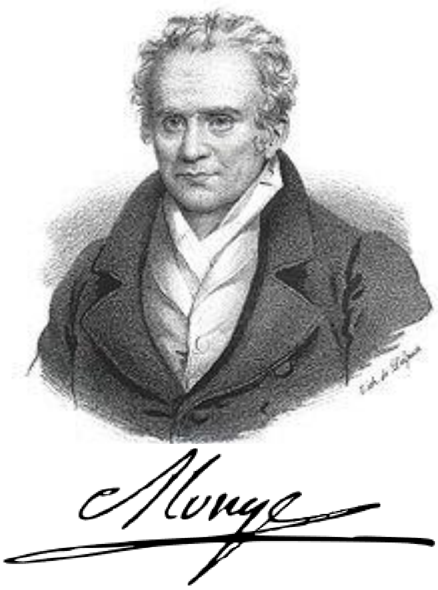
4.2.4 Mongeovo promítání

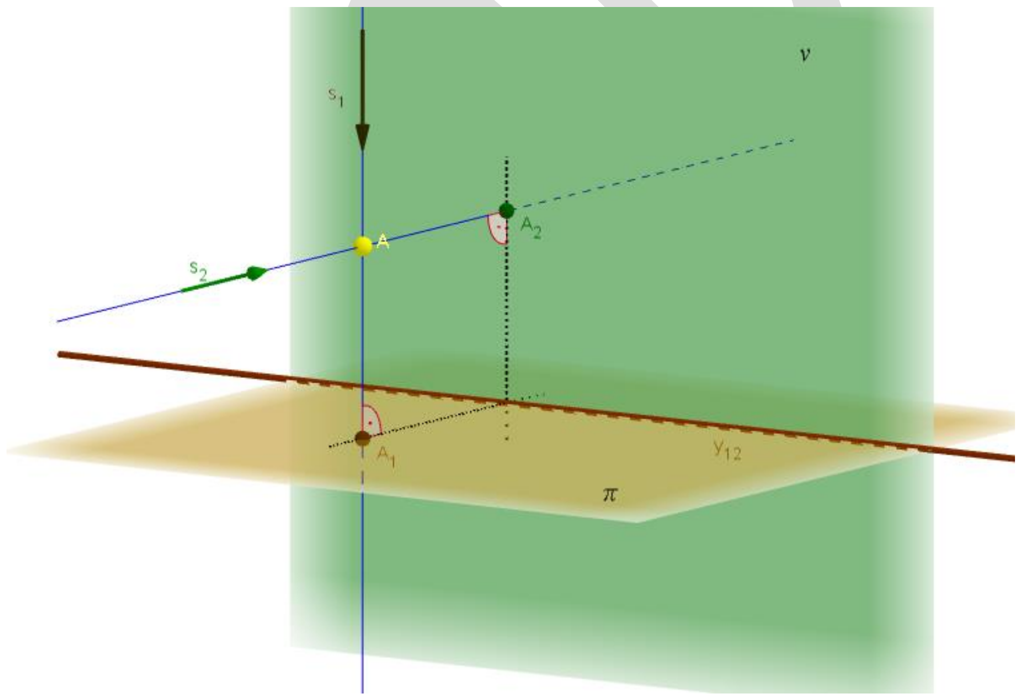


4.2.4.1 Gaspard Monge

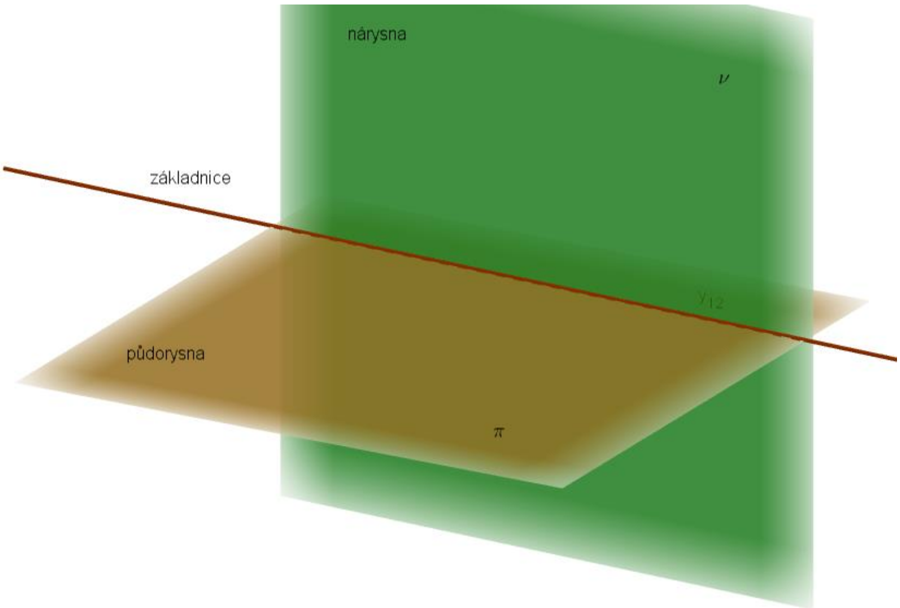
Gaspard Monge [vysl. *gaspár monž*], vévoda z Péluse, (* 10. 5. 1746, Beaune - † 28. 7. 1818, Paříž) byl francouzský přírodovědec, matematik a revoluční politik. Je považován za zakladatele **deskriptivní geometrie** (matematického základu technického kreslení) a za otce **diferenciální geometrie**. Je po něm pojmenováno **Mongeovo promítání**. Je také jedním ze 72 významných mužů, jejichž jméno je zapsáno na Eiffelově věži v Paříži.

4.2.4.2 Základní principy a pojmy Mongeova promítání

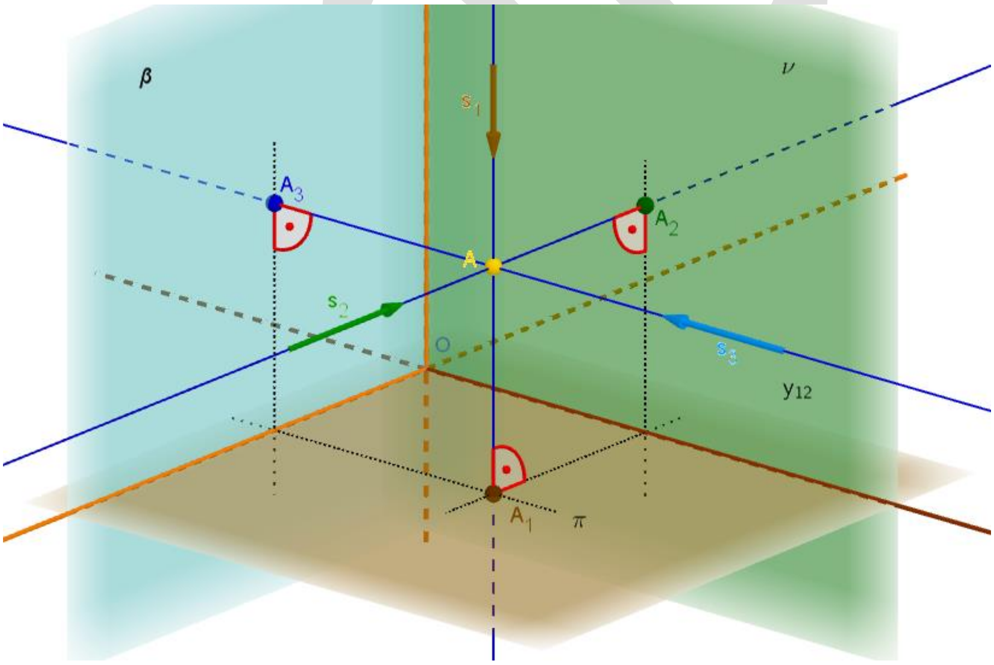
Mongeovo promítání je speciálním příkladem rovnoběžného promítání, resp. je kombinací dvou kolmých promítání na dvě na sebe navzájem kolmé roviny. Přitom kolmým promítáním rozumíme takové rovnoběžné promítání, kde směr **s** promítání je kolmý k průmětně.



Svislá průmětna, která splývá např. s rovinou papíru, s rovinou tabule, s rovinou promítacího plátna apod. se nazývá **nárysna** a značí se ν. Vodorovná průmětna se nazývá **půdorysna** a značí se π. Průsečnice půdorysny a nárysny se nazývá **základnice** a značí se y_{12}.



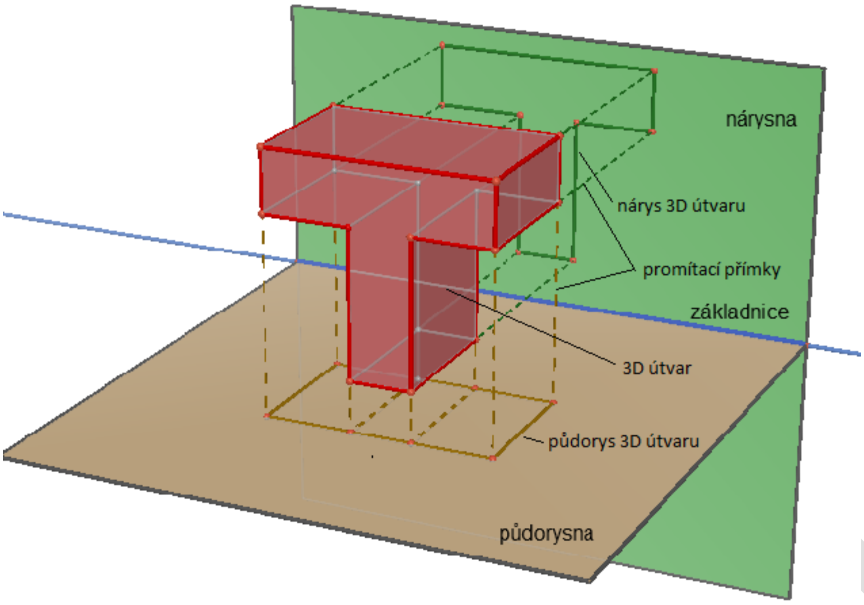
V některých případech, zvláště tehdy, je-li třeba **průměty** (obrazy zobrazovaného objektu) upřesnit tak, aby bylo dodrženo pravidlo jednoznačnosti mezi průměty zobrazovaného objektu a samotným prostorovým objektem, užívá se třetí průmětny, která je kolmá současně k půdorysně i k nárysně. Tato průmětna se nazývá **bokorysna** a značí se β. Směr promítání do ní je též kolmý.



V dalším textu se omezíme pouze na pravoúhlé promítání na dvě na sebe navzájem kolmé průmětny, tj. na půdorysnu a na nárysnu. V některých příkladech na procvičování se však z výše uvedeného důvodu objeví i tzv. bokorysný průmět prostorového objektu.

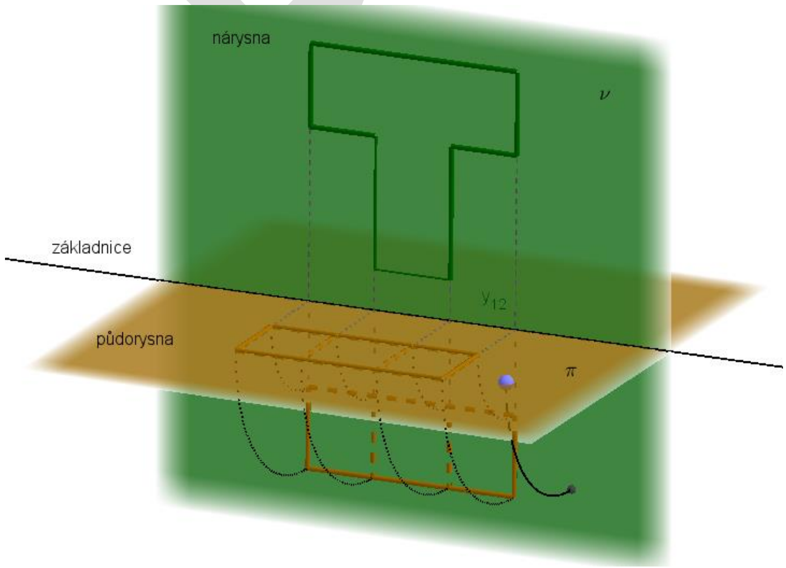
Mongeovo promítání umožňuje zobrazit trojrozměrné objekty na rovinu (tj. na kreslící prkno, na tabuli, na list papíru, na obrazovku monitoru aj.).

Promítáme-li v Mongeově promítání trojrozměrný objekt, užíváme k jeho zobrazení na jednotlivé průmětny tzv. **promítací přímky**. Ty jsou navzájem rovnoběžné (důsledek rovnoběžného promítání) a kolmé k jednotlivým průmětnám (důsledek kolmého promítání). Promítací přímky prokládáme nejdůležitějšími body trojrozměrného objektu. Např. při zobrazování tělesa ve tvaru písmene „T“ procházejí v Mongeově promítání promítací přímky jednotlivými vrcholy tělesa.

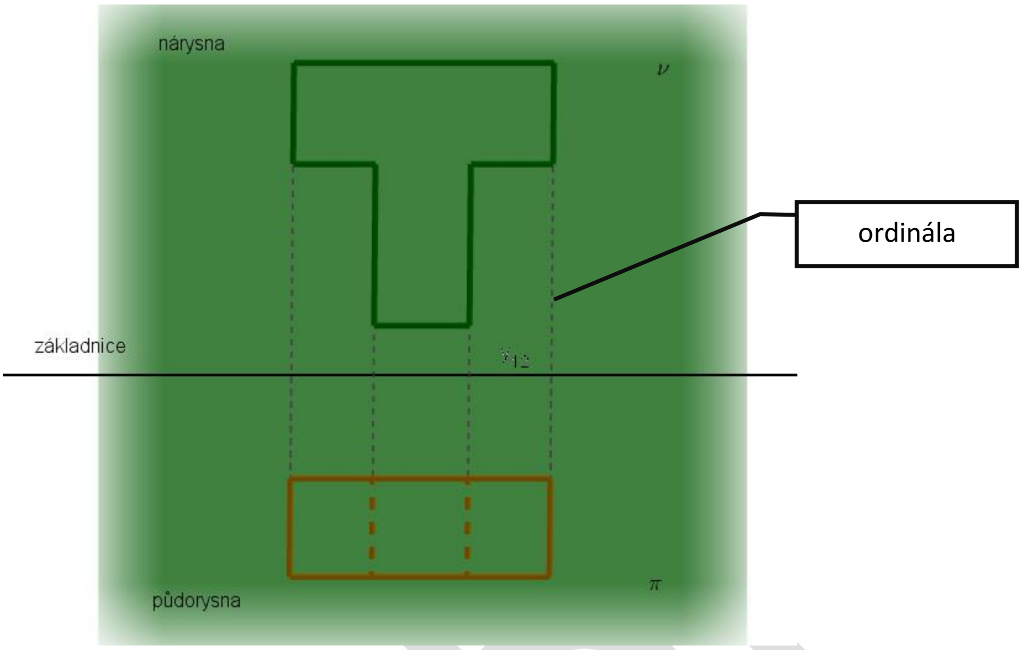


Promítací přímky protínají průmětny v bodech, které nazýváme **průměty.** Průsečík promítací přímky s půdorysnou se nazývá **půdorysný průmět** anebo **první průmět**, někdy též **půdorys bodu** (pohled na bod **shora**); průsečík promítací přímky s nárysnou se nazývá **nárysný průmět** anebo **druhý průmět**, někdy též **nárys bodu** (pohled na bod **zpředu**). (Analogicky se průsečík promítací přímky s bokorysnou nazývá **bokorysný průmět** anebo **třetí průmět**, někdy též **bokorys bodu** (pohled na bod **z boku**).)

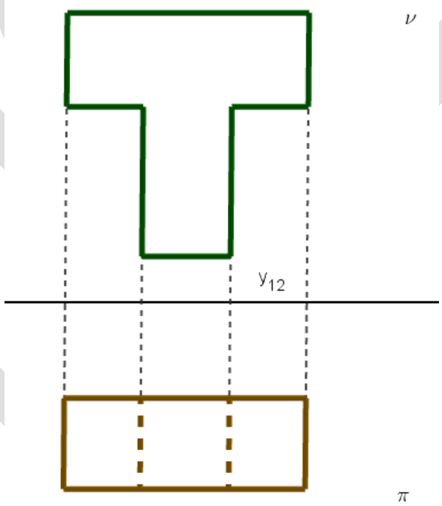
Abychom získali oba průměty trojrozměrného útvaru v rovině např. v rovině listu papíru, musíme otočit jednu z průměten do druhé průmětny. Předpokládejme, že nárysna zůstane pevnou a půdorysnu otočíme okolo základnice y_{12} o úhel 90° tak, aby splynula s nárysnou.



Po otočení půdorysny π kolem základnice y_{12} do nárysny ν leží průměty odpovídajících bodů na přímce, která je spojnicí prvního a druhého průmětu bodu. Tato přímka se nazývá **ordinála.** Ordinála je přitom přímka, která je **vždy** kolmá k základnici y_{12}.

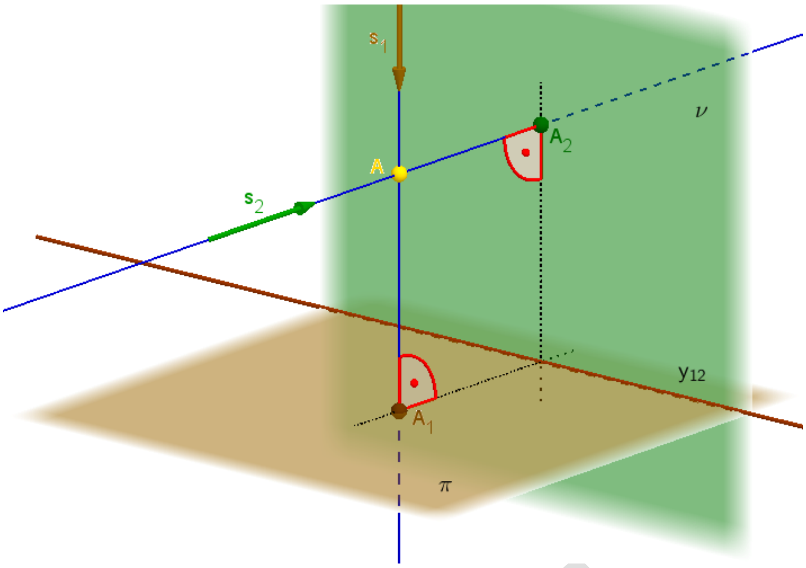


Na následujícím obrázku jsou v Mongeově promítání zobrazeny tzv. sdružené průměty, tj. půdorys (pohled shora) a nárys (pohled zpředu), prostorového tělesa ve tvaru písmene „T“.



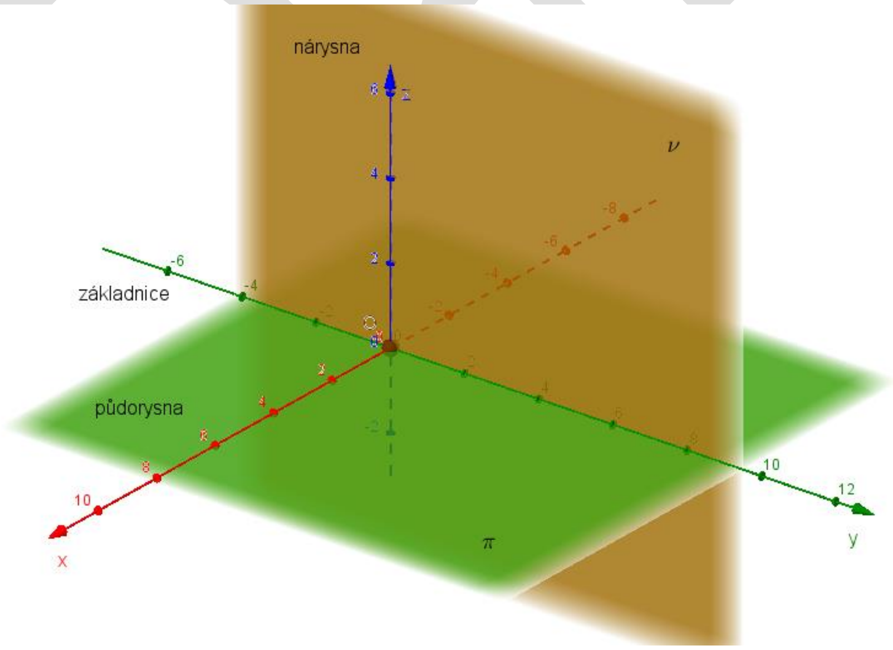
4.2.4.3 Promítání bodů

Nechť je dán bod A trojrozměrného euklidovského prostoru E_3. Bod A promítneme do půdorysny a do nárysny pomocí dvou promítacích přímek. Tj. bodem A prostoru E_3 vedeme jednu promítací přímku kolmo k půdorysně, její průsečík s půdorysnou π označíme A_1 a nazveme prvním či půdorysným průmětem bodu A. Dále bodem A prostoru E_3 vedeme druhou promítací přímku kolmo k nárysně, její průsečík s nárysnou ν označíme A_2 a nazveme druhým či nárysným průmětem bodu A. Promítacími přímkami bodu A jsou tedy přímky AA_1 a AA_2.



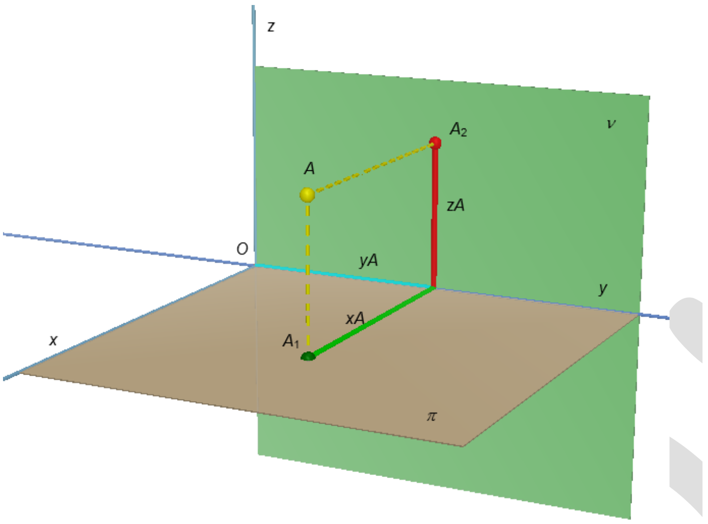
Po otočení půdorysny π kolem základnice y_{12} do nárysny ν leží průměty A_1, A_2 bodu A na přímce. Přímka A_1A_2, tj. spojnice prvního a druhého průmětu bodu A, se nazývá **ordinála.**

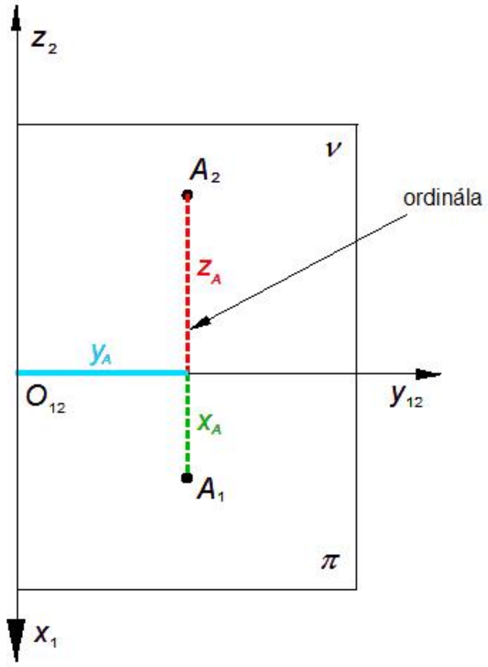
Abychom mohli v Mongeově promítání zobrazit průměty bodů trojrozměrného euklidovského prostoru, musíme v něm definovat umístění souřadnicového systému. Uvažujme pravoúhlou soustavu souřadnic O_{xyz}, která je určena osami *x, y, z* se společným počátkem *O* a s týmiž jednotkami na osách. Označme půdorysnu jako rovinu, která obsahuje osy *x, y* souřadnicového systému, a nárysnu jako rovinu, která je určena osami *y, z* souřadnicového systému (bokorysna je pak určena souřadnicovými osami *x, z*).



První průmět A_1 bodu *A* leží v půdorysně, tj. v rovině *xy*, ve vzdálenosti y_A od počátku O_{12} ve směru osy *y* a ve vzdálenosti x_A od základnice y_{12} ve směru osy *x*.

Druhý průmět A_2 bodu A leží v nárysně, tj. v rovině yz, ve vzdálenosti y_A od počátku O_{12} ve směru osy y a ve vzdálenosti z_A od základnice y_{12} ve směru osy z.



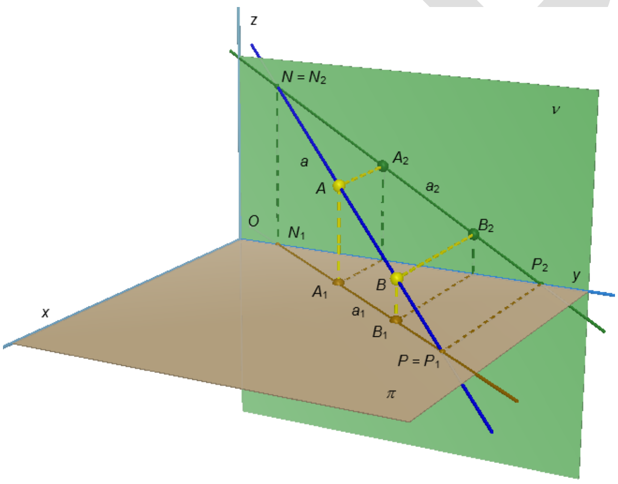


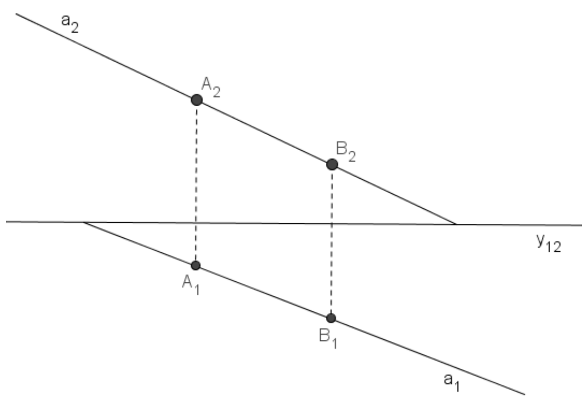
4.2.4.4 Promítání přímek

Průmětem přímky a do průmětny (půdorysny či nárysny) je přímka, je-li přímka a rovnoběžná nebo různoběžná s danou průmětnou, nebo bod, je-li přímka a kolmá k průmětně.

Leží-li body A, B na přímce a, potom první (půdorysné) průměty A_1, B_1 bodů A, B leží na prvním (půdorysném) průmětu a_1 přímky a. Analogie platí pro druhé průměty A_2, B_2 bodů A, B, tj. leží-li body A, B na přímce a, potom druhé (nárysné) průměty A_2, B_2 bodů A, B leží na druhém (nárysném) průmětu a_2 přímky a. Lze shrnout, že incidence bodů a přímky je v Mongeově promítání zachována.

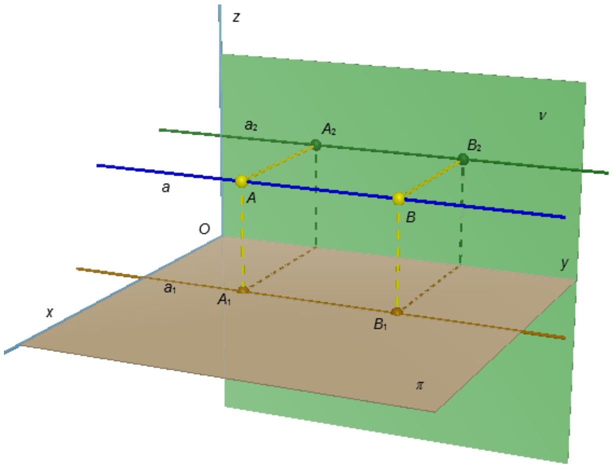
Zobrazení průmětů přímky, která zaujímá obecnou polohu vůči oběma průmětnám

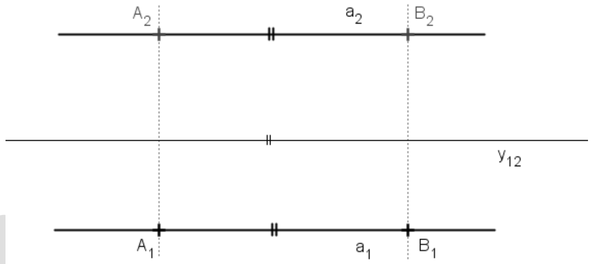




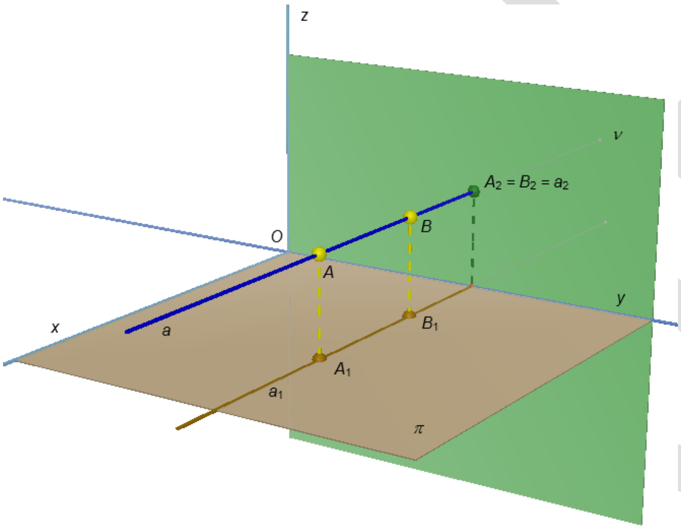
Zobrazení průmětů přímek, které zaujímají speciální polohy vůči oběma průmětnám

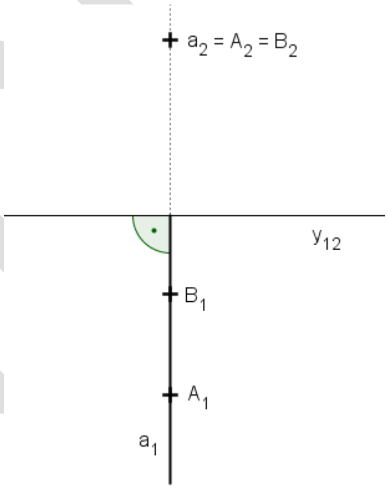
1. Přímka *a* je rovnoběžná s oběma průmětnami



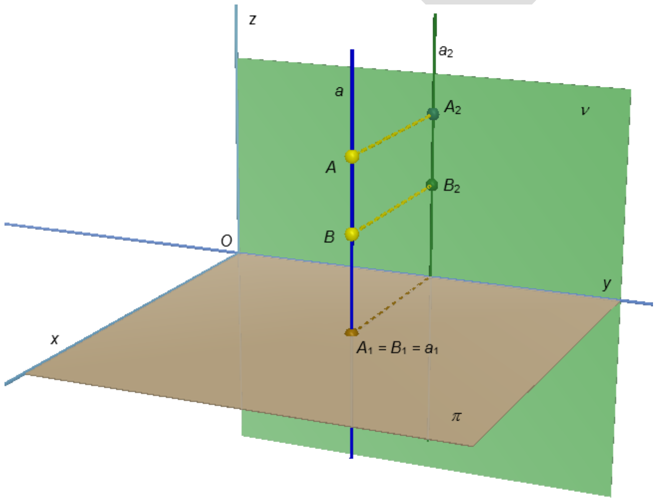


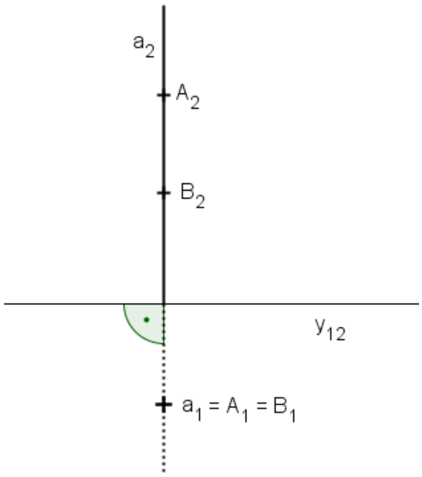
2. Přímka *a* je kolmá k nárysně a rovnoběžná s půdorysnou





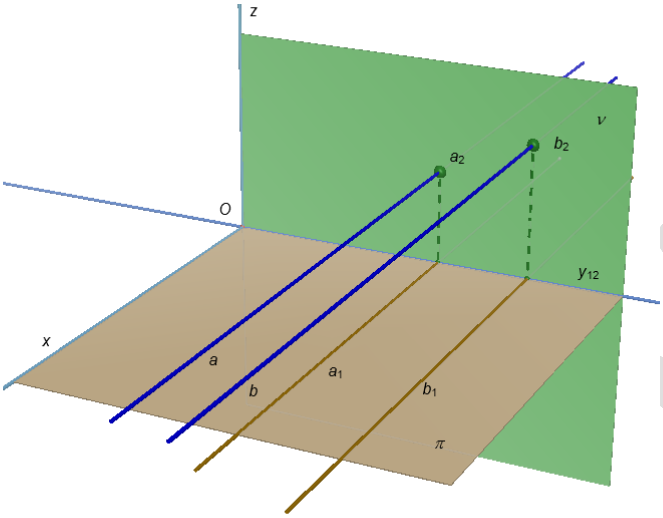
3. Přímka *a* je kolmá k půdorysně a rovnoběžná s nárysnou

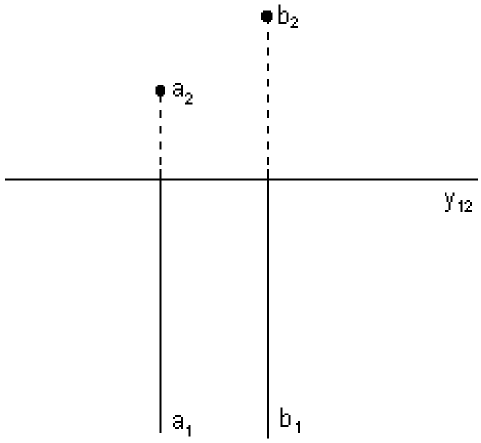




Zobrazení průmětů dvou navzájem rovnoběžných přímek, které jsou rovnoběžné s půdorysnou a kolmé k nárysně

Jsou-li rovnoběžné přímky kolmé k průmětně, jsou jejich průměty v této průmětně body, a jsou-li přímky rovnoběžné s průmětnou, jsou jejich průměty navzájem rovnoběžné a kolmé k základnici.





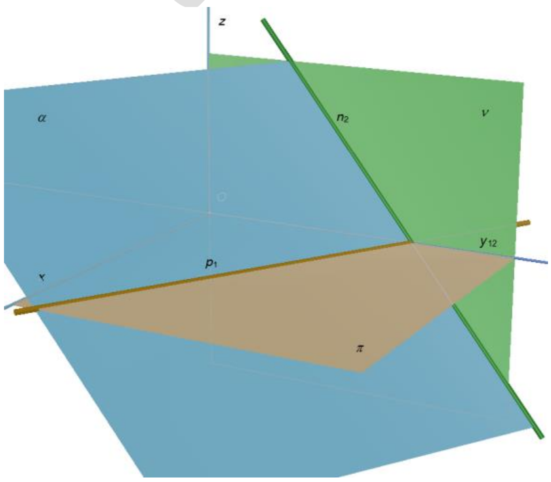
4.2.4.5 Promítání rovin

Rovina je neohraničeným geometrickým útvarem, který se rozprostírá do nekonečna ve všech směrech. S průmětnami může rovina zaujímat různé vzájemné polohy. Na základě nich se pak také v Mongeově promítání různě zobrazuje.

Je-li rovina α různoběžná s oběma průmětnami, tj. zaujímá-li vůči průmětnám obecnou polohu, pak každou z průmětem protíná v přímce. Přímky, ve kterých rovina protíná průmětny, se nazývají **stopy roviny**.

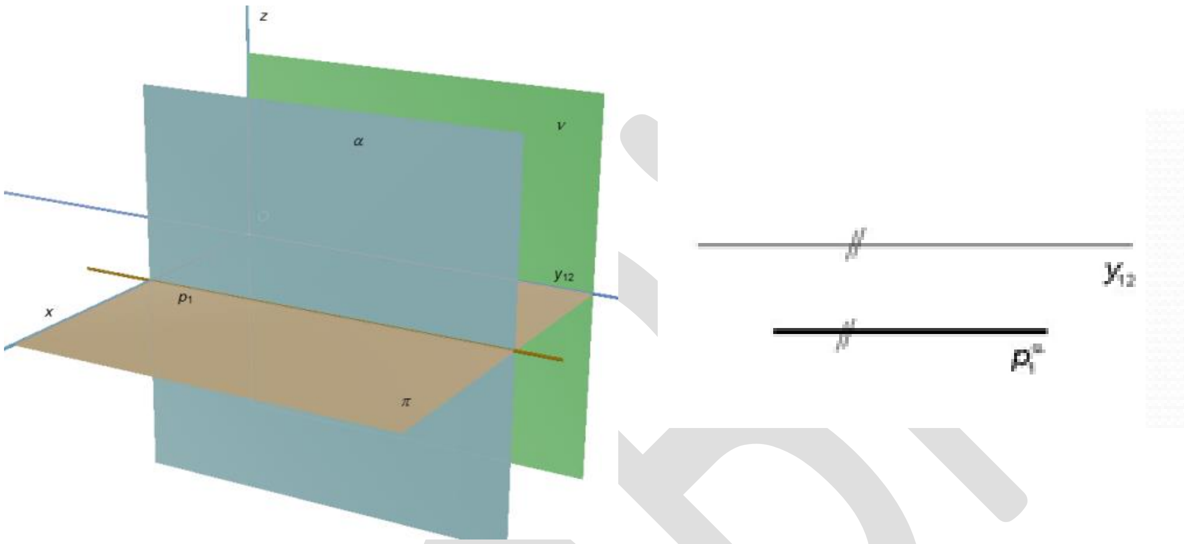
- Průsečnice roviny α s půdorysnou se nazývá **půdorysná stopa** a označuje se p^{α}.
- Průsečnice roviny α s nárysnou se nazývá **nárysná stopa** a označuje se n^{α}.

Protíná-li rovina α základnici, protínají se její půdorysná a nárysná stopa právě v jednom bodě na základnici.

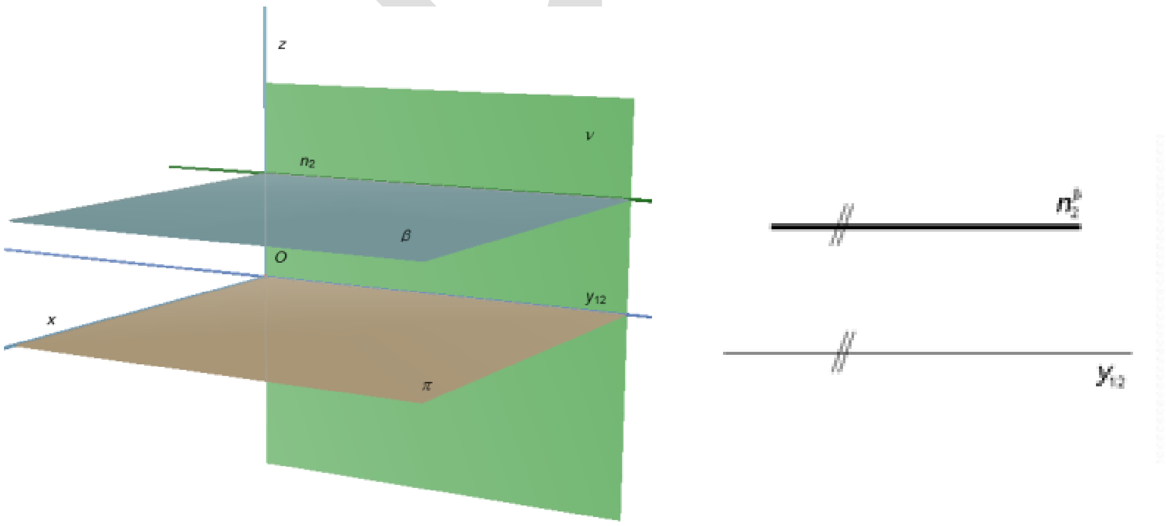


Promítání rovin, které jsou ve speciálních polohách vzhledem k průmětnám

1) rovina je kolmá k půdorysně a rovnoběžná s nárysnou – **promítací rovina**
   - v pohledu zpředu splývá celá rovina s nárysnou a **všechny objekty ležící v této rovině se v pohledu zpředu zobrazí ve skutečném tvaru a velikosti**
   - v pohledu shora se celá rovina promítne do přímky rovnoběžné se základnicí, do této přímky se v pohledu shora promítnou i veškeré objekty ležící v této rovině. Přímka je od základnice stejně vzdálena, jako je vzdálena rovina od nárysny.



2) rovina je kolmá k nárysně a rovnoběžná s půdorysnou – **promítací rovina**
   - v pohledu shora splývá celá rovina s půdorysnou a **všechny objekty ležící v této rovině se v pohledu shora zobrazí ve skutečném tvaru a velikosti**
   - v pohledu zpředu se celá rovina promítne do přímky rovnoběžné se základnicí, do této přímky se v pohledu zpředu promítnou i veškeré objekty ležící v této rovině. Přímka je od základnice stejně vzdálena, jako je vzdálena rovina od půdorysny.

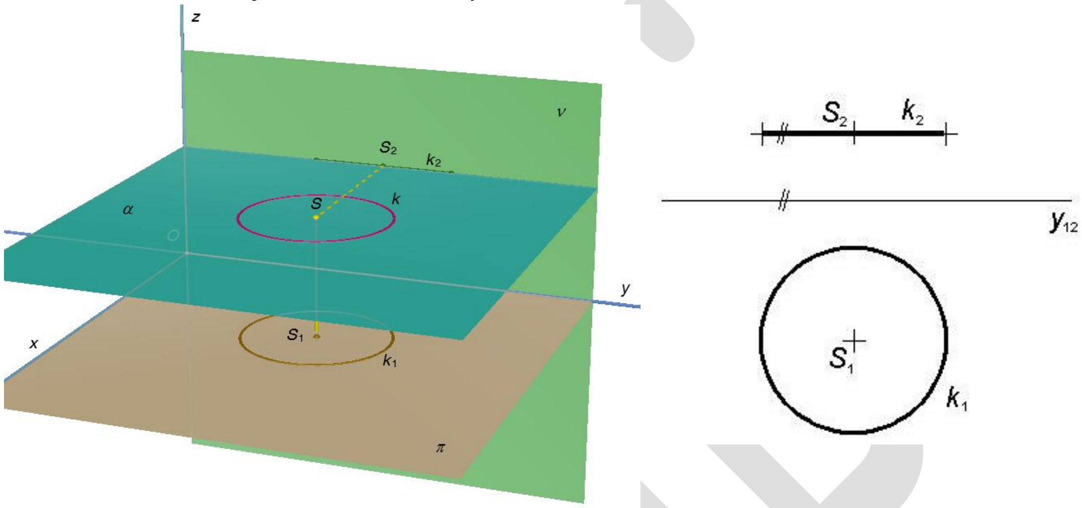


4.2.4.6 Promítání rovinných útvarů ležících v rovinách rovnoběžných s průmětnami

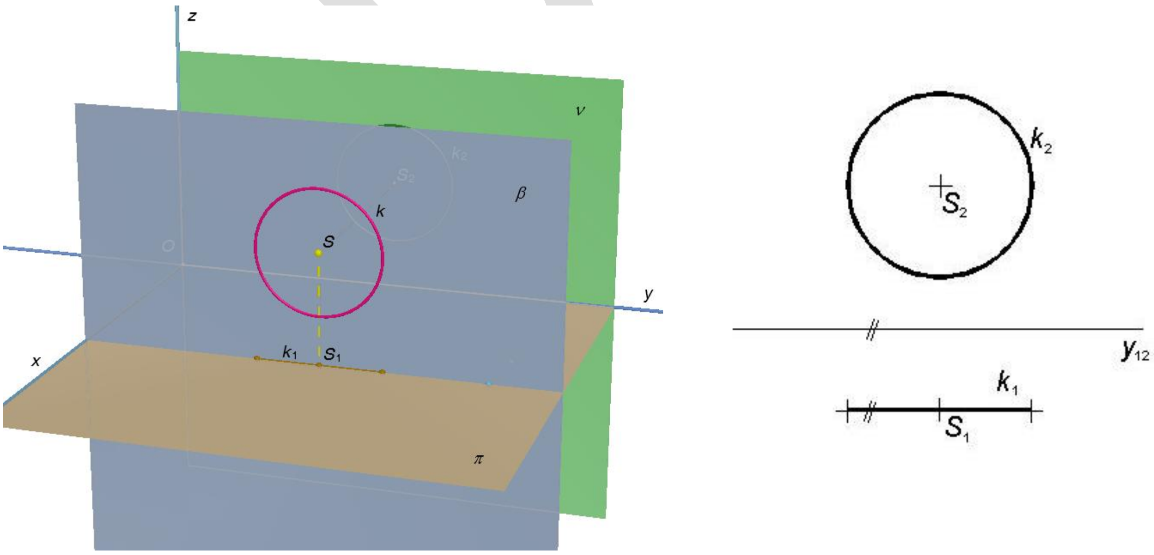
Předpokládejme, že máme dánu kružnici k (S, r), anebo jakýkoliv rovinný útvar (trojúhelník, čtverec, obdélník, kosočtverec, rovnoběžník, lichoběžník, pětiúhelník, …) ležící v rovině rovnoběžné s jednou z průměten. **Průměty kružnice *k*, anebo jakéhokoliv rovinného útvaru ležícího v rovině rovnoběžné s průmětnou se v Mongeově promítání zobrazí v této průmětně ve skutečném tvaru a velikosti.**

Zobrazení kružnice *k* ležící v rovině α, která je rovnoběžná s jednou z průměten

Leží-li kružnice k (S, r) v rovině α a je-li rovina α rovnoběžná s půdorysnou, pak prvním průmětem kružnice k je kružnice k_1 (S_1, r), která je shodná s kružnicí k (S, r) a druhým průmětem kružnice k je úsečka k_1 délky $2r$ rovnoběžná se základnicí.



Leží-li kružnice k (S, r) v rovině β a je-li rovina β rovnoběžná s nárysnou, pak druhým průmětem kružnice k je kružnice k_2 (S_2, r) a prvním průmětem kružnice k je úsečka k_1 délky $2r$ rovnoběžná se základnicí.

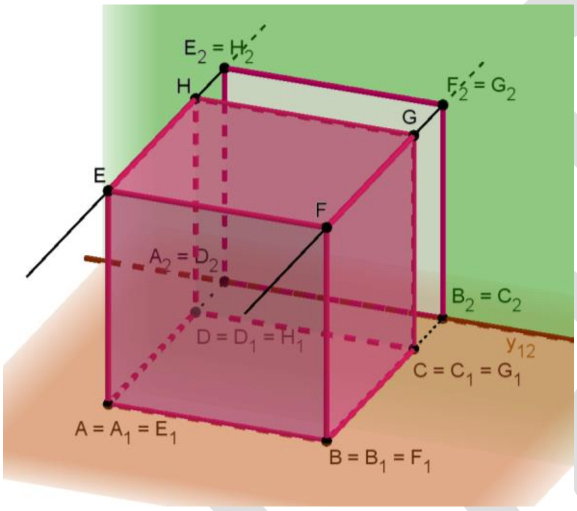


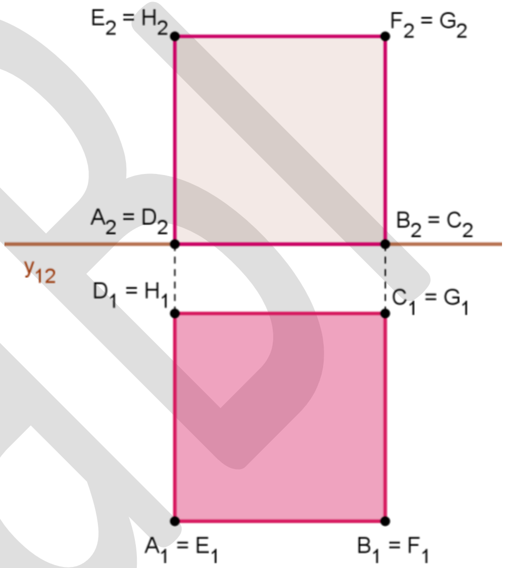
4.2.4.7 Promítání základních těles s podstavou ležící v jedné z průměten

V tomto textu uvažujeme pouze takové postavení základních těles, aby jedna z jejich podstav, resp. stěn ležela v jedné z průměten (zpravidla v půdorysně). Na ilustračních obrázcích prostorových situací je v rovnoběžném promítání (NE ve VRP) zobrazeno znázorňované těleso v příslušném postavení vzhledem k průmětnám. Na obrázcích v Mongeově promítání jsou zobrazeny sdružené průměty (půdorysy a nárysy) odpovídajících základních těles. U sdružených průmětů jsou dodržena všechna výše uvedená pravidla Mongeova promítání (mj. průměty příslušných vrcholů těles leží na ordinálách, průměty přímek kolmých k průmětně se v této průmětně zobrazí jako body apod.).

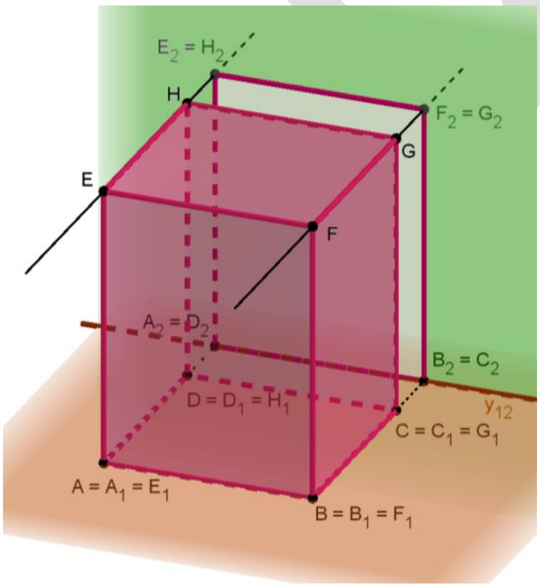
Pro ilustrační obrázky i průměty těles viz **https://www.geogebra.org/m/f7nt2agv**.

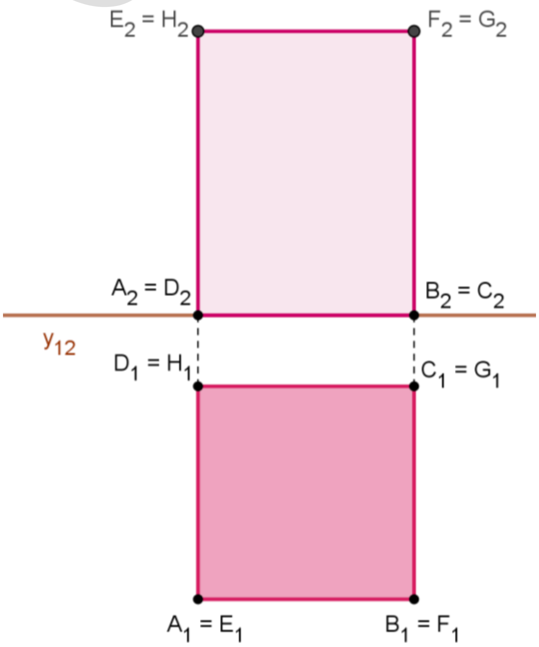
1. Sdružené průměty krychle



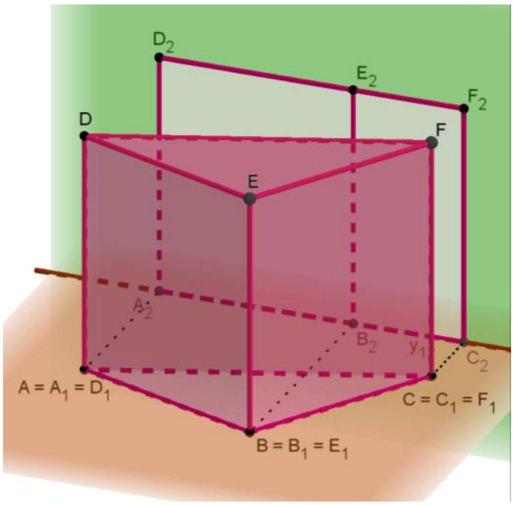


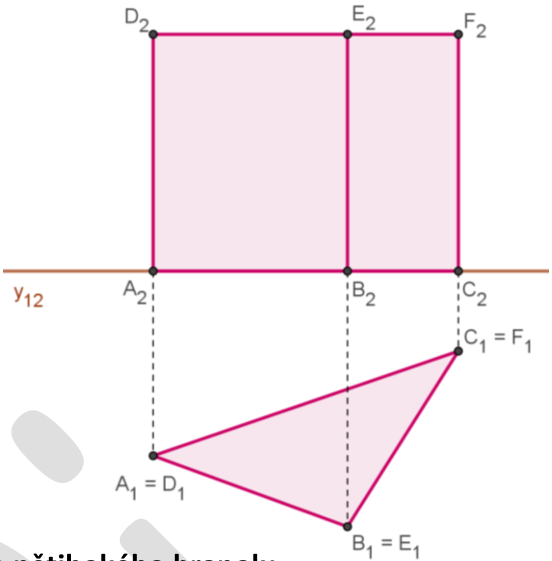
2. Sdružené průměty kvádru



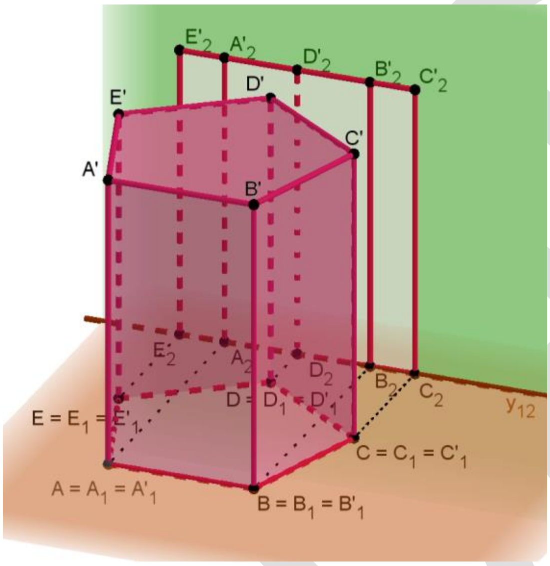


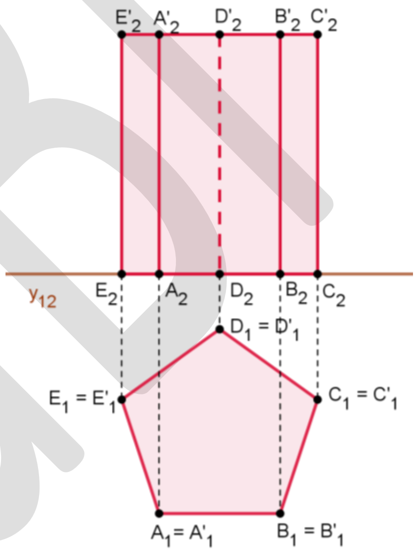
3. Sdružené průměty kolmého trojbokého hranolu



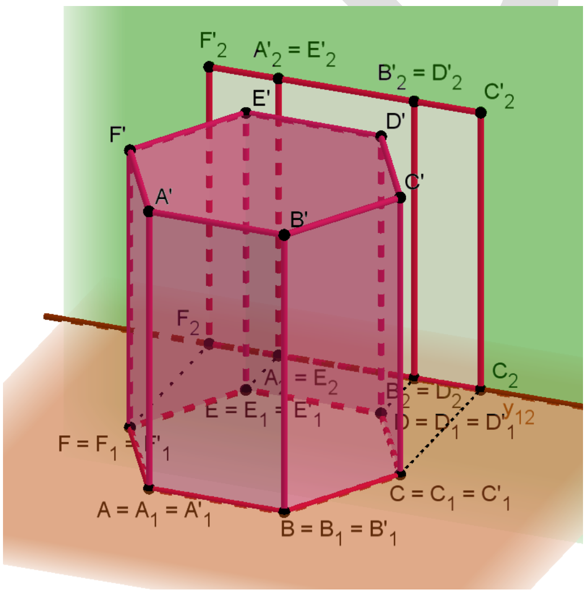


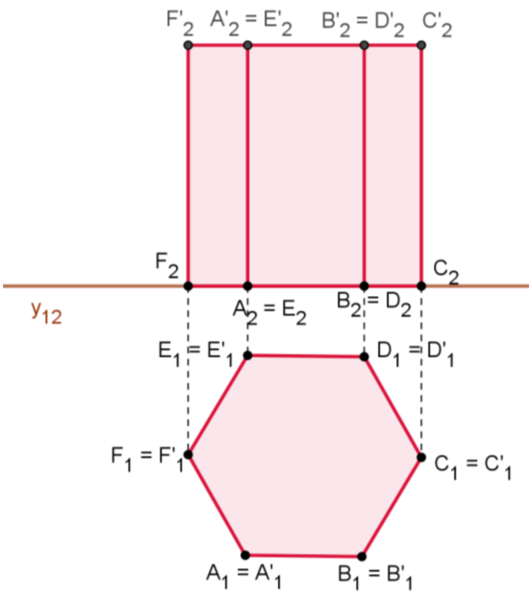
4. Sdružené průměty kolmého pravidelného pětibokého hranolu



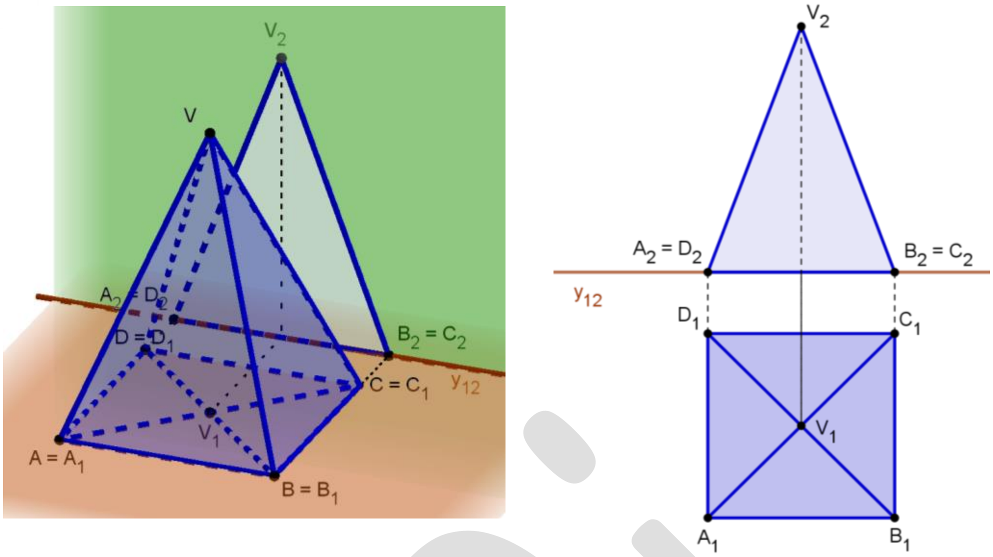


5. Sdružené průměty kolmého pravidelného šestibokého hranolu

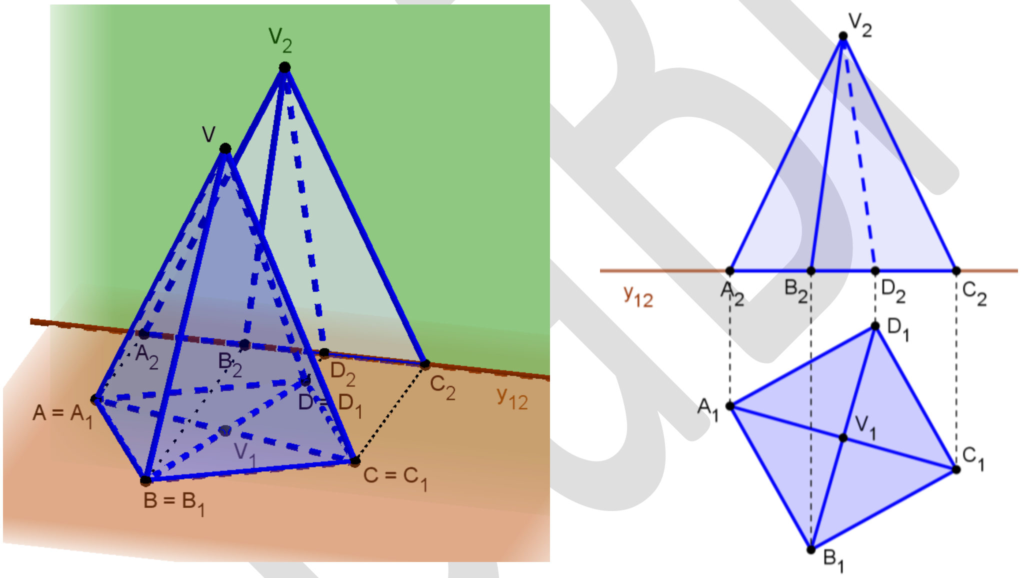




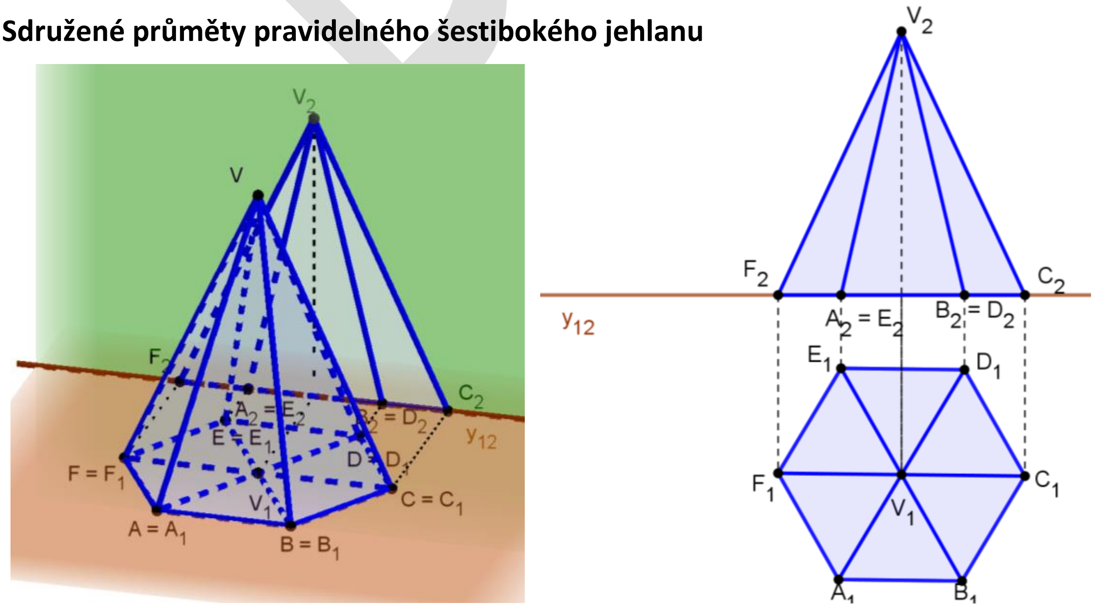
6. Sdružené průměty pravidelného čtyřbokého jehlanu v průčelné poloze



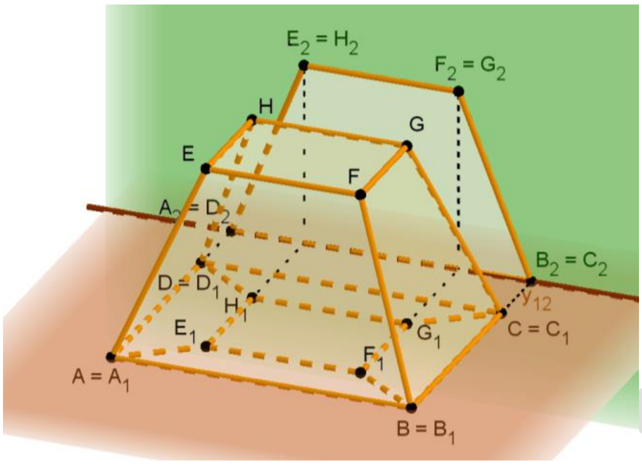
7. Sdružené průměty pravidelného čtyřbokého jehlanu v nárožní poloze

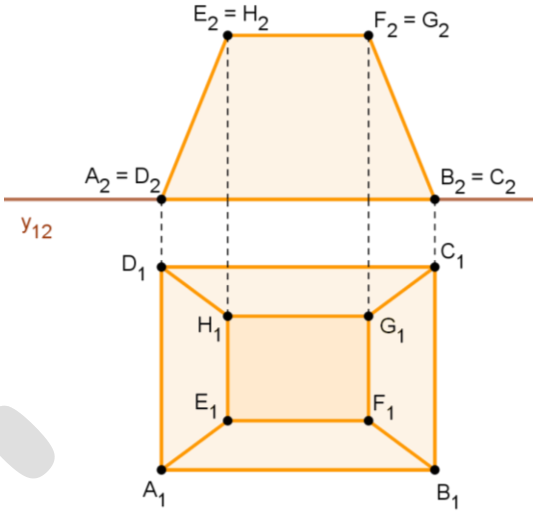


8. Sdružené průměty pravidelného šestibokého jehlanu

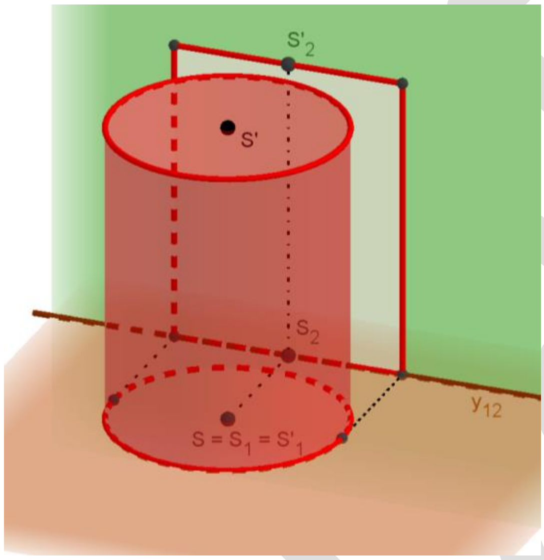


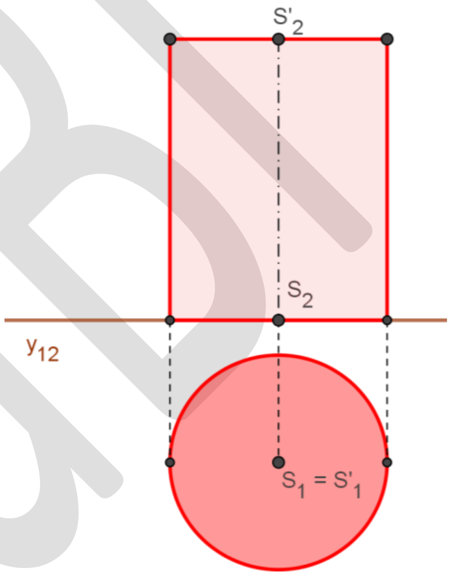
9. Sdružené průměty komolého čtyřbokého jehlanu



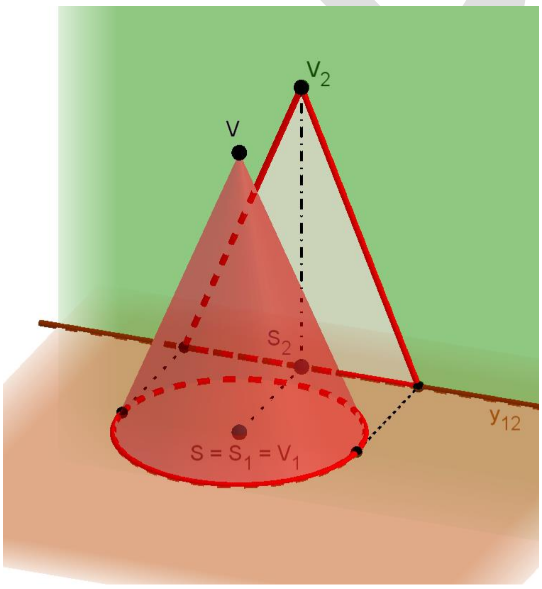


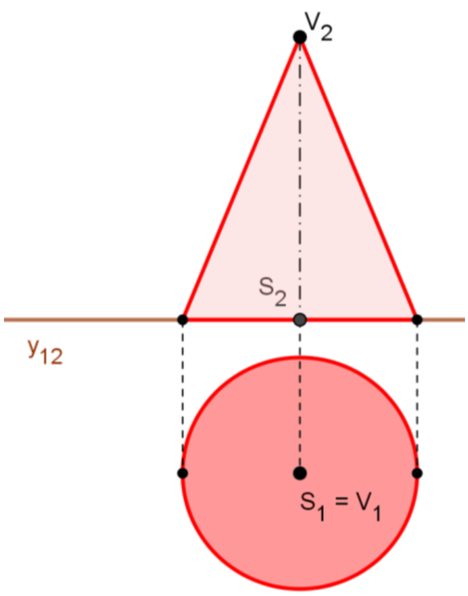
10. Sdružené průměty rotačního válce



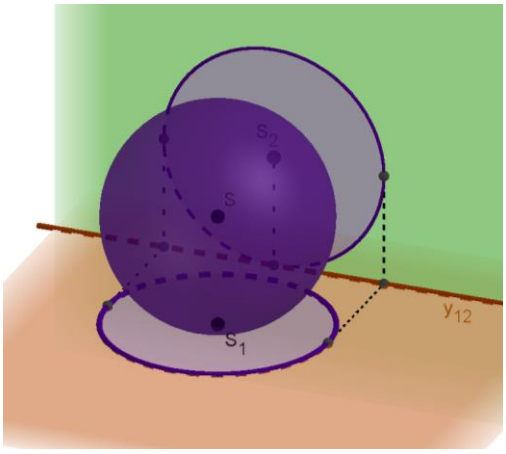


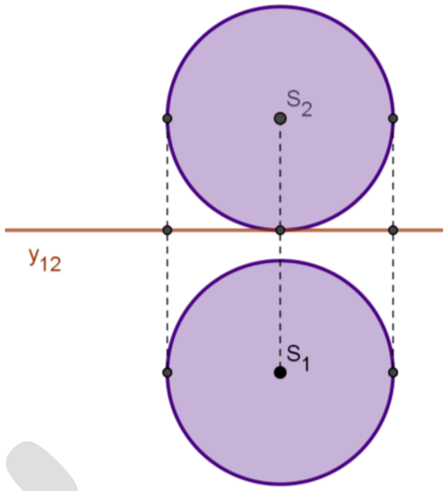
11. Sdružené průměty rotačního kužele





12. Sdružené průměty koule





4.2.4.8 Důležité vlastnosti Mongeova promítání

Vzhledem k tomu, že Mongeovo promítání je speciálním případem rovnoběžného promítání, tak zachovává vlastnosti rovnoběžného promítání, kterými mimo jiné jsou:

- rovnoběžnost (např. navzájem rovnoběžných přímek)
- dělicí poměr bodů (např. střed úsečky se zobrazí opět na střed úsečky)
- velikost rovnoběžných úseček

Výhody Mongeova promítání:

- zachovává řadu rozměrů

Nevýhody Mongeova promítání:

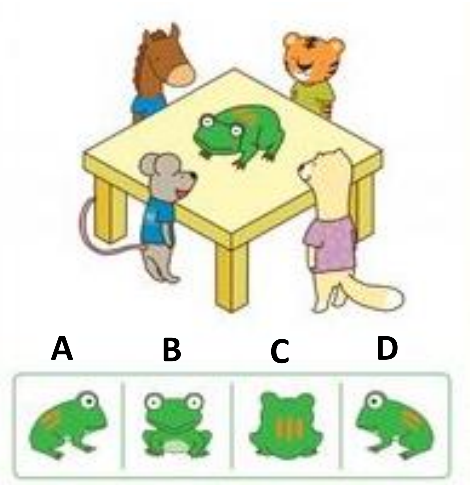
- není příliš názorné

4.2.4.9 Příklady na procvičování

Příklad 4.6:

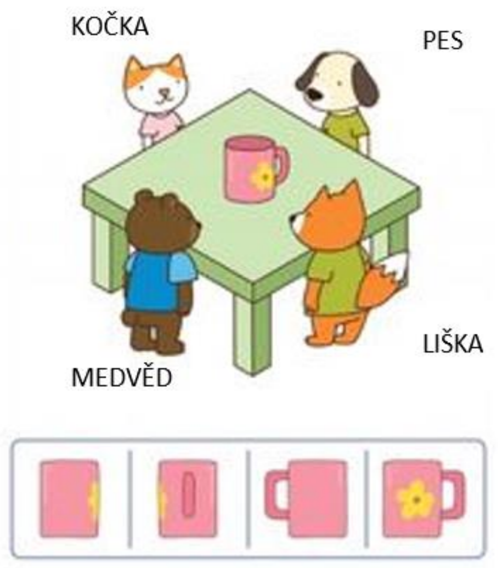
K jednotlivým zvířatům přiřaďte písmena podle toho, jak ze svého přímého pohledu před sebe vidí na stole žábu.

1. svišť ________________
2. myš ________________
3. tygr ________________
4. kůň _________________



Příklad 4.7:

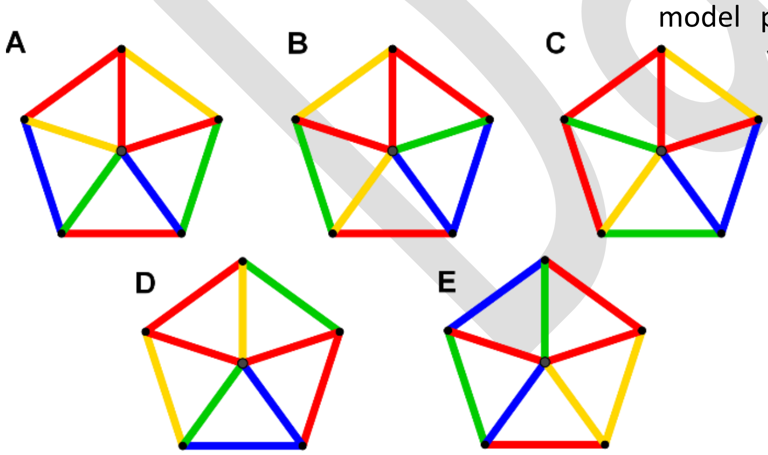
Pod příslušný pohled na hrnek napište název toho zvířete, které ve svém přímém pohledu hrnek takto vidí.

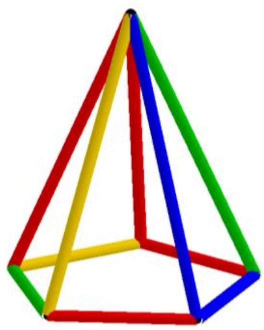


_______ _______ _______ ________

Příklad 4.8:

Z barevných brček byly vytvořeny hrany „drátěného“ modelu pravidelného pětibokého jehlanu. Rozhodněte, pod kterým písmenem se skrývá správný pohled shora na „drátěný“ model pravidelného pětibokého jehlanu vytvořeného z barevných brček a zobrazeného na obrázku.

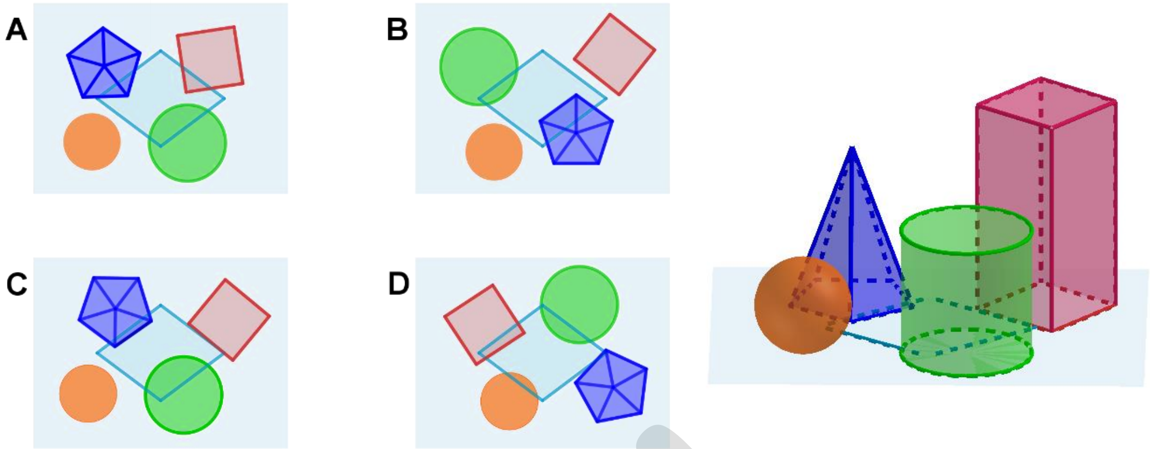




Odpověď: _____________

Příklad 4.9:

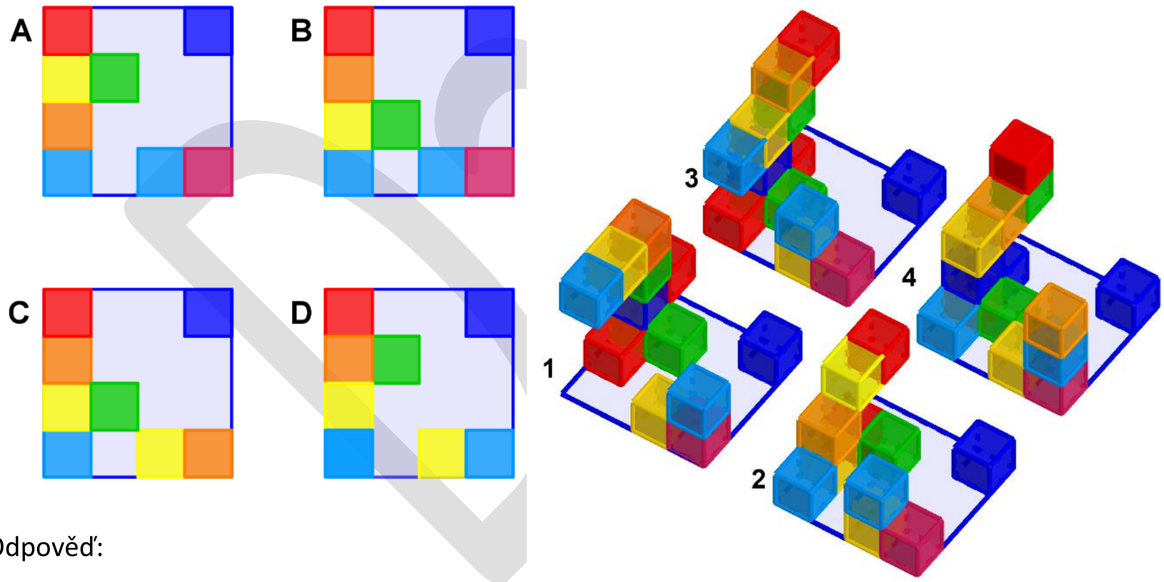
Na obrázku vpravo je dána soustava čtyř základních těles - koule, rotačního válce, pravidelného pětibokého jehlanu a pravidelného čtyřbokého hranolu. Rozhodněte, pod kterým písmenem se skrývá správný pohled na soustavu těles shora.



Odpověď: _____________

Příklad 4.10:

K daným pravoúhlým pohledům shora na sestavy barevných krychlových těles přiřaďte odpovídající sestavy barevných krychlových těles zobrazené v rovnoběžném promítání.

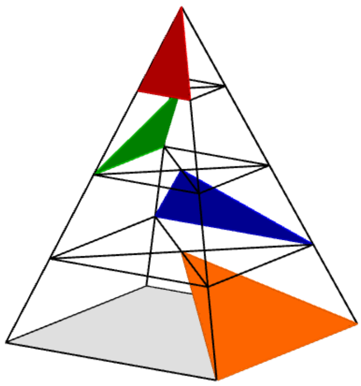


Odpověď:

____

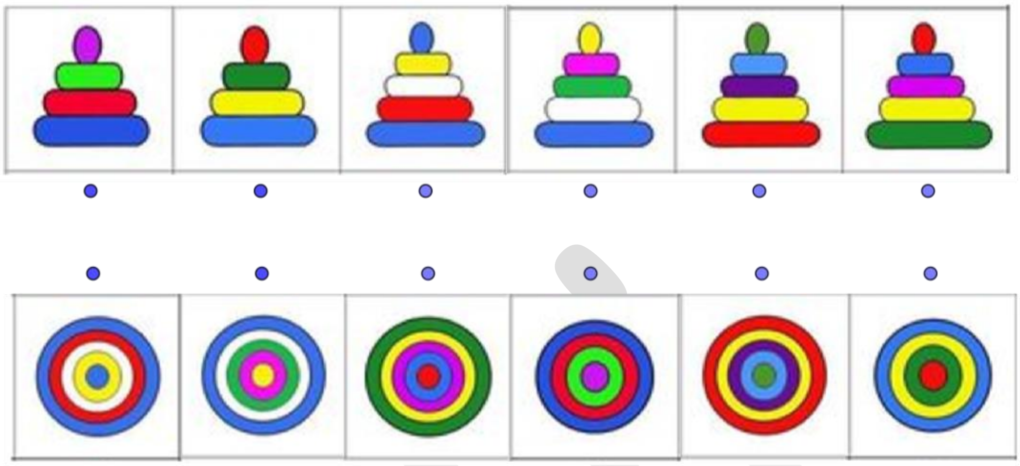
Příklad 4.11:

Čtyři barevné látkové plachty jsou připevněny k drátěné konstrukci trojrozměrné plastiky vždy ve výšce 1/4 výšky plastiky, jak je znázorněno na obrázku. Jak bude vypadat plastika s barevnými látkami při kolmém pohledu shora? Plastiku společně s barevnými látkami při kolmém pohledu shora načrtněte.



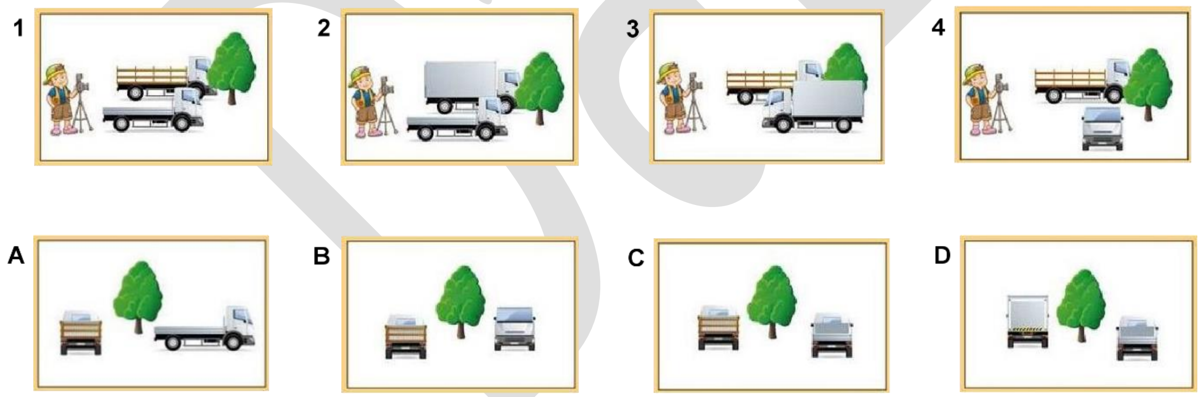
Příklad 4.12:

Na obrázku jsou v první řadě zobrazeny pravoúhlé pohledy zpředu na barevné „Hanojské věže“, ve druhé řadě jsou zobrazeny pravoúhlé pohledy na ně shora. Spojením teček vytvořte sobě odpovídající dvojice pravoúhlých pohledů na jednotlivé „Hanojské věže“.



Příklad 4.13:

Na čtyřech obrázcích je zobrazen fotograf a jím fotografované objekty – strom a nákladní automobily. K těmto obrázkům přiřaďte fotografie s těmi situacemi, které fotograf při jednotlivých záběrech zachytil.

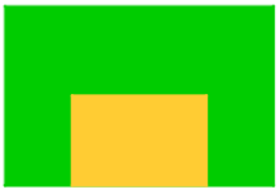


Odpověď: ____

Příklad 4.14*:

Dva geometrické obrazce představují dva pravoúhlé pohledy na seskupení dvou těles. Horní kresba představuje pravoúhlý pohled na seskupení těles zepředu a dolní kresba představuje pravoúhlý pohled na seskupení těles shora. Načrtněte seskupení těles ve VRP.

pohled zepředu

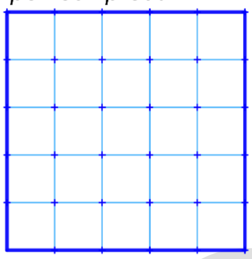


pohled shora

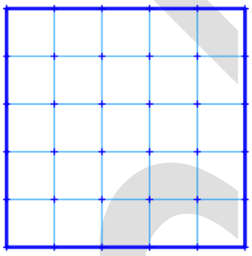
Příklad 4.15:

V jednotlivých mřížkách vybarvěte čtverce tak, aby odpovídaly pravoúhlým pohledům na barevné krychlové těleso zpředu, zprava a shora.

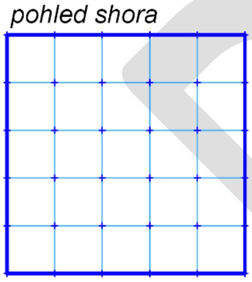
pohled zpředu

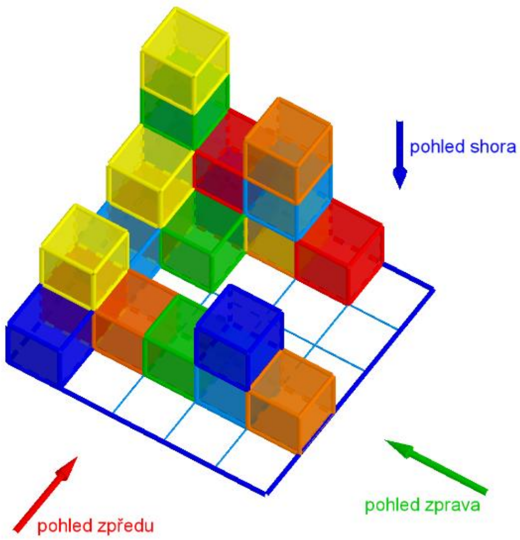


pohled zprava



pohled shora



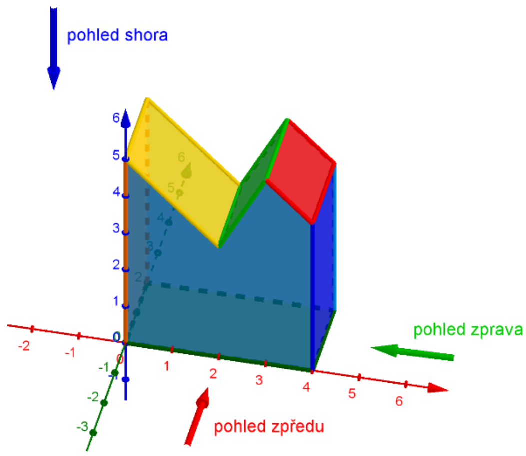


Příklad 4.16:

Načrtněte pravoúhlé pohledy shora, zpředu a zprava na „seříznutý“ kvádr o rozměrech 4 cm × 2 cm × 5 cm.

pohled zpředu:

pohled zprava:

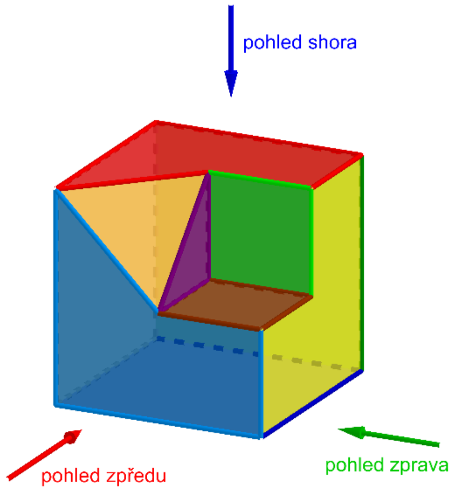


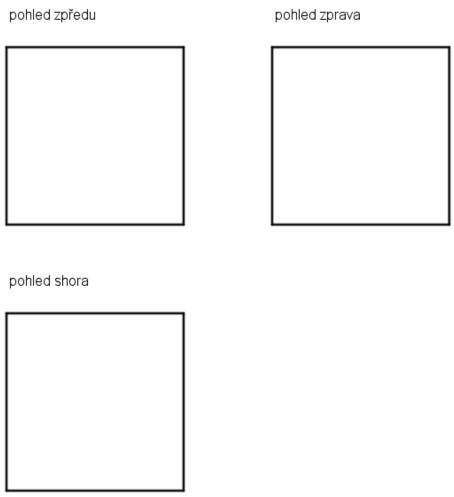
pohled shora:

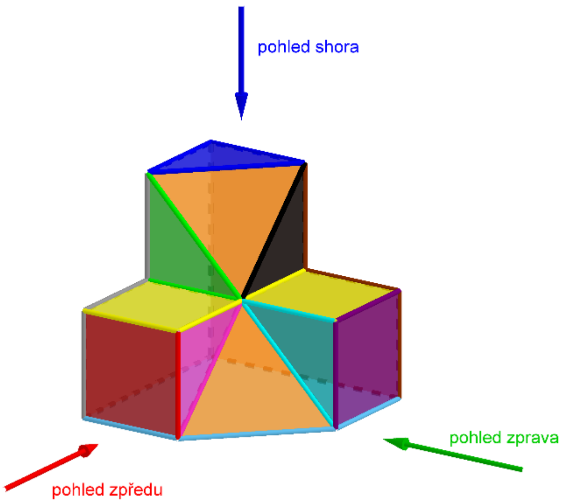
Příklad 4.17:

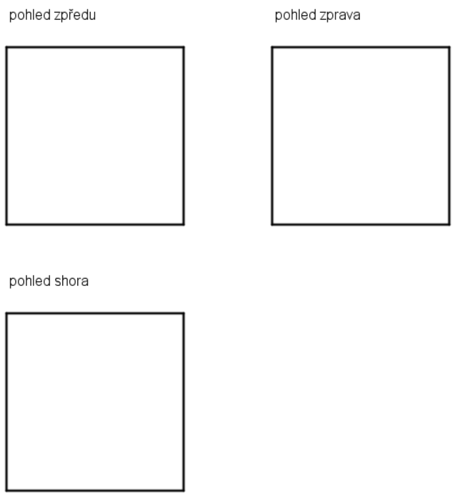
Do připravených čtverců doplňte pravoúhlé pohledy shora, zpředu a zprava na „vyříznuté“ a „seříznuté“ krychle. Šipky ukazují směry pravoúhlých pohledů na krychle.

a)









b)