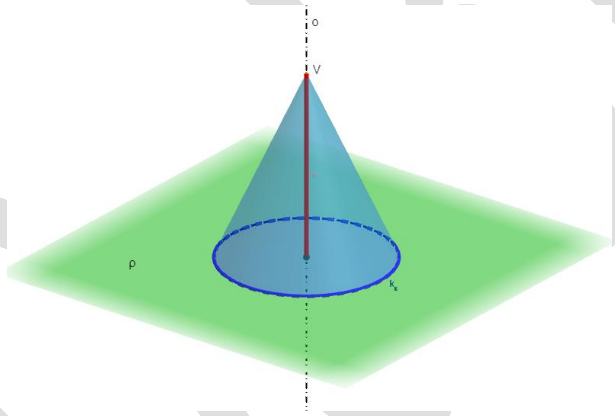
Poznámka: Podstavný kruh κ (podstava kruhového kužele) společně s pláštěm kruhového kužele tvoří jeho **povrch**.

Poznámka: Zobrazením povrchu kruhového kužele do roviny získáme **síť** kruhového kužele.



Poznámka: Ty body kruhového kužele, které nepatří jeho povrchu, tvoří **vnitřek kruhového kužele**.

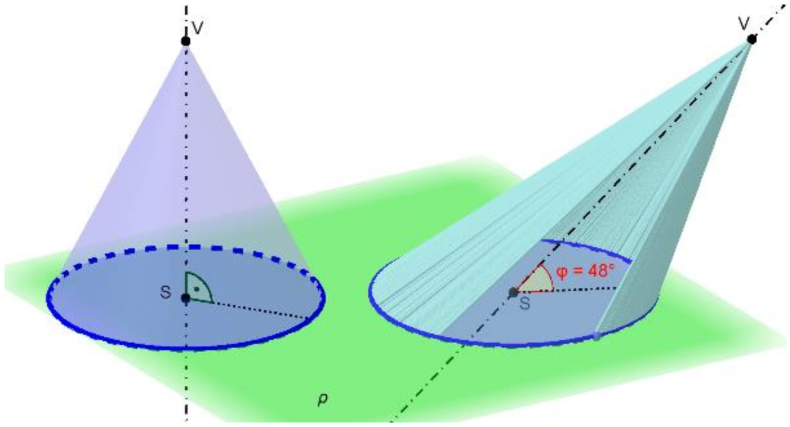
Poznámka: **Výškou** *v* kruhového kužele rozumíme vzdálenost vrcholu *V* od podstavné roviny ρ.



3.3.4.1 Rozdělení kuželů

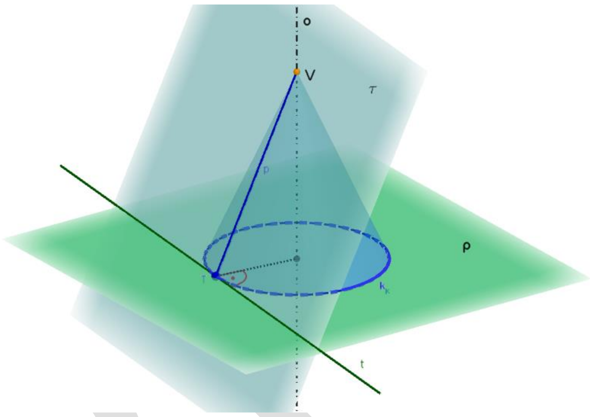
Kužele rozdělujeme podle ***úhlu, který svírá osa o kruhového kužele (přímka spojující vrchol V kruhového kužele se středem S kruhové podstavy téhož kužele) s podstavnou rovinou,*** na

- **rotační kruhové kužele** – osa *o* kruhového kužele je kolmá k rovině podstavy kužele
- **kosé kruhové kužele** - osa kruhového kužele svírá s rovinou podstavy libovolný ostrý úhel

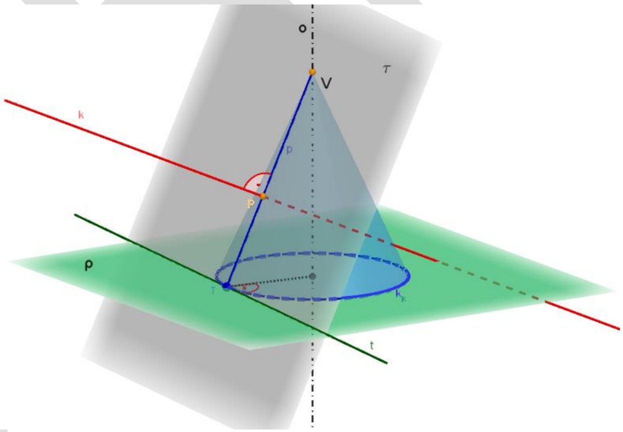


Definice 3.73:
Kužel se nazývá **rotační kužel**, jestliže k němu příslušný kuželový prostor je rotační kuželový prostor. Kužel, který není rotační, se nazývá **kosý kužel**.

Definice 3.74:
Tečnou rovinou τ kruhového kužele rozumíme takovou rovinu, jejímž průnikem s kruhovým kuželem je právě jedna površka p plochy. Površku p nazýváme **dotykovou površkou** tečné roviny τ s pláštěm kruhového kužele.

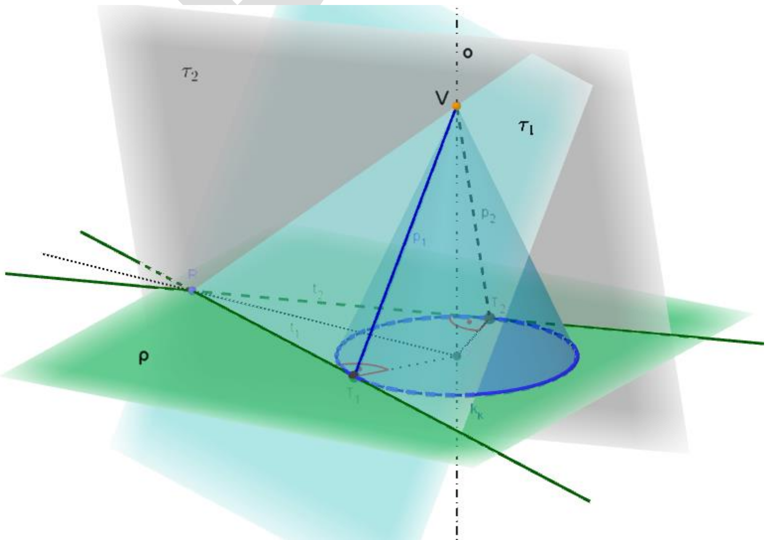


Definice 3.75:
Kolmice k tečné rovině τ vedená libovolným bodem P dotykové površky p se nazývá **normála kruhového kužele** v tomto bodě.



Poznámka: Tečná rovina kruhového kužele vždy inciduje s vrcholem V kužele.

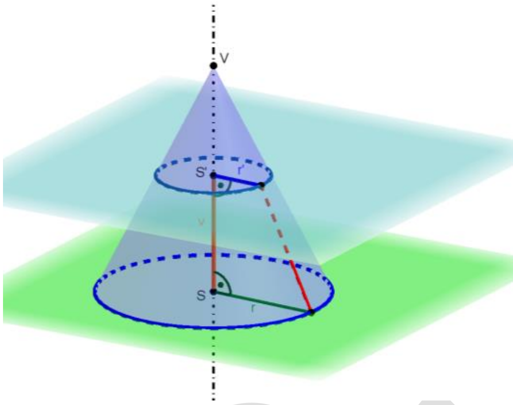
Poznámka: Každým vnějším bodem kruhového kužele procházejí právě dvě tečné roviny kužele.



3.3.4.2 Komolý kužel

Definice 3.76:

Rovina ρ', rovnoběžná s rovinou ρ podstavy kužele a protínající jeho některou površku v jejím vnitřním bodě, rozdělí kruhový kužel v nový kruhový kužel a v další těleso zvané **komolý kužel**.



Definice 3.77:

Roviny ρ, ρ' protínají daný kruhový kužel v kruzích zvaných **podstavy komolého kužele**.

Definice 3.78:

Vzdálenost v' rovin ρ, ρ' kruhových podstav komolého kužele se nazývá **výška komolého kužele.**

Definice 3.79:

Úsečky na přímkách kruhové kuželové plochy příslušné k danému kruhovému kuželi, které jsou omezené průsečíky těchto přímek s podstavami komolého kužele, se nazývají **strany komolého kužele**.

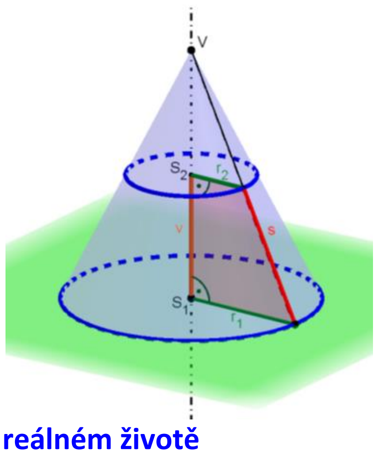
Definice 3.80:

Je-li daný kužel rotační, pak z něho vzniklý **komolý kužel** se také nazývá **rotační**. Jeho strany jsou shodné úsečky.

Na 2. stupni ZŠ se setkáváme s následující definicí rotačního komolého kužele.

Definice 3.81:

Část prostoru vymezená rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem jeho ramena, které svírá pravé úhly s jeho základnami, se nazývá **rotační komolý kužel.** Toto jeho rameno v, kde $v \in$ **R**, $v > 0$, je **výškou** rotačního komolého kužele, druhé rameno s, kde $s \in$ **R**, $s > 0$, pravoúhlého lichoběžníku je **površkou/stranou** rotačního komolého kužele a délky základen r_1, r_2, kde $r_1 \in$ **R**, $r_1 > 0$, $r_2 \in$ **R**, $r_2 > 0$, pravoúhlého lichoběžníku jsou **poloměry řídicích kružnic** kruhových podstav rotačního komolého kužele.



3.3.4.3 Příklady kuželů, plášťů kuželů a kuželových ploch v reálném životě

Rotunda Nalezení sv. Kříže, Praha

Rotunda Nalezení svatého Kříže, tradičně nazývaná také **kostel svatého Kříže Menšího** pro odlišení od kostela svatého Kříže Většího v zaniklém cyriátském klášteře, je románská rotunda v Praze 1, městské části Staré Město na křižovatce Konviktské ulice s ulicí Karoliny Světlé. Její vznik je kladen do doby po roce 1125. Rotunda je evidována jako kulturní památka České republiky.

Střecha Rotundy Nalezení sv. Kříže je částečně tvořena kuželovou plochou a částečně pak komolým kuželem.

Dopravní kužel

Dopravní kužel patří mezi dopravní zařízení. Označuje místo, kde řidič nesmí se svým vozidlem vjet a ani poškodit nebo vyvrátit kužel. Dopravní kužely se používají zejména k dočasné reorganizaci dopravního zařízení, např. při opravě silnice, dopravní nehodě apod. Pro lepší viditelnost mohou být doplněny o reflexní pruh. Dopravní kužely mají ve své výbavě hasičské technické automobily, policejní vozidla a vozidla údržby silnic. Dopravní kužele jsou zpravidla tvaru plášťů rotačních kuželů.

Kuželové papírové čepice

Některé dětské oslavy se neobejdou bez pestrobarevných papírových čepic. A když za ně rodiče nechtějí utrácet peníze, mohou je společně s dětmi vyrobit. Papírové čepice jsou představovány plášti rotačních kuželů.

Vietnamský klobouk

Slaměný kuželový klobouk má původ v jižní a jihovýchodní Asii. Na hlavu se připevňuje většinou šátkem. Jeho kuželový tvar má sloužit k tomu, aby ochraňoval hlavu před sluncem a deštěm a zároveň ochlazoval hlavu, ponoříme-li ho do vody. Kuželový oblouk je představován pláštěm rotačního kužele, resp. kuželovou rotační plochou.

Zmrzlinový kornout

Zatímco zmrzlina je známá více než tisíc let, první zmrzlinu v kornoutku byste si mohli dát servírovanou Ernestem Hamwi původem ze Sýrie roku 1904 v St. Louis v rámci Světové výstavy. V téměř všech zdrojích se uvádí, že k vynálezu kornoutu došlo náhodou. Ve zmrzlinovém stánku vedle Hamwiho stánku s vaflemi došlo nádobí. Hamwi duchaplně zavinul horkou vafli, která ztuhla a perfektně posloužila k servírování zmrzliny. Patent na kornoutek byl vydán v USA 1. 6. 1920 právě Ernestu Hamwi.

K servírování zmrzliny se před vynálezem kornoutku používaly pohárky či talířky. Zmrzlina byla ve svých počátcích exkluzivním dezertem, který si mohli dovolit pouze nejbohatší vrstvy obyvatel, respektive šlechta. Jíst rukama by bylo neslušné. Jsou doloženy případy, že součástí královských servisů na konci 18. století byly právě pohárky na zmrzlinu.

Zmrzlinový kornout je představován pláštěm rotačního kužele, resp. rotační kuželovou plochou.

Dřevěný kužel na stáčení zmrzlinových kornoutů

Zatímco klasické zmrzlinové kornouty představují pláště rotačních kuželů, resp. rotační kuželové plochy, tak části dřevěných kuželů na stáčení zmrzlinových kornoutů tvoří kužele.

Homole cukru

Homole cukru bylo dříve tradiční balení cukru. Běžně byla vyráběna a prodávana do konce 19. století (místy i na začátku 20. století), kdy ji nahradil krystalický a kostkový cukr. Měla tvar komolého rotačního kužele. Její výška byla kolem 30 cm.

Skleničky

Skleničky na různé druhy nápojů jsou různých typů a tvarů. Na obrázku jsou skleničky na víno (s nožičkou) ve tvaru kužele a komolého kužele, dále pak skleničky např. na vodu a jiné nápoje opět ve tvaru komolého kužele.

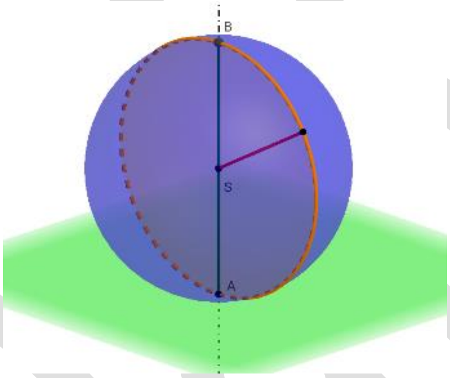

Vonná svíčka ve skle

Vonné svíčky jsou různých tvarů. Na obr. např. vonné svíčky ve sklenicích tvaru komolého kužele. Na trhu ale najdeme i svíčky jako rotační kužele.

3.3.5 Kulová plocha, koule a její části

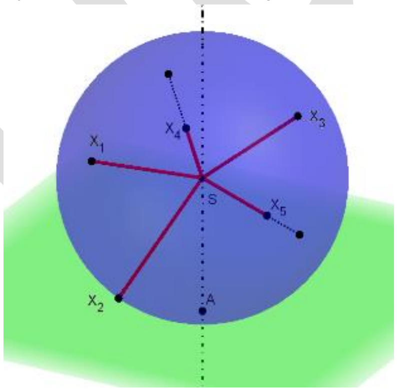
Definice 3.82:

Nechť je dán bod S a nenulová délka r. **Kulovou plochou** rozumíme množinu všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu S tutéž vzdálenost r.



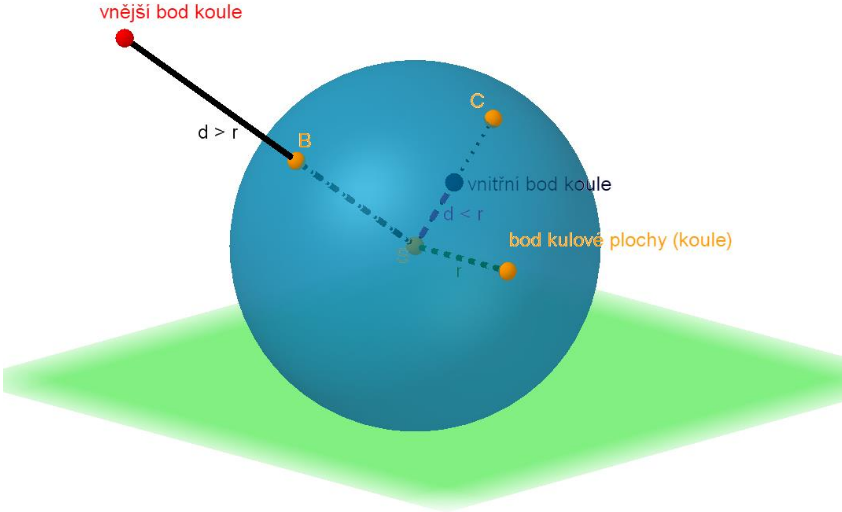
Definice 3.83:

Koule je množina všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu S vzdálenost nejvýše rovnou dané nenulové délce r.



Poznámka: Bod S se nazývá **střed kulové plochy**, resp. **koule** a vzdálenost r se nazývá **poloměr kulové plochy**, resp. **koule**.

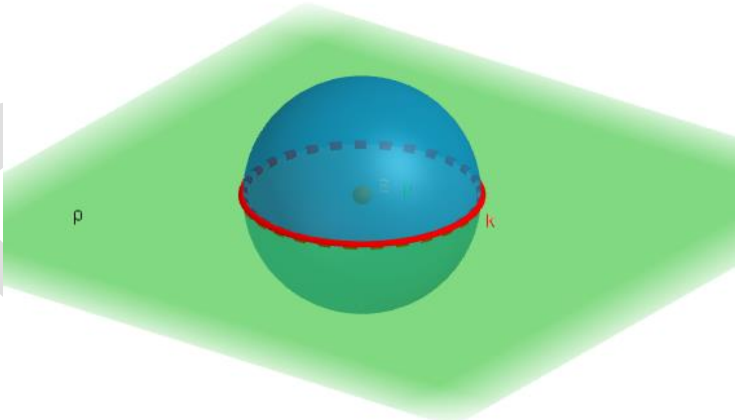
Poznámka: Nechť d, r jsou nenulové vzdálenosti, přitom r představuje poloměr koule. Podle vzdálenosti d bodů prostoru od středu S koule rozeznáváme **vnitřní body koule** ($0 \leq d < r$), **vnější body koule** ($d \geq r$) **a body koule** ($d = r$).



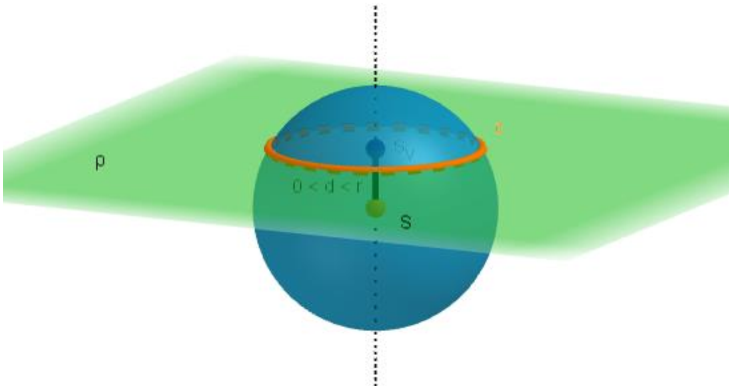
3.3.5.1 Průnik kulové plochy nebo koule a roviny

Průnik kulové plochy s rovinou ρ je závislý na vzdálenosti *d* roviny ρ od středu *S* kulové plochy.

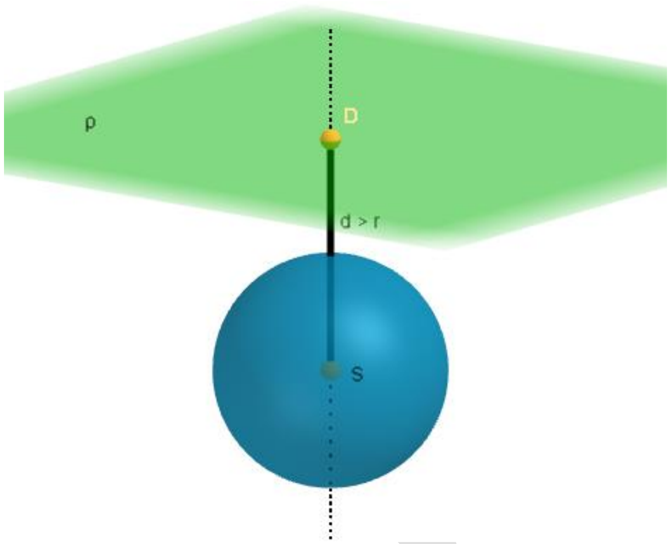
a) Je-li $d = 0$, rovina ρ inciduje se středem *S* kulové plochy a průnikem roviny ρ a kulové plochy je tzv. **hlavní kružnice**, tj. kružnice *k* se středem *S* a s poloměrem *r.* Rovinu ρ nazýváme **sečnou rovinou.**



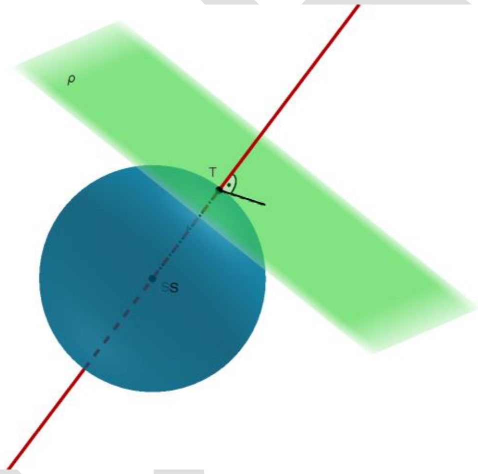
b) Je-li $0 < d < r$, je průnikem roviny ρ a dané kulové plochy tzv. **vedlejší kružnice** *c* se středem S_V, kde S_V je pata kolmice vedené bodem *S* k rovině ρ. Pro její poloměr r_V platí $r_V^{\,2} = r^{\,2} - d^{\,2}$. Rovinu ρ nazýváme **sečnou rovinou.**



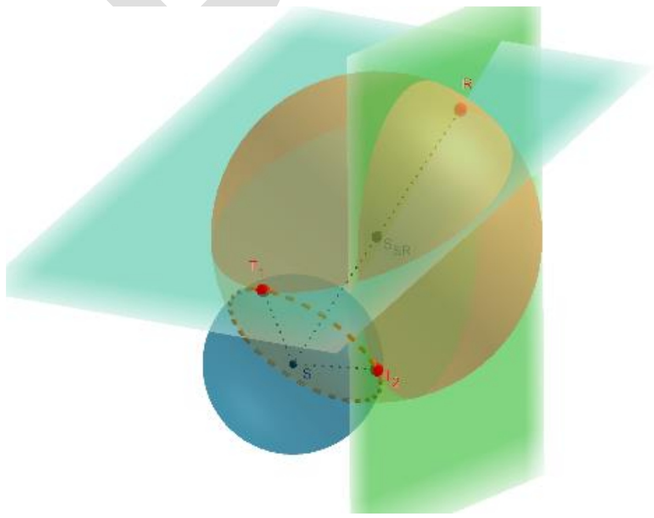
c) Je-li $d > r$, je **průnik** roviny ρ a kulové plochy **prázdný**.



d) Je-li $d = r$, tj. je-li vzdálenost roviny ρ od středu S kulové plochy rovna poloměru kulové plochy, je průnik roviny ρ a kulové plochy jednobodový. V takovém případě je průnikem roviny ρ a kulové plochy **pata *T*** kolmice vedené z bodu S k rovině ρ. Rovina ρ se nazývá **tečná rovina** kulové plochy, bod T se nazývá **dotykový bod** tečné roviny a přímka $n \equiv ST$ se nazývá **normála** kulové plochy v bodě T.

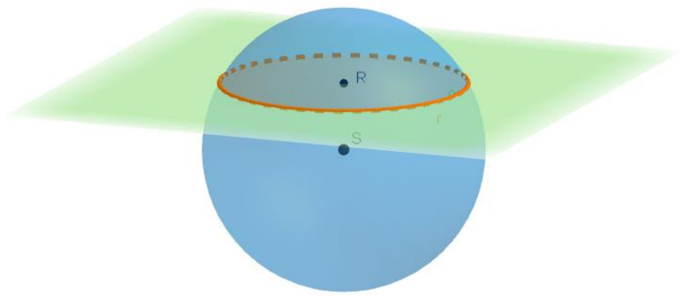


Poznámka: Vnějším bodem kulové plochy prochází nekonečně mnoho tečných rovin dané kulové plochy.



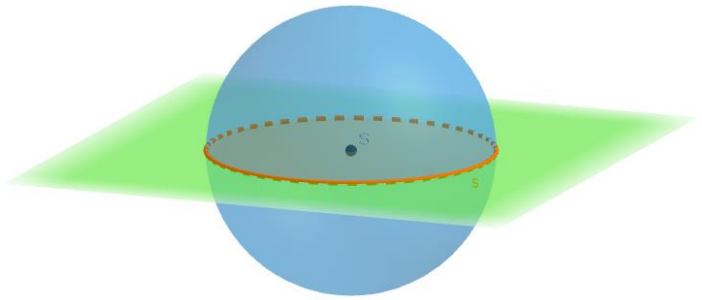
Definice 3.84:

Geometrický útvar společný kouli a kterémukoliv z obou poloprostorů vyťatých sečnou rovinou se nazývá **kulová úseč.**



Definice 3.85:

Protíná-li sečná rovina ρ kulovou plochu v hlavní kružnici, nazývají se obě vzniklé kulové úseče **polokoule**.



Definice 3.86:

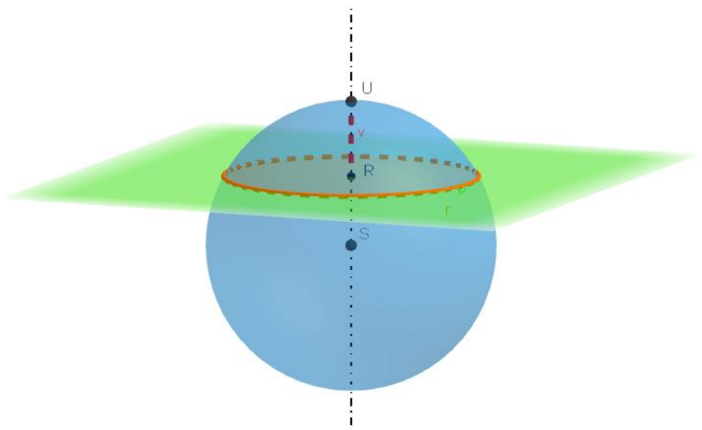
Kruh v sečné rovině určující kulovou úseč se nazývá **podstava kulové úseče.** Příslušná hrana (tj. kružnice omezující kruh v sečné rovině) se nazývá **kruhová hrana kulové úseče.**

Definice 3.87:

Útvar společný kulové úseči a kulové ploše se nazývá **kulový vrchlík**. Kulový vrchlík tvoří společně s podstavou úseče její **povrch**.

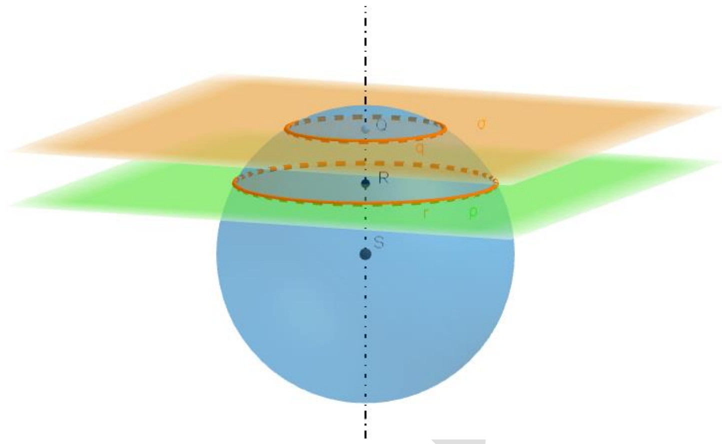
Definice 3.88:

Kolmice *k* vedená středem *R* podstavy kulové úseče k rovině ρ, v níž podstava kulové úseče leží, protíná kulový vrchlík v bodě *U*. Vzdálenost bodu *U* od roviny ρ podstavy kulové úseče se nazývá **výška kulové úseče** nebo **výška kulového vrchlíku**.



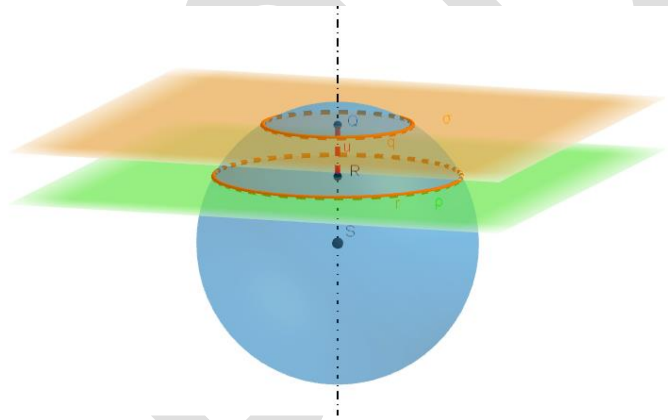
Definice 3.89:

Nechť jsou dány dvě různé, navzájem rovnoběžné sečné roviny ρ, σ kulové plochy. Potom útvar společný kouli a vrstvě (ρ, σ) se nazývá **kulová vrstva**.



Definice 3.90:
Oba kruhy, v nichž roviny ρ, σ protínají kouli, se nazývají **podstavy kulové vrstvy**. Kružnice, které podstavy kulové vrstvy omezují, se nazývají **kruhové hrany vrstvy**.

Definice 3.91:
Útvar společný kulové vrstvě a kulové ploše se nazývá **kulový pás**. Kulový pás a obě podstavy kulové vrstvy tvoří povrch kulové vrstvy. Vzdálenost obou podstav kulové vrstvy se nazývá **výška kulové vrstvy** nebo **výška kulového pásu**.



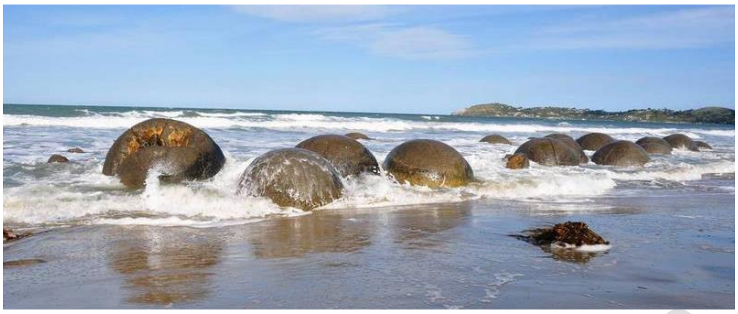
3.3.5.2 Příklady koulí, kulových ploch a jejich částí v přírodě a v reálném životě

Moeraki Boulders (Moeraki balvany), Koekohe Beach, maorská oblast Otago, Nový Zéland – Jižní ostrov

Obrovské kulovité balvany ležící v písku na pláži Koekohe Beach, oblast Otago, **se v celé své kráse odhalí jen během odlivu.** Z dálky se zdá, jako by tady obři hráli kuličky a zapomněli je uklidit. Některé z téměř dokonale kulovitých balvanů mají totiž v průměru až dva metry. Pár z nich už podlehlo erozi, ale ve vyvýšeném jílovitém břehu čekají na odhalení další a další.

V maorském regionu **Otago** je rozeseto podél pobřeží až 50 těchto balvanů. Některé tam leží osamoceně, jiné ve shlucích. Jejich šířka se pohybuje od půl až do 2,2 metry, ale některé jsou v průměru až 3 metry široké. Říká se jim **Moeraki** podle nedaleké rybářské vesničky.

Původ kamenů zůstává nejasný a rovněž se těžko vysvětluje, jak se vzaly na tak neobvyklém místě. Podle zatím nejuznávanější vědecké teorie jde o **minerálové nakupeniny**, které jsou výsledkem eroze, zhušťování a času. Trvalo **60 milionů let**, než se z **měkkých sedimentárních hornin** s velmi jemně zrnitou strukturou, které původně ležely na dně moří, utvořila tvrdá, kompaktní hmota, vzniklá **vysrážením přírodního minerálního cementu** v prostoru mezi zrny sedimentů. Tyto usazeniny byly později vyneseny nahoru a zformoval se z nich na pobřeží útes. Vytrvalý příboj vln, který po miliony let bušil do měkčí skály, způsobil, že se z ní uvolnily kameny a skutálely se dolů na pláž, kde je voda dál omílala.



Lidem však povětšinou vrtá hlavou, čím to, že jsou balvany tak dokonale kulaté. Pověsti **domorodých Maorů** dávají kameny do souvislostí s vrakem velké kanoe **Āraiteuru**, která přivážela předky kmene **Ngai Tahu** k Jižním ostrovu a ztroskotala v bouři poblíž Matakea (Shag Point). Její náklad pak vyplavilo moře na břeh a kulaté koše na úhoře, vodní dýně a sladké brambory se proměnily v kameny.

Podrobnou analýzou pomocí optické mineralogie, rentgenové krystalografie a elektronové mikrosondy se však potvrdilo, že se balvany skládají z **bláta, jemného bahna a jílu, stmelených kalcitem**. Stupeň cementace se přitom liší – uvnitř kamene je relativně slabý oproti značné tvrdosti na jeho povrchu, což je pro kameny velmi neobvyklé. Výzkum složení balvanů také prokázal obsah magnézia a železa, stejně jako stabilních izotopů kyslíku a uhlíku. Vědci jsou přesvědčeni, že kameny za svůj kulový tvar vděčí právě ohromné **difúzi uhlíku**.

Balvany Moeraki jsou však zvláštní také tím, že mají **četné trhliny**, které se paprskovitě rozbíhají z dutého jádra, vyplněného krystaly dolomitu a křemene. Podle vědců k jejich popraskání došlo, když hladina moře poklesla a umožnila spodní vodě protékat skrze jílovité usazeniny obklopující kameny.

I přes tato vědecká vysvětlení obří kulovité kameny nepřestávají udivovat turisty, přírodovědce i záhadology. Jsou prostě fascinující. Podobné lze najít i na jiných místech planety, například v Číně, USA, Rusku, Izraeli i ve Francii.

Avokádo a jeho pecka

Avokádo je ovoce (botanicky), plod hruškovce přelahodného. Zralý plod je zvenku tmavozelené až černé barvy, uvnitř měkký a světležlutý. Dužina se dobře roztírá. Ve středu plodu se nachází kulatá nejedlá pecka o průměru 3 až 5 cm, která lehce naklíčí i v květináči. Avokádo je 7 až 20 cm dlouhé. Zralé plody váží od 100 g až do 1 kg. Běžná roční sklizeň z jednoho stromu je kolem 120 avokád.

La Géode, Paříž

La Géode je panoramatické kino v Paříži, které se nachází v 19. obvodu v parku La Villette. Název je odvozen od toho, že stavba má tvar geodetické kupole (fr. *la géode*). Kino je připojeno k sousednímu muzeu Cité des sciences et de l'industrie. Bylo otevřeno 6. května 1985. Filmy jsou promítány ve formátu IMAX na stěny a strop ve tvaru polokoule o průměru 26 m a ploše 1000 m^2.

Autory stavby jsou architekt Adrien Fainsilber a inženýr Gérard Chamayou. La Géode je samostatná budova. Jedná se o sféroid o průměru 36 metrů, jehož povrch tvoří 6433 rovnostranných trojúhelníků z ocele, která odráží světlo obdobně jako zrcadlo. Stavba stojí uprostřed vodní plochy.


Národní cirkus, Kyjev, Ukrajina

Střecha budovy cirkusu je ve tvaru rotační kopule vystavěné nad kruhovým půdorysem.

Opera v Sydney, Austrálie

Opera v Sydney je stavba navržená v roce 1956 dánským architektem Jørn Utzonem. Otevřena byla v roce 1973. Nachází se v přístavu Port Jackson v australském městě Sydney, v místě zvaném *Bennelong Point* a je zařazena na seznam Světového dědictví pod hlavičkou UNESCO.

K zastřešení budov bylo užito trojúhelníkových úsečí kulových ploch o shodném poloměru $R = 74$ m.


Fontána u Domu kultury, Liberec

Fontána, skládající se mj. ze „zlaté“ koule a ocelového kužele, stojí v Jánské ulici od roku 1998 a je dílem architekta Patrika Kotase. Jeho dílo bylo součástí rozsáhlé rekonstrukce pěší zóny v Jánské ulici a sousedícího Soukenného náměstí na konci devadesátých let minulého století.


Glóbus

Glóbus (lat. *globus*, koule) je v kartografii zmenšené prostorové, nejčastěji kulové, znázornění určitého vesmírného tělesa (zemský glóbus, měsíční glóbus) pomocí kartografických prostředků. Mezi nejčastější patří glóby zemského tělesa a nebeské sféry (hvězdné glóby).

Glóby řadíme mezi "skutečně trojrozměrná znázornění" vyjadřující třetí rozměr pomocí hmotných prostředků (patří sem i reliéfní mapy, modely reliéfu). Mezi glóby lze zařadit i mnohostěnné modely (nepravé glóby) a výřezy (vrchlíky), které zobrazují pouze určitou část zemského povrchu, např. polární oblasti.


Sněhulák

Sněhulák je figura vytvořená ze sněhu, která obvykle zobrazuje stylizovanou lidskou postavu. Sněhuláka zpravidla tvoří tři sněhové koule různé velikosti, které jsou poskládány na sebe. Největší sněhová koule je na zemi a představuje nohy sněhuláka, nejmenší koule je na vrcholu a znázorňuje hlavu. Obličej sněhuláka (ústa a oči) je vytvořen tmavými kamínky nebo kousky uhlí, mrkev představuje nos. Někdy se k prostřední kouli připojují z boku dvě menší koule jako ruce. Na hlavu sněhuláka se pokládá starý hrnec jako klobouk, do stylizované ruky se vkládá pometlo nebo koště. Sněhulák může být velmi malý nebo může dosahovat velikosti i několika metrů. Jeho velikost závisí na velikosti a počtu sněhových koulí.

Míče a míčky

Míč či **míček**, nepřesně také **balón**, je kulatý (pro některé sporty a účely může být i šišatý) předmět používaný v mnoha sportech a hrách. Je obvykle vyroben z kůže, gumy nebo plastické hmoty. Míče jsou většinou duté, naplněné stlačeným vzduchem a kulaté. Na plnění míče vzduchem se používá pumpička.

V některých sportech se používají kulaté předměty vyrobené z kovu, dřeva nebo pevné umělé hmoty. V takových případech obvykle hovoříme o kouli (např. kulečník). Speciální typy míčků jsou používány např. v tenisu, stolním tenisu, softballu či baseballu. Velký a těžký míč určený pro trénink a posilování se nazývá medicinbal. Pro rehabilitační a fitness účely slouží gymnastický míč (nafukovací míč o průměru od 30 do 120 cm).

Výjimku tvoří badmintonový míček, který má tvar otevřené polokoule opatřené peřím z důvodů nutnosti obracení polohy během hry.

Svíčka

Svíčky jsou vyráběny v různých tvarech, také např. ve tvaru koule.

Prezentace o kouli na weblinku: https://slideplayer.cz/slide/3180706/

3.4 Geometrická tělesa

V předchozí kapitole byly převážně pomocí ploch (hranolových, jehlanových, válcových a kuželových) a s nimi souvisejícími prostory zavedena základní tělesa. Kromě takto zavedených těles však existuje celá řada dalších těles, která vzniknou buď ořezáním základních těles, jejich průniky či sjednocením, anebo zcela jinými způsoby. V této kapitole uvedeme některé další příklady tzv. geometrických těles, pojednáme o způsobu jejich vzniku a jejich základních vlastnostech.

Definice 3.92:
Množinu bodů na přímce, v rovině nebo v prostoru nazýváme (**geometrický**) **útvar**.

Definice 3.93:
(Geometrickým) tělesem nazýváme prostorově omezený souvislý geometrický útvar.

Těleso můžeme ale definovat i následovně:

Definice 3.94:
Uzavřenou oblast v prostoru nazýváme **(geometrické) těleso**.

(Geometrická) tělesa dělíme na:

a) **mnohostěny** – tělesa omezená mnohoúhelníky neležícími v jedné rovině
– např. krychle, kvádr, hranol, jehlan, komolý jehlan, pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn, pravidelný dvacetistěn, kubooctaedr apod.

b) **rotační tělesa** – tělesa, která vznikají rotací rovinného útvaru kolem přímky
– ze základních těles uveďme např. rotační válec, rotační kužel, rotační komolý kužel, koule, dále pak např. rotační elipsoid, rotační paraboloid, jednodílný rotační hyperboloid, anuloid, melanoid atd.

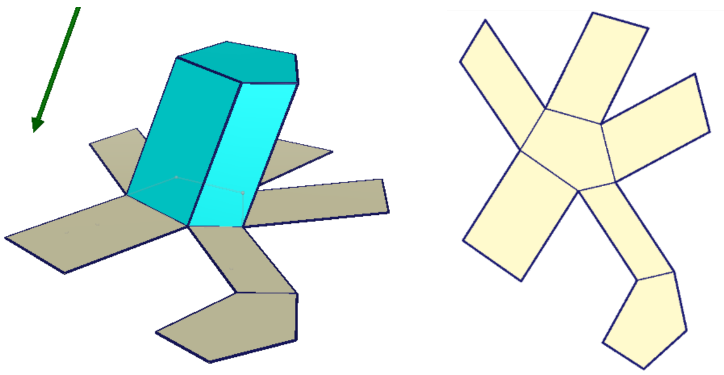
3.4.1 Povrch a síť tělesa

Definice 3.95:
Povrch tělesa je tvořen všemi plochami, které dané těleso ohraničují.

Poznámka: Pod pojmem **povrch tělesa** rozumíme i součet obsahů všech ploch ohraničujících těleso.

Poznámka: Povrch těles značíme P a určujeme jej v jednotkách čtverečních (j^2; tj. např. cm^2, dm^2, m^2).

Definice 3.96:
Rozložením povrchu tělesa do roviny získáme rovinný útvar, který nazýváme **síť tělesa.**



3.4.2 Objem tělesa

Definice 3.97:
Objem tělesa je číslo udávající velikost prostoru, který těleso vymezuje.

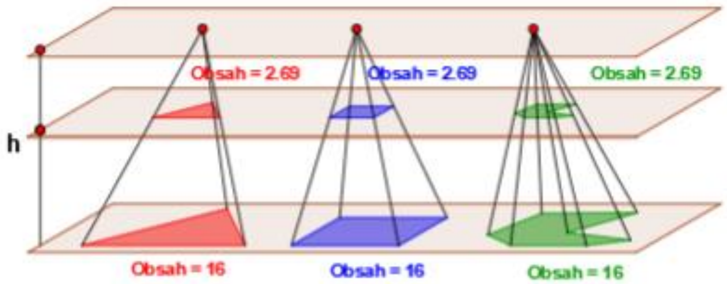
Poznámka: Objem těles značíme *V* a k jeho určení používáme krychlové jednotky (j^3; např. mm^3, cm^3, dm^3, m^3) nebo duté míry (mezi duté míry patří 1 litr a jeho násobky a díly, tj. např. ml, cl, dl, l, hl).

Při studiu těles v prostorové geometrii (stereometrii) využíváme některých obecných principů, uveďme nejznámější z nich.

3.4.2.1 Cavalieriho princip

Cavalieriho princip je poznatek stereometrie používaný při výpočtu objemu těles pojmenovaný po ***Bonaventurovi Francescovi Cavalierim*** (1598 Milán, Itálie – 30. 11. 1647, Bologna, Itálie; italský matematik, fyzik a astronom).

Cavalieriho princip říká, že tělesa se stejně velkými podstavami a výškami mají stejný objem, pokud mají řezy rovnoběžné s podstavami a vedené ve stejné vzdálenosti od podstav stejné obsahy.



3.4.3 Mnohostěny

Definice 3.98:
Mnohostěn (**polyedr** či ***n*-stěn**, kde $n \in \{n \in \mathbf{N}: n \geq 4\}$) je těleso, jehož hranice je sjednocením konečného počtu rovinných mnohoúhelníků takových, že strana každého z nich je zároveň stranou jiného mnohoúhelníku, přičemž žádné dva mnohoúhelníky neleží v téže rovině.

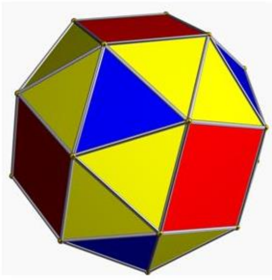
Definice 3.99:
Každý z mnohoúhelníků, jejichž sjednocením je hranice mnohostěnu, se nazývá **stěna mnohostěnu**. Strany mnohoúhelníkových stěn se nazývají **hrany mnohostěnu**.

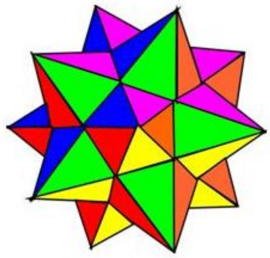
Poznámka: **Vrcholy mnohostěnu** jsou totožné s vrcholy mnohoúhelníků, které mnohostěn ohraničují.

3.4.3.1 Konvexní a nekonvexní mnohostěny

Stejně jako mnohoúhelníky, lze i **mnohostěny** rozdělit na **konvexní** a **nekonvexní**. Tj. konvexní mnohostěn obsahuje s každými dvěma svými různými body *X, Y* i celou úsečku *XY.* Tato skutečnost neplatí pro nekonvexní mnohostěny.

Na následujícím obrázku vlevo je zobrazena tzv. přitlačená krychle (kubooctaedr) jako příklad konvexního mnohostěnu a na obrázku vpravo je tzv. malý hvězdicový dvanáctistěn – příklad nekonvexního mnohostěnu.





Dále uvedeme vztah, který platí pro konvexní mnohostěny. Tento vztah je nazýván jako tzv. **Eulerova věta** po *Leonhardu Paulu **Eulerovi*** (15. dubna 1707, Basilej, Švýcarsko – 18. září 1783, Petrohrad, Rusko; švýcarský matematik a fyzik).

Věta 3.2 (Eulerova věta):
Pro konvexní mnohostěny platí vztah

$$v + s - h = 2,$$

kde v je počet vrcholů mnohostěnu, s je počet stěn mnohostěnu a h je počet hran mnohostěnu.

Mnohostěny lze dle tvarů jejich stěn, tj. hraničních mnohoúhelníků rozdělit na

a) pravidelné
b) polopravidelné
c) nepravidelné

3.4.3.2 Pravidelné mnohostěny (Platónská tělesa)

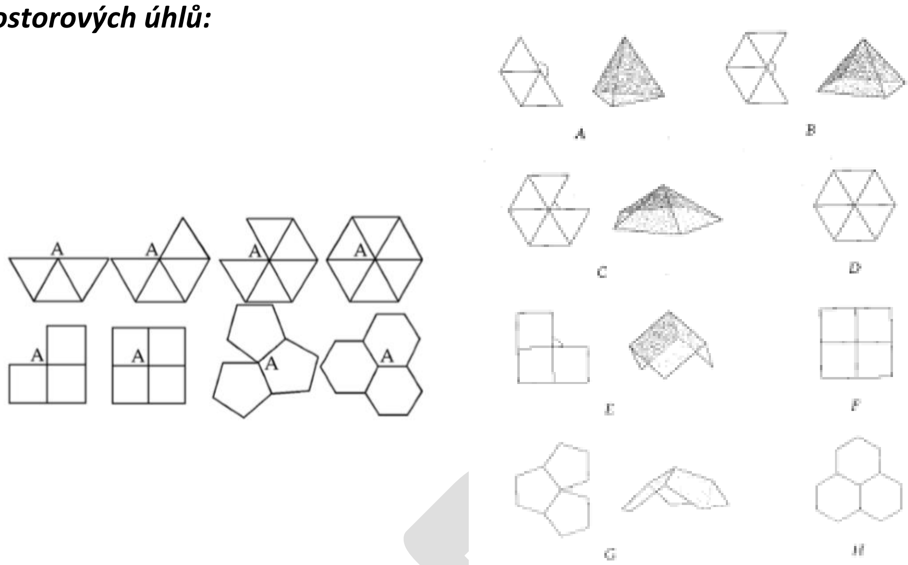
Definice 3.100:
Pravidelným mnohostěnem nazýváme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky (rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník). V každém jeho vrcholu se sbíhá stejný počet hran a stěn, přitom všechny jeho vrcholy leží na téže kulové ploše.

Existuje právě 5 pravidelných mnohostěnů, souhrnně jsou nazývány **Platónská tělesa**. Jsou to:

a) **pravidelný čtyřstěn (tetraedr, pravidelný trojboký jehlan)**, jehož povrch tvoří 4 rovnostranné trojúhelníky
b) **pravidelný šestistěn (hexaedr, krychle)**, jehož povrch tvoří 6 čtverců
c) **pravidelný osmistěn (oktaedr)**, jehož povrch tvoří 8 rovnostranných trojúhelníků. Můžeme též říci, že pravidelný osmistěn je tvořen dvěma pravidelnými čtyřbokými jehlany, jejichž čtvercové podstavy splývají a jejichž stěnami jsou rovnostranné trojúhelníky.
d) **pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr)**, jehož povrch tvoří 12 pravidelných pětiúhelníků
e) **pravidelný dvacetistěn (ikosaedr),** jehož povrch tvoří 20 rovnostranných trojúhelníků

Existence právě pěti pravidelných mnohostěnů má geometrickou podstatu. Ta souvisí s faktem, že v každém vrcholu pravidelného mnohostěnu se stýká stejný počet stěn, kterými jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky.

Pět prostorových úhlů:



Zdroj: Platónská a Archimedovská tělesa, Daud Sutton, str. 23

Kdybychom k pětici rovnostranných trojúhelníků se společným vrcholem v bodě *A* přidali ještě další shodný rovnostranný trojúhelník, ležely by všechny rovnostranné trojúhelníky v rovině (viz D), což odporuje definici mnohostěnu. Tj. žádné dva mnohoúhelníky mnohostěnu nesmí ležet v jedné rovině. Analogická situace nastává u trojice čtverců se společným vrcholem v bodě *A*, ke kterým kdybychom přidali ještě další shodný čtverec, ležely by všechny čtverce v rovině. A také pokud zobrazíme 3 pravidelné šestiúhelníky se společným vrcholem *A*, budou ležet v rovině.

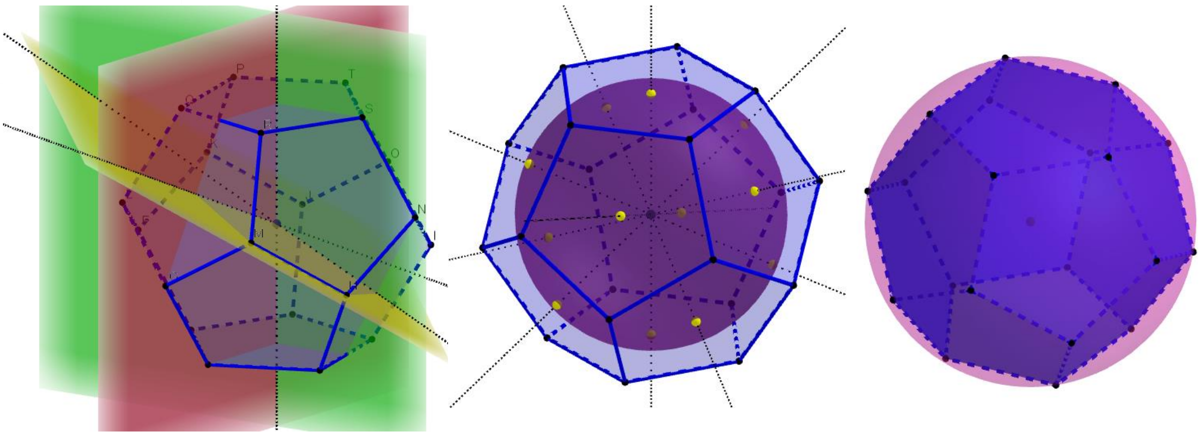
Kulová plocha pravidelným mnohostěnům opsaná a vepsaná

Prostorovou analogií tvrzení, že pravidelným mnohoúhelníkům lze opsat i vepsat kružnici je následující věta.

Věta 3.3:
Pravidelným mnohostěnům lze opsat i vepsat kulovou plochu.

Poznámka: Pro všechny pravidelné mnohostěny platí, že střed pravidelného mnohostěnu má tutéž vzdálenost od jeho vrcholů (střed pravidelnému mnohostěnu opsané kulové plochy) a má také stejnou vzdálenost od všech svých stěn (střed pravidelnému mnohostěnu vepsané kulové plochy).

Střed jakéhokoliv pravidelného mnohostěnu určíme sestrojením roviny souměrnosti příslušného mnohostěnu. Pak řezem pravidelného mnohostěnu jeho rovinou souměrnosti je pravidelný mnohoúhelník (u čtyřstěnu je řezem rovnostranný trojúhelník, u krychle čtverec, u pravidelného osmistěnu též čtverec, u pravidelného dvanáctistěnu pravidelný šestiúhelník a u pravidelného dvacetistěnu též pravidelný šestiúhelník). Najít středy rovnostranného trojúhelníku, čtverce a pravidelného šestiúhelníku jsou již triviální úlohy.



Dualita Platónských těles

Definice 3.101:
Duálními mnohostěny nazýváme takové dvojice těles, pro něž platí, že středy stěn jednoho tělesa jsou současně vrcholy druhého tělesa.

Poznámka: Duální jinými slovy znamená, že je možné vepsat jedno těleso do druhého.

Ke každému pravidelnému mnohostěnu (Platónskému tělesu) existuje mnohostěn duální.

1. Čtyřstěn je duální sám k sobě.
2. Krychle je duální k pravidelnému osmistěnu a naopak.
3. Pravidelný dvanáctistěn je duální k pravidelnému dvacetistěnu a naopak.

Ověření duality mnohostěnů je možné provést na základě platnosti Eulerovy věty (viz věta 3.1). Ověření provedeme pro krychli a pro pravidelný osmistěn.

Dle obecného Eulerova vztahu

$$s + v = h + 2 \tag{1}$$

můžeme pro krychli psát vztah

$$s_k + v_k = h_k + 2 \tag{2}$$

a pro pravidelný osmistěn pak vztah

$$s_o + v_o = h_o + 2. \tag{3}$$

Z definice duálních mnohostěnů plyne, že počet stěn jednoho tělesa je stejný jako počet vrcholů druhého tělesa. Odtud pro krychli obdržíme po dosazení rovnosti $s_o = v_k$ Eulerův vztah ve tvaru

$$s_k + s_o = h_k + 2 \tag{4}$$

a po dosazení rovnosti $s_k = v_o$ získáme pro pravidelný osmistěn Eulerův vztah ve tvaru

$$s_o + s_k = h_o + 2. \tag{5}$$

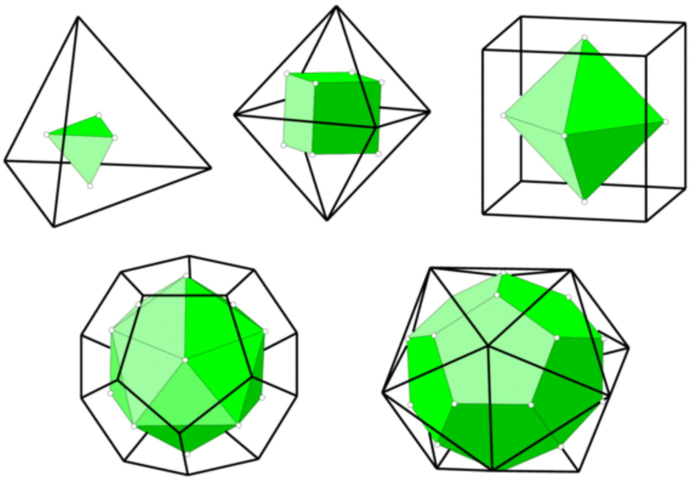
Díky skutečnosti, že sčítání je komutativní operace, platí rovnost levých stran vztahů (4) a (5). Proto můžeme položit do rovnosti i pravé strany vztahů (4) a (5), tj.

$$h_k + 2 = h_o + 2, \tag{6}$$

odkud po úpravě dostáváme rovnost

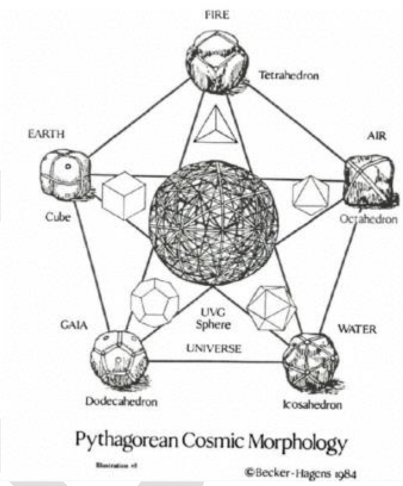
$$h_k = h_o, \tag{7}$$

která potvrzuje tvrzení, že duální mnohostěny mají stejný počet hran.



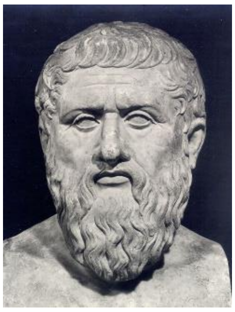
Střípky z historie Platónských těles

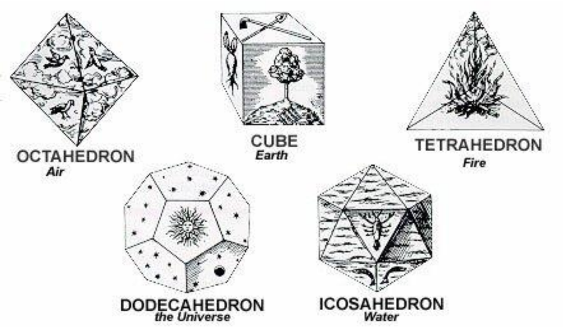
Platónská tělesa byla podrobně popsána starořeckými matematiky, převážně pythagorejci cca na počátku 4. st. př. n. l. Ti hledali v Platónských tělesech řád a podstatu světa. Pythagorejci dokonalost Platónských těles, kterou jim připisovali díky jejich symetrii, zaznamenali do magického pentagramu. Do vrcholů pentagramu (tj. pětiúhelníku) umístili právě 5 Platónských těles a do středu pentagramu zakreslili celý vesmír.



Ve Skotsku byl učiněn velmi zajímavý archeologický objev v podobě těles vytesaných z kamene, jejichž stáří se datuje cca do roku 2000 př. n. l., tj. do doby neolitu. Některá z těles jsou označena čarami, jež odpovídají hranám pravidelného mnohostěnu. Z toho plyne, že Platónská tělesa byla lidstvu známa mnohem dříve než z dob starověku, tj. z dob filosofa *Platóna*.

Jsou nazývána podle řeckého filosofa ***Platóna*** (427 př. n. l., Starověké Athény – 347 př. n. l., Athény, Řecko; řecký filosof, pedagog a matematik. Jméno *Platón* je pouze obecně rozšířený pseudonym tohoto filosofa, jeho původní jméno bylo *Aristoklés*, syn Aristóna z Athén a Periktiony.), který krychli, osmistěn, čtyřstěn a dvacetistěn považoval za představitele čtyř základních živlů: země, vzduch, oheň a voda. Dvanáctistěn byl představitelem jsoucna neboli všeho, co existuje.

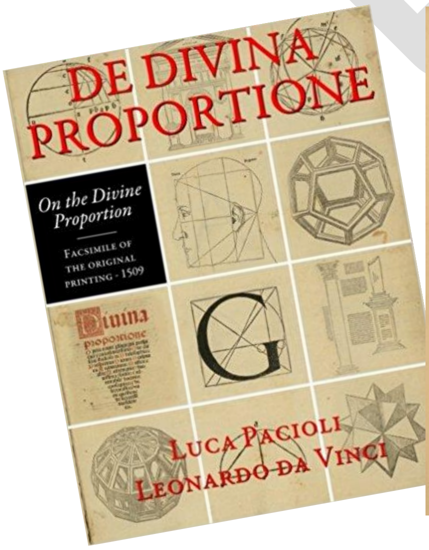


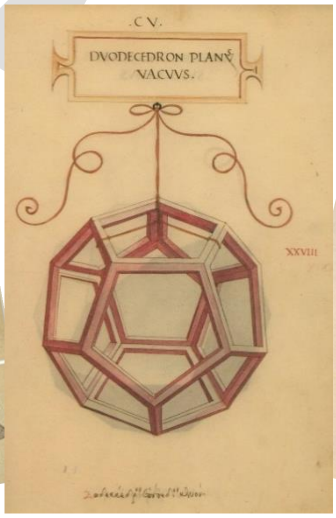


Eukleidés též ***Euklides*** nebo ***Euklid*** (asi 325 př. n. l., Řecko – asi 260 př. n. l; řecký matematik a geometr, který většinu života strávil v Alexandrii v Egyptě) sepsal kompletní matematický popis Platónských těles ve svých *„Základech“*, poslední kniha (kniha XIII) je věnována jejich vlastnostem. Tvrzení 13 - 17 v knize XIII popisují stavbu čtyřstěnu, krychle, osmistěnu, dvanáctistěnu a dvacetistěnu v uvedeném pořadí. Pro každé Platónské těleso Eukleidés našel poměr průměru opsané kulové plochy s délkou hrany. Tvrdil, že žádné další pravidelné konvexní mnohostěny již neexistují.

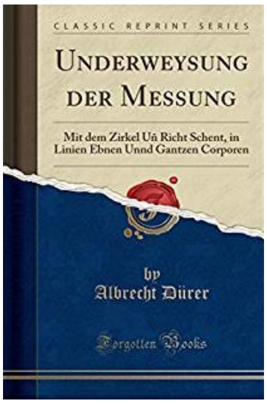
V průběhu historie byly pravidelné mnohostěny úzce spojeny také se světem umění. Už od renesance pravidelné mnohostěny poskytovaly inspiraci mnoha umělcům.

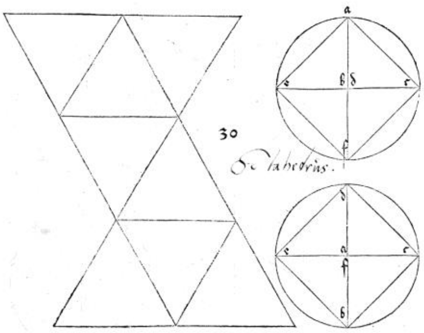
Geometrie se často objevuje také v díle ***Leonarda da Vinciho***. Konkrétně pravidelné mnohostěny ilustruje Leonardo da Vinci v roce 1509 pro knihu *„The divine proportion“*, jejímž autorem je františkánský mnich a matematik ***Luca Pacioli***. Tato kniha byla první systematická vědecká práce zabývající se geometrií a zejména mnohostěny.

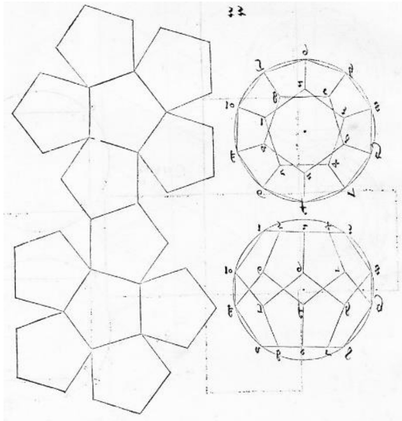




Albrecht Dürer, další pozoruhodný renesanční umělec, významně přispěl k tématu mnohostěnů svojí knihou „*Underweysung der Messung*“, v českém překladu „*Malířská příručka*“. Tato kniha představuje nejstarší známé příklady sítí mnohostěnů.





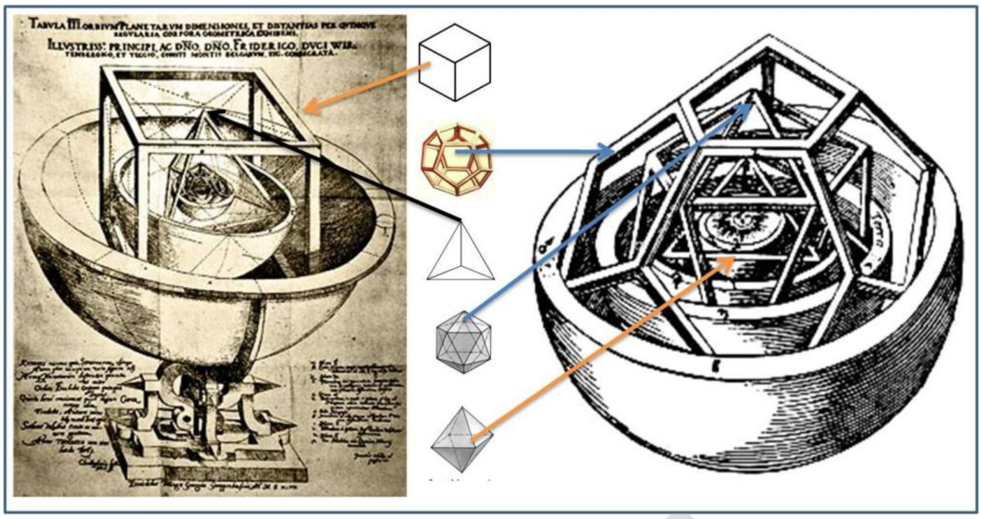


I dvacáté století nabízí umělce inspirující se Platónskými tělesy. Nápadité obrazy, poskytující jedinečný pohled na pravidelné mnohostěny, vytvořil matematicky smýšlející umělec ***Maurits Cornelis Escher***. V roce 1948 vytvořil dřevořezbu s názvem „Study for Stars“, na níž najdeme všech pět Platónských těles, ale i další mnohostěny.

Pravidelné mnohostěny nebyly spojeny pouze s filosofií, se světem umění, ale také např. s astronomií.

Johannes Kepler (27. prosince 1571, Weil der Stadt, Německo – 15. listopadu 1630, Řezno, Německo; německý matematik, astrolog, astronom, optik a evangelický teolog) se pokusil mezi šest tehdy známých planet (Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter a Saturn) vložit pět Platónských těles. Ve svém modelu sluneční soustavy vyšel z tehdejšího předpokladu, že oběžné dráhy planet jsou kružnicemi. Kepler se snažil najít souvislost mezi poloměry drah jednotlivých planet. Pomohl si pravidelnými mnohostěny, tj. vyšel ze skutečnosti, že každému pravidelnému mnohostěnu lze opsat i vepsat kulovou plochu. Důsledkem toho mezi Merkur a Venuši vložil pravidelný osmistěn, mezi Venuši a Zemi pravidelný dvacetistěn, mezi Zemi a Mars pravidelný dvanáctistěn, mezi Mars a Jupiter čtyřstěn a mezi Jupiter a Saturn krychli, čímž vznikl model znázorněný na obrázku. Kepler objevil díky svému modelu souvislost mezi poměry poloměrů

kulových ploch opsaných a vepsaných uvedeným pravidelným mnohostěnů a poměry poloměrů oběžných drah známých planet.

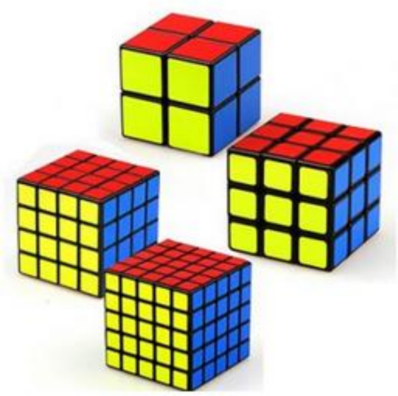
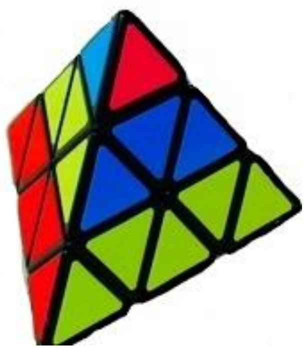


Keplerův model sluneční soustavy z *Mysterium Cosmographicum* (1596)

Platónská tělesa se společně s podobiznou Johanna Keplera a jeho modelem sluneční soustavy objevila i na stříbrné rakouské minci v hodnotě 10 Euro z roku 2002.

Platónská tělesa v reálném životě

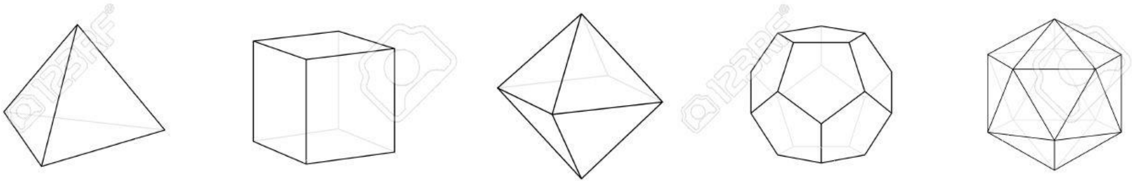
V současnosti se např. kromě klasické Rubikovy kostky rozměru 3 x 3 x 3 vyrábějí také Rubikovy kostky jiných rozměrů (např. 2 x 2 x 2, 4 x 4 x 4 nebo 5 x 5 x 5), anebo Rubikovy hlavolamy mj. i ve tvaru pravidelného čtyřstěnu, anebo ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu.

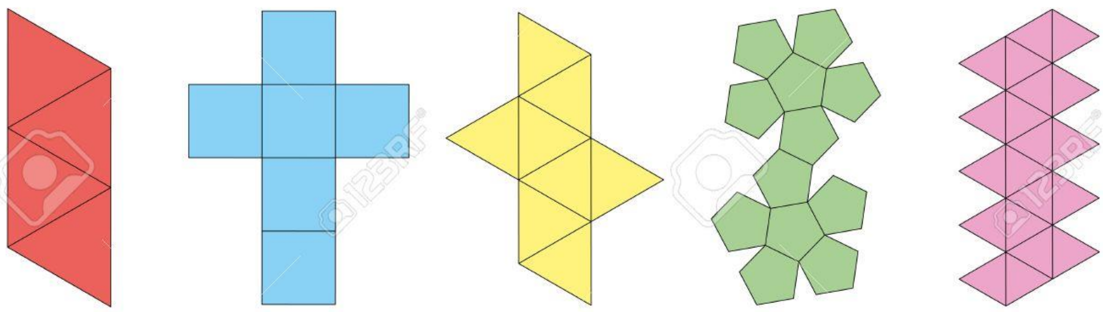
  

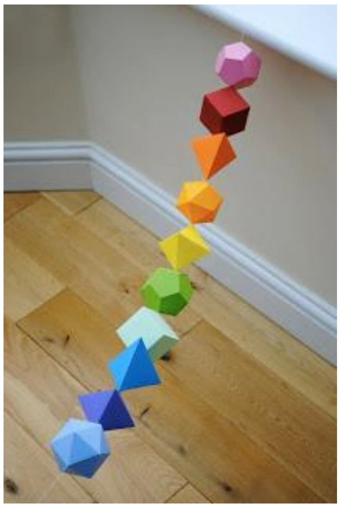
Dále se také pro některé deskové hry vyrábějí hrací kostky ve tvaru Platónských těles.

Prolézačka ve tvaru pravidelného dvacetistěnu je na dětském hřišti ve Vodním světě Krimml, Rakousko.

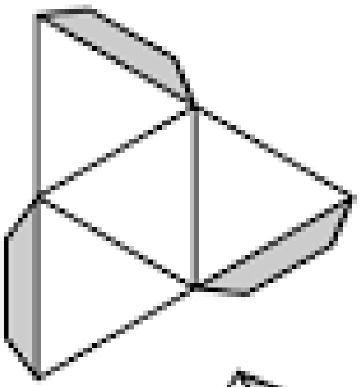
Sítě a papírové modely Platónských těles

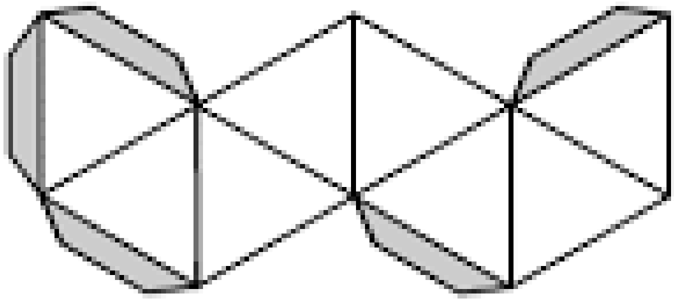


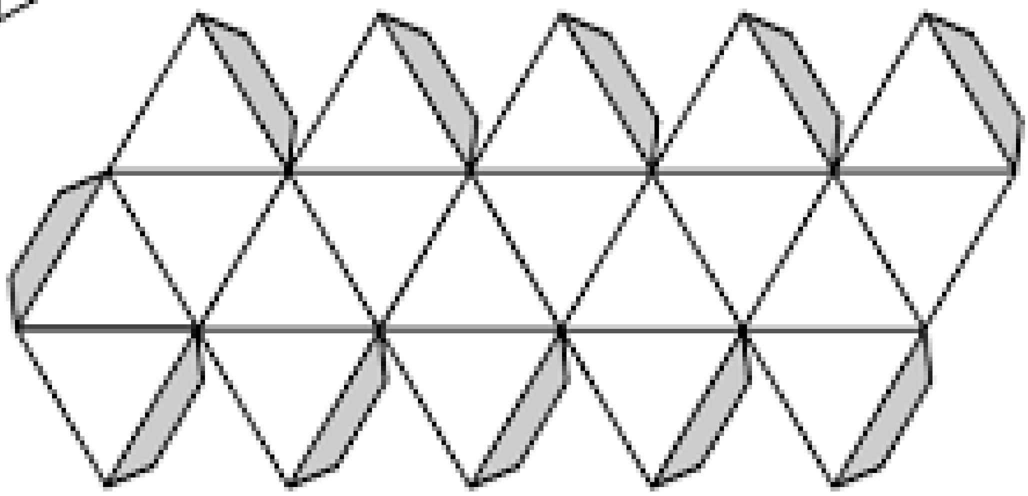


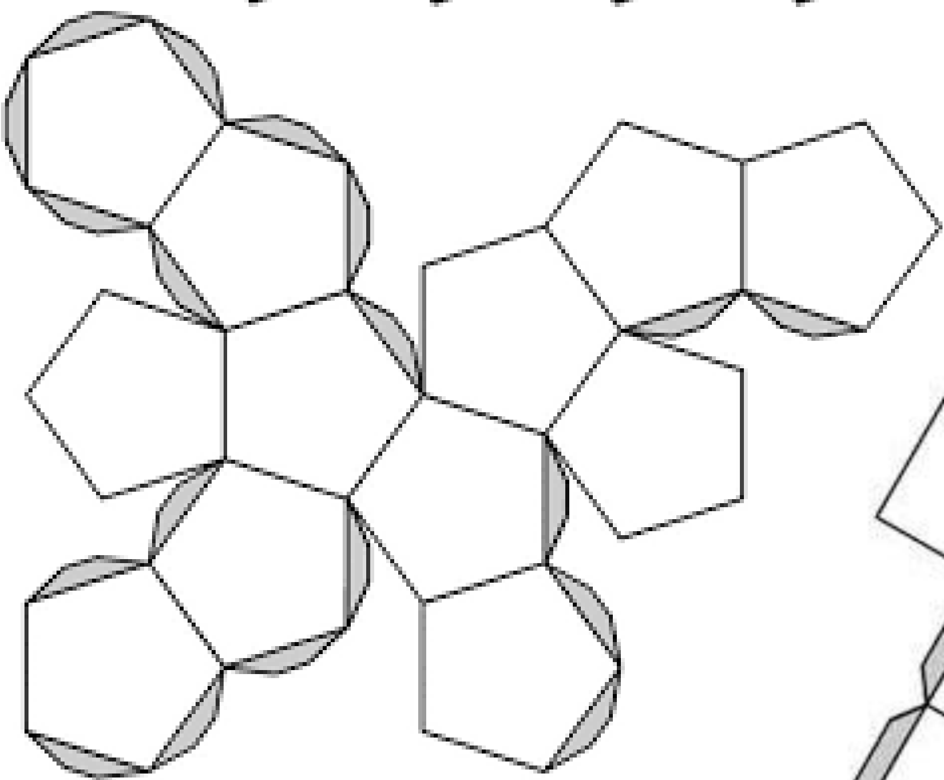


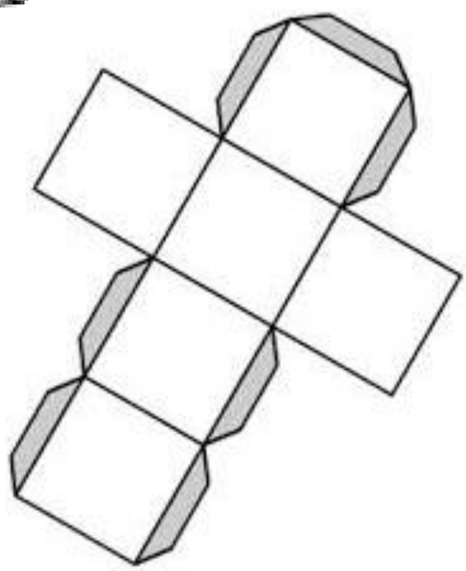
Sítě k vystřižení:







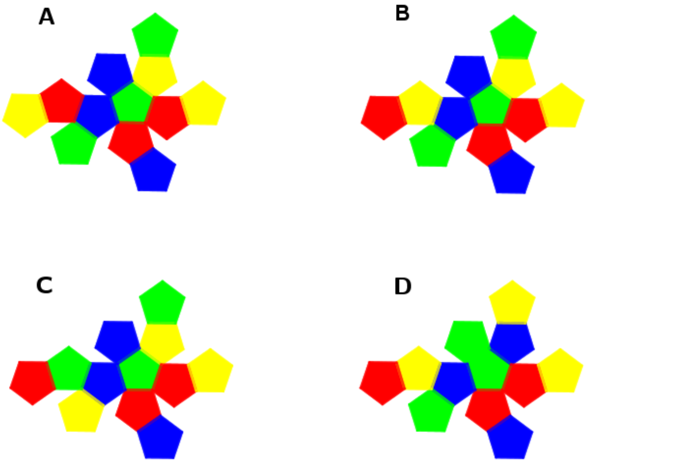


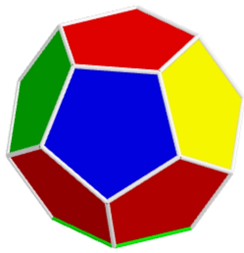


Příklad k procvičení

Příklad 3.1:

Rozhodněte, která z daných sítí odpovídá zobrazenému modelu pravidelného dvanáctistěnu.





Odpověď:

Poznámka: Příklad je v elektronické verzi dostupný na weblinku: https://www.geogebra.org/m/vafvstuk, kde lze při stlačeném pravém tlačítku myši pohybovat s modelem pravidelného dvanáctistěnu.