11. BINÁRNÍ RELACE V GEOMETRII

11.1 Binární relace

Binární relací rozumíme vztah mezi dvěma prvky (**relace** = vztah, **binární** = mezi dvěma prvky).

Definice 11.1:
Binární relací R **na množině** M nazveme podmnožinu kartézského součinu M x M.

Definice 11.2:
Binární relací **z množiny** A **do množiny** B je libovolná podmnožina kartézského součinu A x B.

Poznámka: Kartézským součinem množin A, B rozumíme množinu $A \times B = \{[x, y]: (x \in A) \wedge \wedge (y \in B)\}$

- *např.: Jsou-li dány množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, pak jejich kartézským součinem rozumíme množinu $A \times B = \{[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2], [c, 1], [c, 2]\}$.*

Vlastnosti binární relace *R*:

- **Reflexivita:** $\forall\, x \in M: [x, x] \in R$
  („Pro všechna x z množiny M platí, že uspořádaná dvojice [x, x] je prvkem relace R.“; „reflexivita znamená, že prvek x je v relaci sám se sebou.“)
- **Symetrie:** $\forall\, x, y \in M: [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$
  („Pro všechna x a y z množiny M platí: jestliže je uspořádaná dvojice [x, y] prvkem relace R, pak uspořádaná dvojice [y, x] je také prvkem relace R.“)
- **Antisymetrie:** $\forall\, x, y \in M: [x, y] \in R \wedge [y, x] \in R \Rightarrow x = y$
  („Pro všechna x a y z množiny M platí: jestliže je uspořádaná dvojice [x, y] prvkem relace R a současně také uspořádaná dvojice [y, x] je prvkem relace R, pak platí rovnost x = y.“)
- **Tranzitivita:** $\forall\, x, y, z \in M: [x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \in R$
  („Pro všechna x, y a z z množiny M platí: jestliže je uspořádaná dvojice [x, y] a zároveň také uspořádaná dvojice [y, z] prvkem relace R, pak je i uspořádaná dvojice [x, z] prvkem relace R.“)
- **Konektivnost:** $\forall\, x, y \in M: x \neq y \Rightarrow [x, y] \in R \vee [y, x] \in R$
  („Pro všechna x a y z množiny M platí: jestliže je x různé od y, pak buď uspořádaná dvojice [x, y], nebo uspořádaná dvojice [y, x] je prvkem relace R.“)

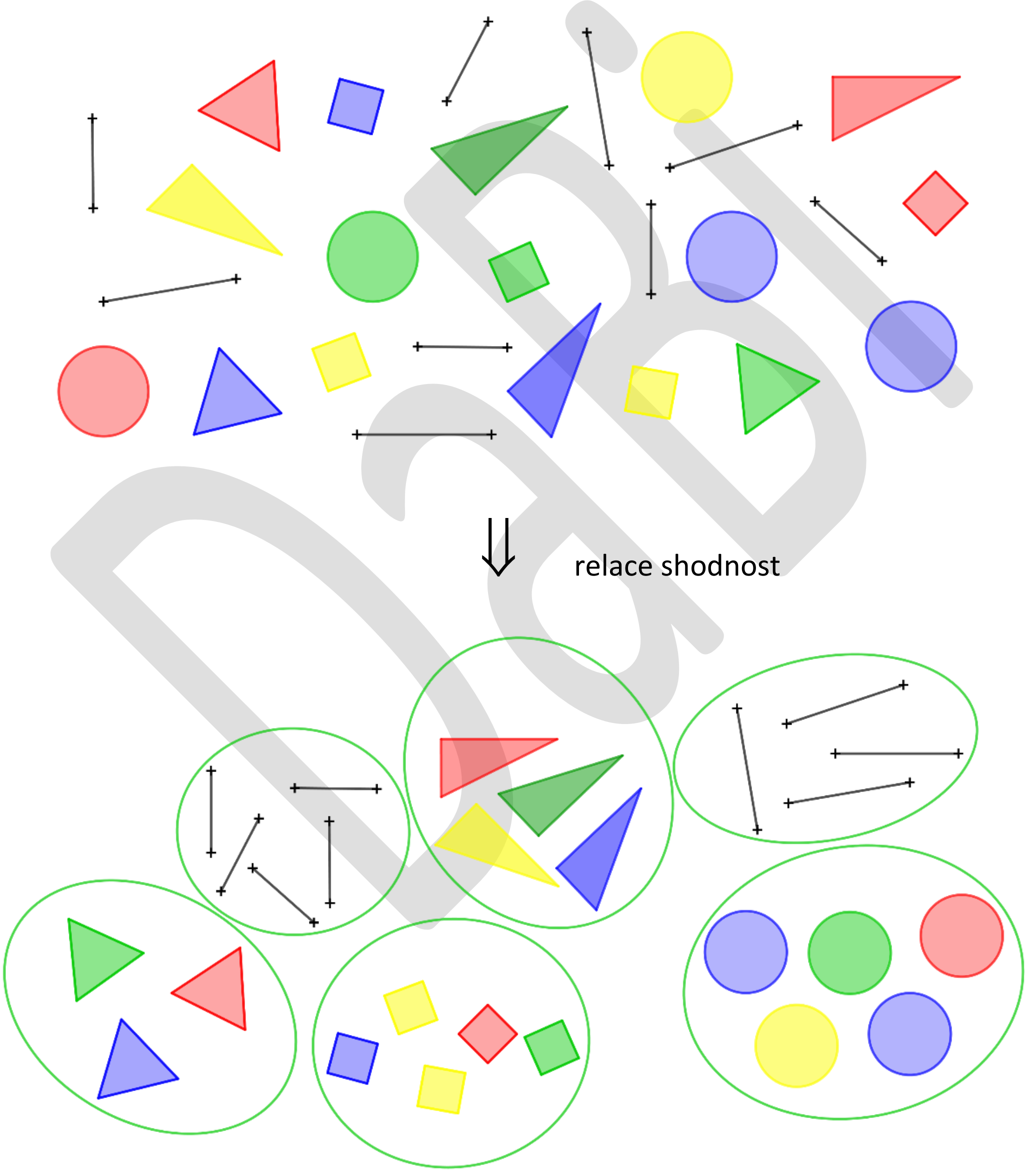
Speciální typy binárních relací:

- **relace ekvivalence**
  <u>Definice 11.3:</u> Binární relace na množině M, která je **reflexivní, symetrická a tranzitivní**, se nazývá **ekvivalence**.

- **relace uspořádání**
  Definice 11.4: Binární relace na množině M, která je **reflexivní, antisymetrická a tranzitivní**, se nazývá **uspořádání.**

11.2 Relace shodnost

Definice 11.5:
Relace shodnost je relace ekvivalence (tj. je to relace, která je reflexivní, symetrická, tranzitivní) rozkládající množinu geometrických útvarů na třídy shodných útvarů, přitom žádná třída není prázdná.



Poznámka: Dva geometrické útvary v rovině se nazývají shodné, jestliže je lze přemístěním ztotožnit. Shodné jsou např. každé dvě přímky, každé dvě polopřímky a každé dvě poloroviny, ale naproti tomu nemusí být shodné každé dvě úsečky, každé dva trojúhelníky, resp. každé dva duté úhly apod.

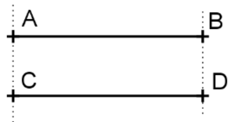
Základní žákovská představa shodnosti dvou útvarů je, že při jejich přemístění se útvary vzájemně „kryjí“.

11.2.1 Relace shodnost úseček

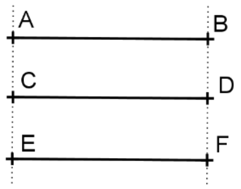
Základním pojmem relace shodnosti je relace zvaná **shodnost úseček**, kterou zapisujeme pomocí znaku $\cong$, tedy např. $AB \cong CD$. Přitom relace shodnosti úseček je

a) *reflexivní*, tj. $AB \cong BA$;

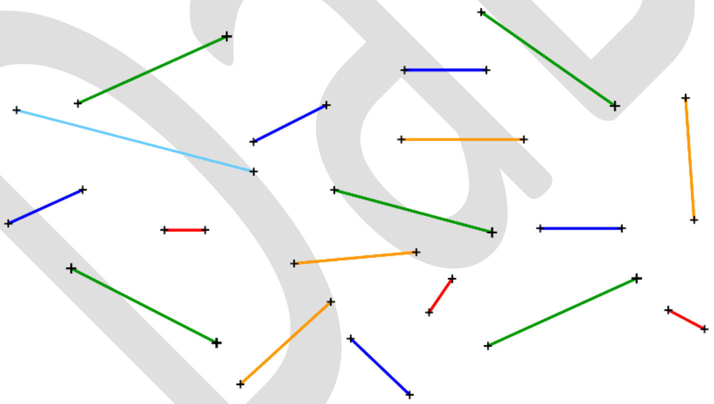
b) *symetrická*, tj. $AB \cong CD \Rightarrow CD \cong AB$;



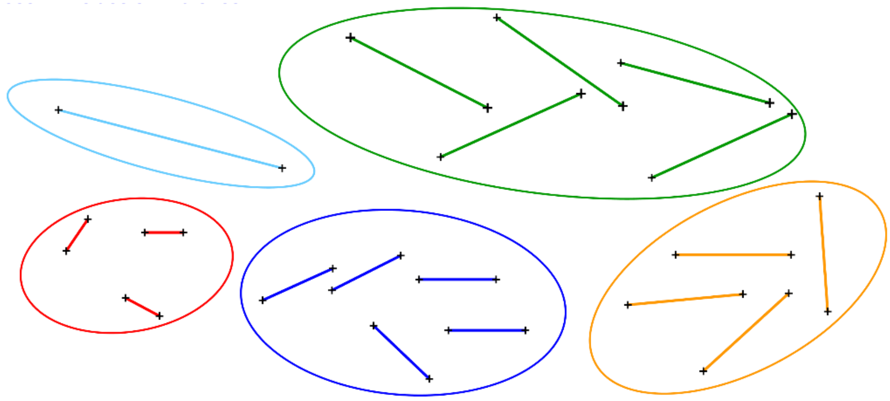
c) *tranzitivní*, tj. $AB \cong CD \wedge CD \cong EF \Rightarrow AB \cong EF.$



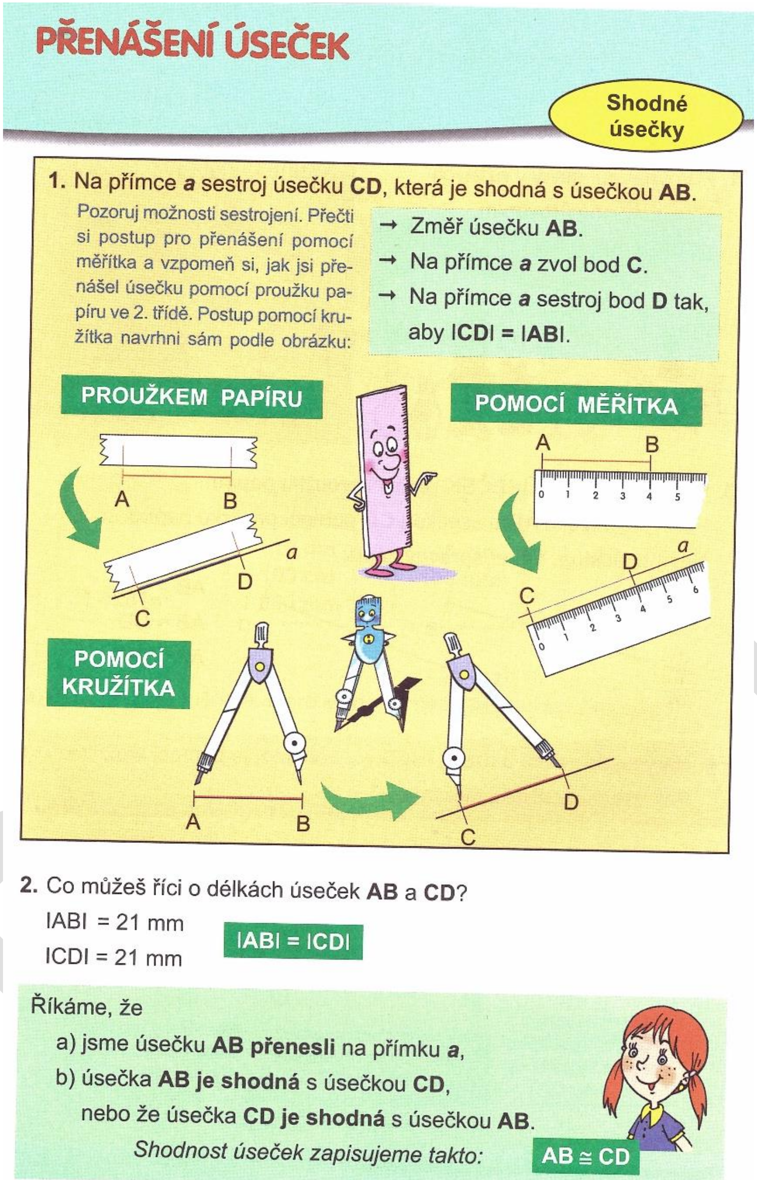
Z toho plyne, že i shodnost úseček je **relací ekvivalence** a rozkládá množinu úseček na třídy shodných úseček.



$\Downarrow$ relace shodnost úseček



Žáci na 1. stupni ZŠ se od 2. ročníku seznamují se shodností úseček a dalších útvarů. Shodnost dvou úseček zjišťují tak, že jednu z úseček přemístí ke druhé pomocí kružítka, průsvitky nebo proužku papíru.



PŘENÁŠENÍ ÚSEČEK

Shodné úsečky

1. Na přímce ***a*** sestroj úsečku **CD**, která je shodná s úsečkou **AB**.

Pozoruj možnosti sestrojení. Přečti si postup pro přenášení pomocí měřítka a vzpomeň si, jak jsi přenášel úsečku pomocí proužku papíru ve 2. třídě. Postup pomocí kružítka navrhni sám podle obrázku:

→ Změř úsečku **AB**.
→ Na přímce ***a*** zvol bod **C**.
→ Na přímce ***a*** sestroj bod **D** tak, aby **|CD| = |AB|**.

2. Co můžeš říci o délkách úseček **AB** a **CD**?

|AB| = 21 mm
|CD| = 21 mm

|AB| = |CD|

Říkáme, že

a) jsme úsečku **AB přenesli** na přímku ***a***,
b) úsečka **AB je shodná** s úsečkou **CD**,
nebo že úsečka **CD je shodná** s úsečkou **AB**.

Shodnost úseček zapisujeme takto: **AB ≅ CD**

Při tomto přenášení se opírají o následující axiom shodnosti:

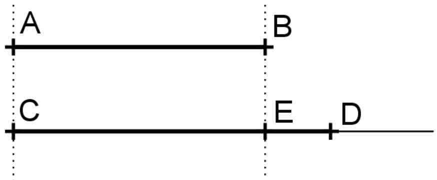
Axiom shodnosti S1:

Pro každou úsečku *AB* a pro každou polopřímku *CD* platí, že na polopřímce *CD* existuje jediný bod *E* takový, že $AB \cong CE$.

Porovnání úseček

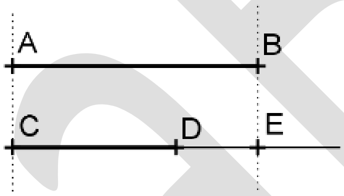
Na základě axiomu shodnosti lze porovnat libovolné dvě úsečky. Tzn., chceme-li porovnat úsečky *AB, CD*, sestrojíme na polopřímce *CD* bod *E* takový, že $AB \cong CE$. Pro bod *E* může nastat právě jedna z následujících možností:

a) bod *E* leží mezi body *C, D*, pak říkáme, že úsečka *AB* je **menší než** úsečka *CD* a píšeme $AB < CD$;



b) bod *E* splývá s bodem *D*, pak na základě tranzitivnosti a reflexivnosti shodnosti úseček platí $AB \cong CD$;

c) bod *D* leží mezi body *C, E*, pak říkáme, že úsečka *AB* je **větší než** úsečka *CD* a píšeme $AB > CD$.

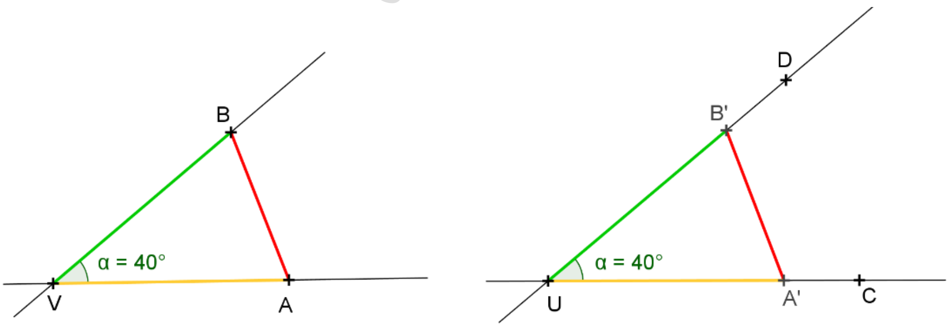


11.2.2 Relace shodnost úhlů

Pomocí shodnosti úseček můžeme definovat i shodnost úhlů.

<u>Definice 11.6:</u>

Říkáme, že úhel *AVB* je shodný s úhlem *CUD* (píšeme $\angle AVB \cong \angle CUD$) právě tehdy, když na ramenech $\rightarrow UC$, $\rightarrow UD$ úhlu *CUD* existují takové body A', B', že platí $UA' \cong VA$, $UB' \cong VB$ a $A'B' \cong AB$.



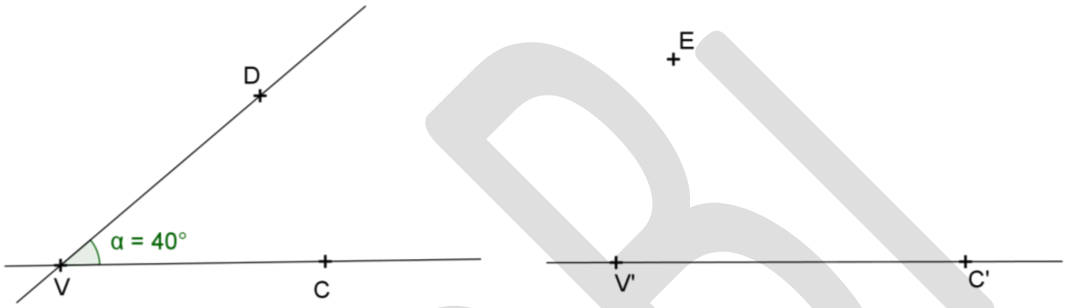
Z definice 4.6 a z vlastností relace shodnost úseček téměř okamžitě plyne, že i shodnost úhlů je relací ekvivalence.

Poznámka: Definice 4.6 zahrnuje shodnost všech druhů úhlů, tj. konvexních, přímých i nekonvexních. Je zřejmé, že každé dva přímé úhly jsou shodné a že dva nekonvexní úhly *AVB, CUD* jsou shodné právě tehdy, když jsou shodné příslušné konvexní úhly *AVB, CUD*.

K porovnání úhlů je nutné umět „přenést daný konvexní úhel k dané polopřímce do dané poloroviny“, resp. „přenést daný nekonvexní úhel k dané polopřímce a k dané polorovině.“ První tvrzení plyne z postupu řešení následujícího příkladu.

Příklad 11.1:

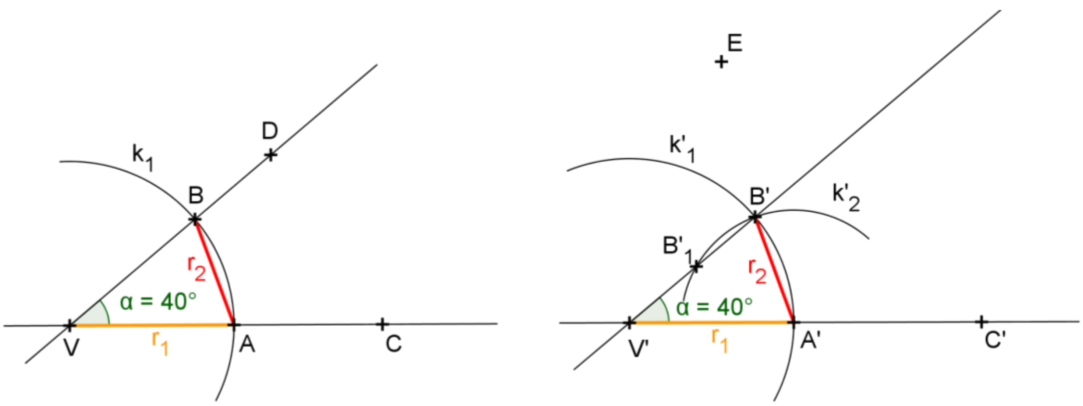
Je dán konvexní úhel $\alpha = \angle CVD$ a polorovina $V'C'E$. Sestrojte v polorovině $V'C'E$ takovou polopřímku $V'B'$, aby platilo $\alpha = \angle C'VB'$.



Postup řešení:

Nechť je dán konvexní úhel $\alpha = \angle CVD$ s vrcholem V a polorovina $V'C'E$. Sestrojme

1) k_1; k_1 (V, r_1), kde velikost poloměru r_1 je libovolná hodnota
2) A; $A \equiv k_1 \cap \rightarrow VC$
3) B; $B \equiv k_1 \cap \rightarrow VD$
4) k'_1; k'_1 (V', r_1)
5) A'; $A' \equiv k'_1 \cap \rightarrow V'C'$
6) k'_2; k'_2 $(A', r_2 = |AB|)$
7) B', B'_1; B', $B'_1 \equiv k'_1 \cap k'_2$
8) $\rightarrow V'B' \equiv \rightarrow V'B'_1$
9) $\alpha = \angle A'V'B'$

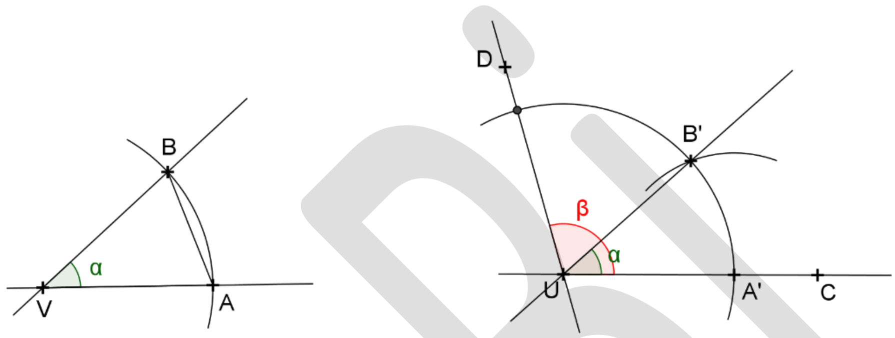


Z popsané konstrukce a z definice 4.6 o shodnosti úhlů plyne, že je $\angle A'V'B' \cong \angle CVD$. Platí, že $VA \cong V'A'$, $VB \cong V'B'$, $AB \cong A'B'$ a že $A' \in \rightarrow V'C'$. Na základě konstrukce je polopřímka $V'B'$ podmnožinou dané poloroviny $V'C'E$. Úloha má vždy jediné řešení.

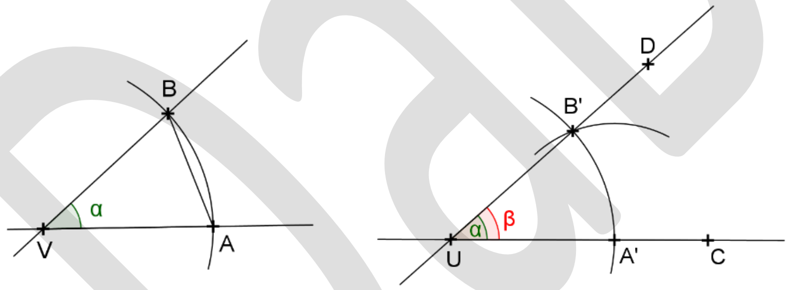
Porovnání úhlů

Na základě výše popsaného tvrzení o přenášení daného konvexního úhlu k dané polopřímce do dané poloroviny lze porovnat úhly. Po přenesení $\angle AVB$ k polopřímce UC do poloroviny UCD, v níž leží $\angle CUD$, může nastat právě jedna z následujících možností:

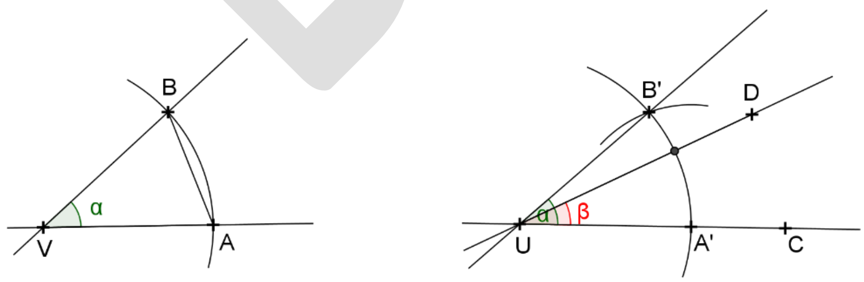
a) $\rightarrow UB' \subset \angle CUD \wedge B' \notin \rightarrow UD$, odkud plyne, že $\angle AVB$ je **menší než** $\angle CUD$, tj. $|\angle AVB| < |\angle CUD|$;



b) $\rightarrow UB' \equiv \rightarrow UD$, odtud plyne, že $\angle AVB$ je **shodný s** $\angle CUD$, tj. $\angle AVB \cong \angle CUD$;



c) $\rightarrow UD \subset \angle CUB' \wedge B' \notin \rightarrow UD$, odkud plyne, že $\angle AVB$ je **větší než** $\angle CUD$, tj. $|\angle AVB| > |\angle CUD|$.

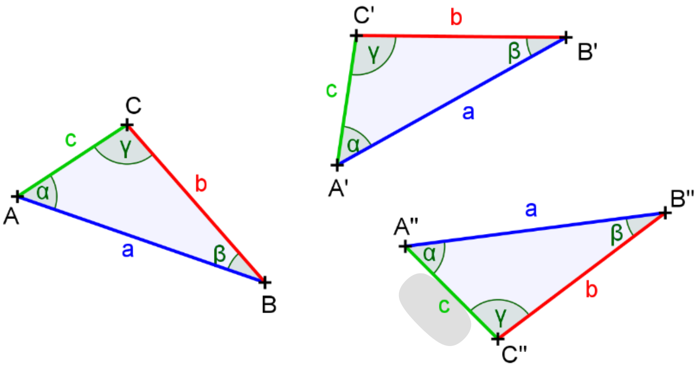


11.2.3 Relace shodnost trojúhelníků

Pomocí shodnosti úseček a shodnosti úhlů lze definovat shodnost dvou trojúhelníků založenou na shodnosti jejich stran a na shodnosti jejich vnitřních úhlů.

Definice 11.7:

Říkáme, že trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem $A'B'C'$ (píšeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$) právě tehdy, když platí, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$ a že $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$.



Poznámka: Z definice 4.7 plyne, že strany a vnitřní úhly trojúhelníku $A'B'C'$ musí být shodné s odpovídajícími stranami a vnitřními úhly trojúhelníku ABC a že tedy při zjišťování shodnosti trojúhelníků záleží na pořadí vrcholů.

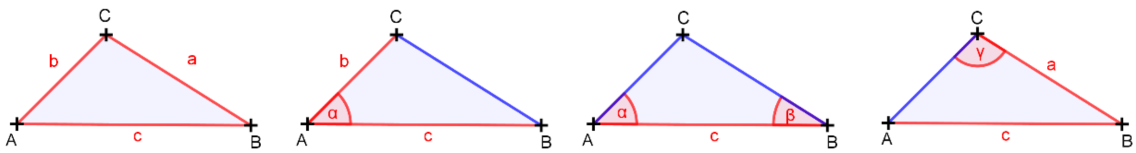
Poznámka: Protože shodnost úseček a shodnost úhlů jsou relacemi ekvivalence, je i shodnost trojúhelníků, která je na nich založená, relací ekvivalence.

V definici 4.7 je vyžadována shodnost všech odpovídajících si stran a shodnost všech odpovídajících si vnitřních úhlů jednotlivých trojúhelníků. Lze dokázat, že k určení shodnosti dvou trojúhelníků je dostačující shodnost určitých tří dvojic základních prvků – tj. stran a úhlů. Věty popisující tyto postačující podmínky pro shodnost trojúhelníků jsou známy jako tzv. ***věty o shodnosti trojúhelníků***, označované symbolicky jako ***sss, sus, usu*** **a** ***Ssu***.

Věta 11.1: (věty o shodnosti trojúhelníků)

Dva trojúhelníky jsou shodné, pokud se shodují:

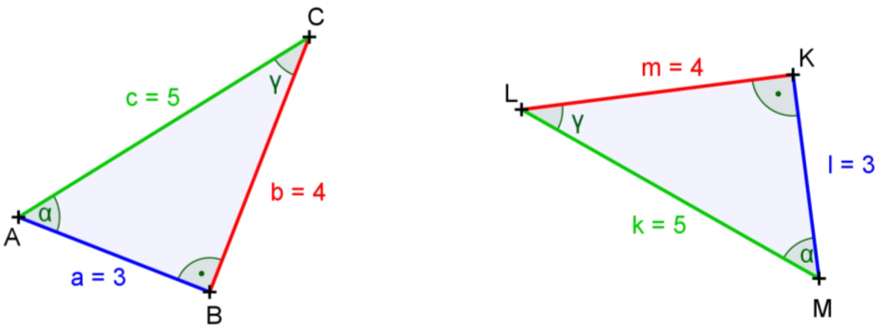
- ve všech třech stranách (*sss*);
- ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném (*sus*)
- v jedné straně a ve 2 úhlech k ní přilehlých (*usu*)
- ve dvou stranách a v úhlu ležícím proti větší straně z nich (*Ssu*)



Příklad 11.2:

Trojúhelník ABC má rozměry $|AB|$ = 3 cm, $|BC|$= 4 cm, $|CA|$ = 5 cm. Trojúhelník KLM má rozměry $|KM|$ = 3 cm, $|KL|$ = 4 cm, $|LM|$ = 5 cm. Je trojúhelník ABC shodný s trojúhelníkem KLM?

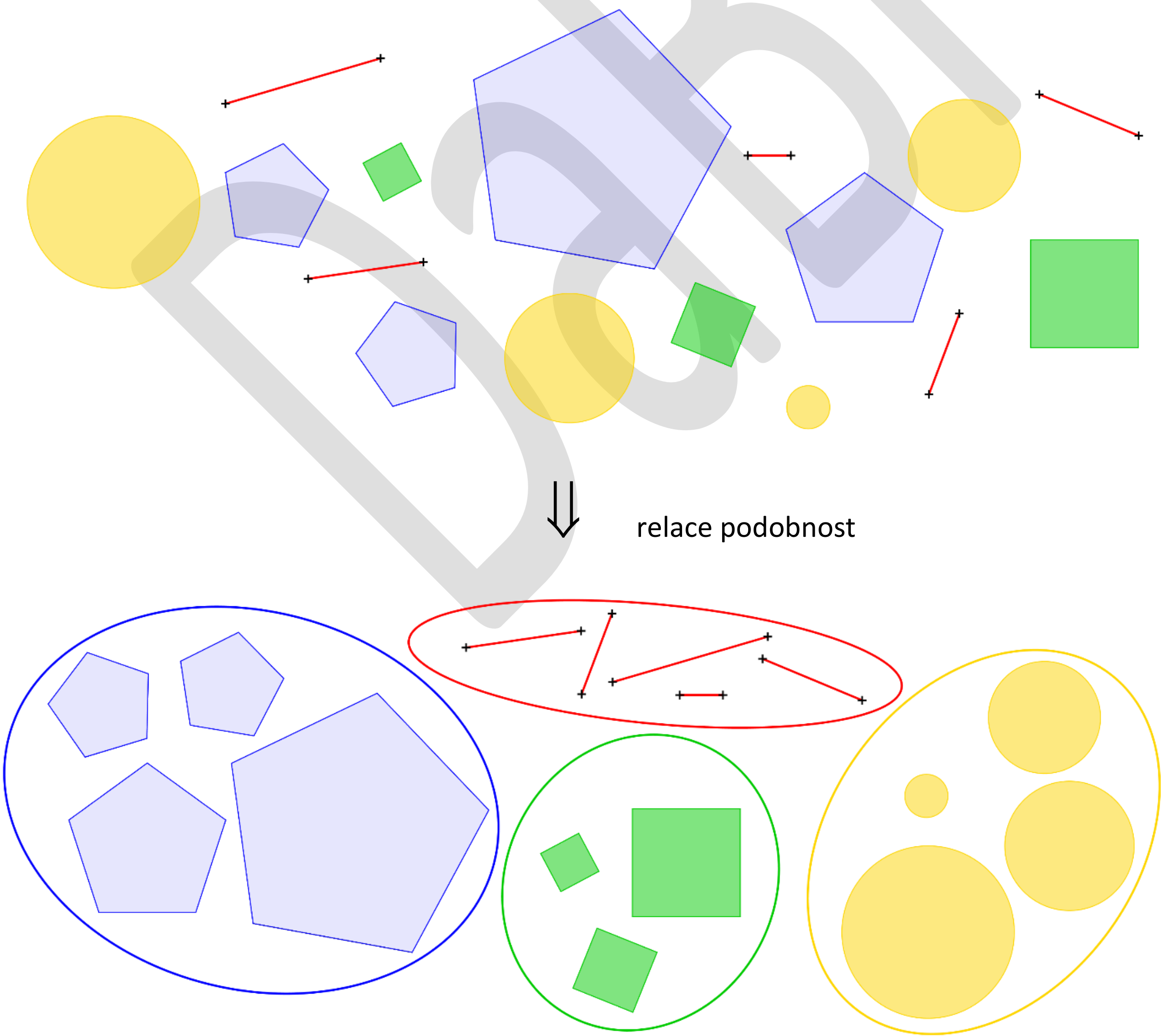
Odpověď: *Ne, trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem MKL.*



11.3 Relace podobnost

Definice 11.8:

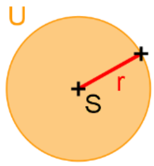
Relace podobnost je relace ekvivalence (tj. je to relace, která je reflexivní, symetrická, tranzitivní) rozkládající množinu geometrických útvarů na třídy podobných útvarů, přitom žádná třída není prázdná.



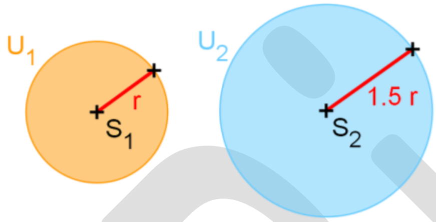
Relaci podobnost zapisujeme pomocí znaku ~, tj. podobnost útvarů U_1, U_2 značíme $U_1 \sim U_2$.

Relace podobnost je

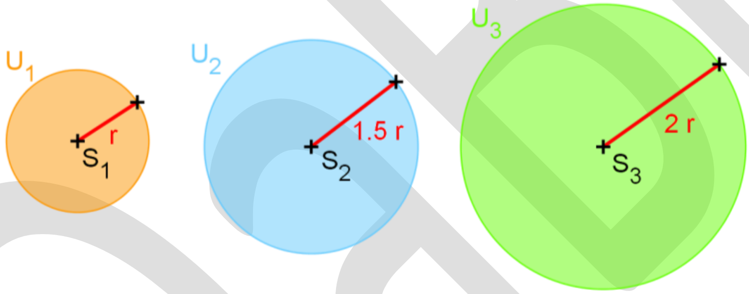
- reflexivní - $U \sim U$,



- symetrická - je-li $U_1 \sim U_2$, je též $U_2 \sim U_1$,



- tranzitivní – je-li $U_1 \sim U_2$ a $U_2 \sim U_3$, je též $U_1 \sim U_3$.



O útvarech, které jsou podobné, říkáme, že mají **stejný tvar.**

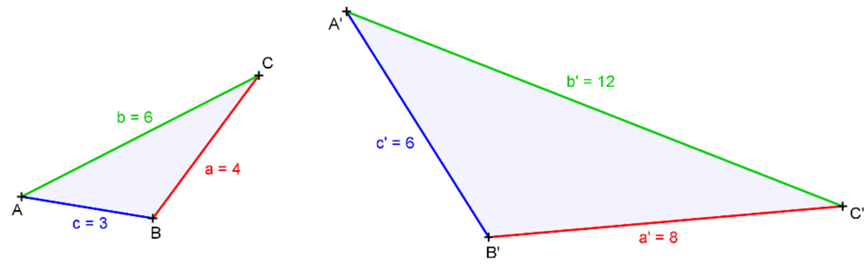
Základní žákovská představa o podobnosti dvou útvarů je, že jeden útvar je zvětšením nebo zmenšením druhého útvaru. Útvary vždy podobné jsou např. úsečky, kružnice, pravidelné n-úhelníky, …

11.3.1 Relace podobnost trojúhelníků

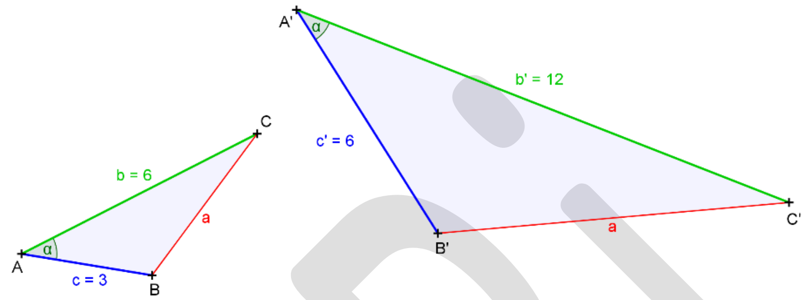
U některých útvarů je výhodné určit ještě jiná kritéria, která umožňují rozhodnout o tom, že jsou tyto útvary podobné. Např. u trojúhelníků, které mají významnou úlohu nejen z teoretického hlediska, ale i při řešení příkladů ve školské matematice a především také i v praktickém využití, rozhodujeme často o jejich podobnosti na základě ***vět o podobnosti trojúhelníků***.

Věta 11.2: (věty o podobnosti trojúhelníků)
Dva trojúhelníky jsou podobné, pokud platí alespoň jedna z následujících vět:

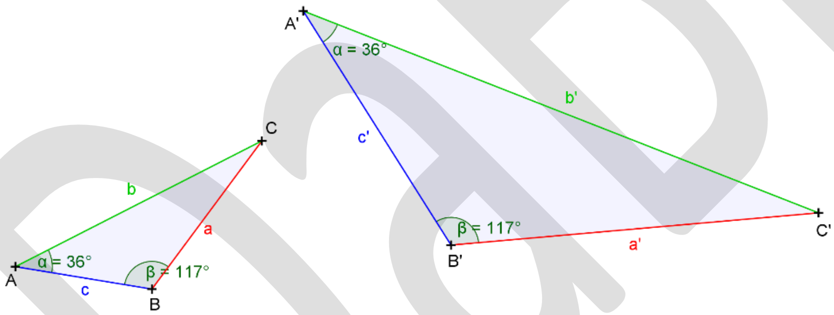
Věta sss - Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek všech tří dvojic odpovídajících stran, jsou si podobné.



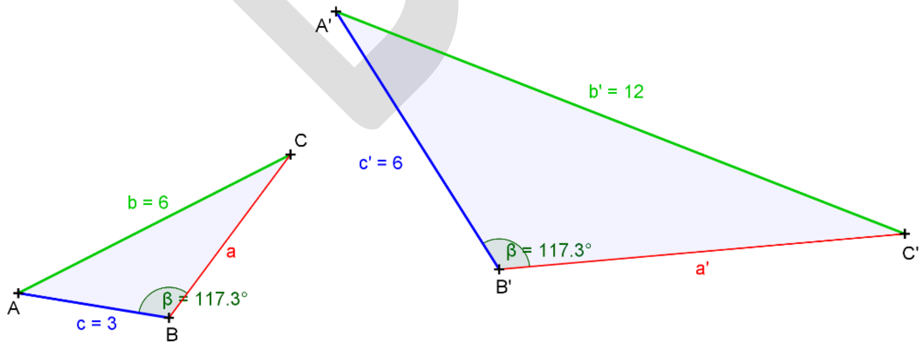
Věta sus - Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek dvou odpovídajících stran a shodují se v úhlu jimi sevřeném, jsou si podobné.



Věta uu - Každé dva trojúhelníky, které mají dva úhly stejné, si jsou podobné.



Věta Ssu - Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek dvou odpovídajících stran a shodují se v úhlu naproti větší straně, jsou si podobné.



Podobné trojúhelníky

Podobné trojúhelníky jsou tedy ty, které mají stejný tvar, ale jinou velikost. Tvar trojúhelníku je definován jeho vnitřními úhly, proto dva trojúhelníky se dvěma stejnými vnitřními úhly jsou podobné.

Lze říci, že dva trojúhelníky $\triangle\, ABC$ a $\triangle\, A'B'C'$ jsou podobné, pokud platí nějaká z následujících podmínek:

- odpovídající si strany obou trojúhelníků mají délky ve stejném poměru, tj.
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = k.$$
- velikosti vnitřních úhlů obou trojúhelníků jsou stejné, tj. $|\angle\, CAB| = |\angle\, C'A'B'|$ a $|\angle\, ABC| = |\angle\, A'B'C'|$, pak i $|\angle\, BCA| \cong |\angle\, B'C'A'|$.

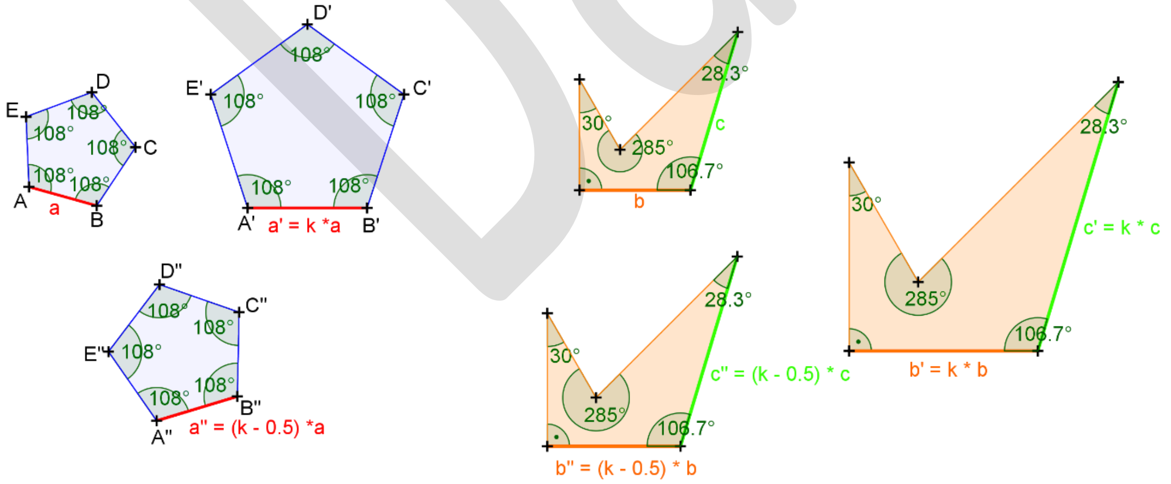
Podobnost dvou trojúhelníků symbolicky zapisujeme $\triangle\, ABC \sim \triangle\, A'B'C'$.

Zpravidla se za speciální případ podobnosti považuje i shodnost, tedy podobnost s koeficientem podobnosti 1. Všechny shodné tvary jsou tedy zároveň podobné. (Autoři některých učebnic však výslovně vydělují shodné trojúhelníky z definice podobných trojúhelníků, takže trojúhelníky musí být rozdílné nejen tvary, ale i svými velikostmi, aby se daly považovat za podobné.)

11.3.2 Relace podobnost mnohoúhelníků a dalších rovinných objektů

Pravidla pro zjištění podobnosti dvou trojúhelníků je možné rozšířit i na mnohoúhelníky s více stranami. U jakýchkoliv dvou podobných mnohoúhelníků si jsou odpovídající strany přímo úměrné. Nicméně pouze úměrnost stran není dostatečná k zajištění podobnosti mnohoúhelníků kromě trojúhelníků, proto mají-li být mnohoúhelníky podobné, musí být rovněž shodné jejich odpovídající si vnitřní úhly.

Pro mnohoúhelníky z výše uvedeného vyplývá, že odpovídající si strany podobných mnohoúhelníků jsou ve stejném vzájemném poměru a odpovídající si úhly jsou si rovny.



Například všechny kružnice, čtverce a rovnostranné trojúhelníky si jsou podobné. Naopak např. elipsy si podobné být nemusí.

11.4 Relace mezi mírami útvarů

11.4.1 Relace rovnost

Relaci rovnost zapisujeme pomocí znaku „=“, tj. rovnost mezi dvěma hodnotami zapíšeme $a = b$.

Relace ekvivalence je určitým zobecněním relace rovnosti (tedy identity). Je zřejmé, že relace rovnost splňuje všechny tři požadované vlastnosti relace ekvivalence, tj. je

- **reflexivní** (každý prvek je roven sám sobě, tedy $a = a$),
- **symetrická** (je-li jeden roven druhému, je i druhý roven prvnímu, tj. je-li $a = b$, pak i $b = a$),
- **tranzitivní** (pokud $a = b$ a $b = c$, pak i $a = c$).

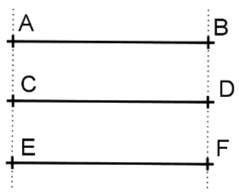
11.4.2 Relace rovnost úseček

Relaci rovnost můžeme uvažovat jako např. relaci mezi velikostmi, tzn. mezi mírami geometrických úvarů. Dle výše uvedeného je relace rovnost relací ekvivalence. Dále ukážeme, že relace rovnost velikostí úseček splňuje vlastnosti relace ekvivalence, tj. relace rovnost velikostí úseček je

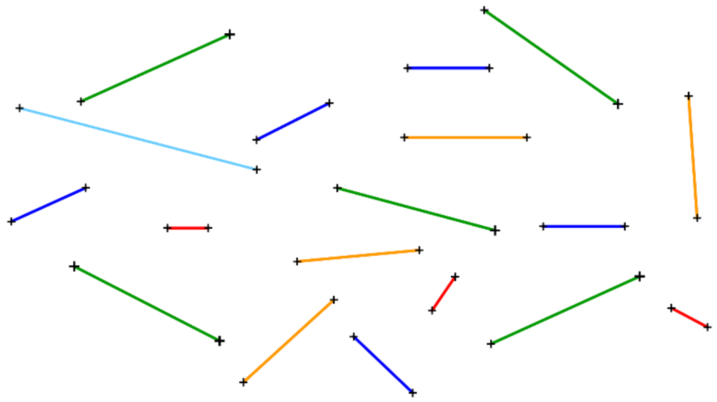
- **reflexivní** – velikost úsečky je v relaci sama se sebou, tj. platí, že $|AB| = |BA|$;

- **symetrická** - když máme dvě stejně dlouhé úsečky, tak první je stejně dlouhá jako druhá a druhá stejně dlouhá jako první, tj. platí, že $|AB| = |CD| \Rightarrow |CD| = |AB|$, tzn. úsečky *AB, CD* mají sobě rovné délky;

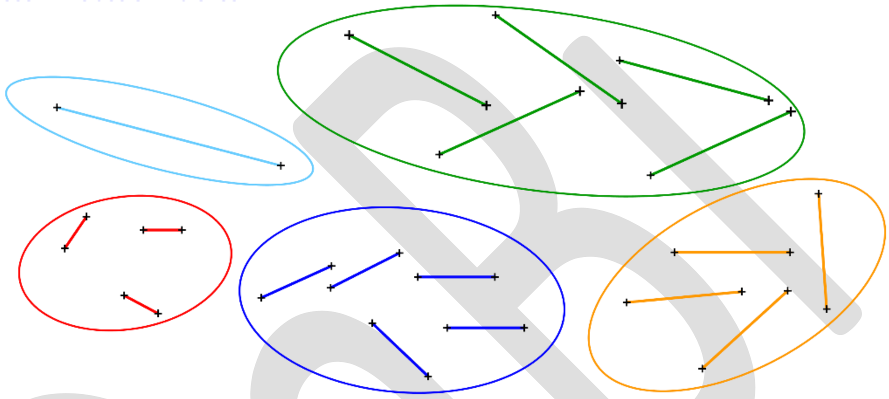
- **tranzitivní** = když první úsečka je stejně dlouhá jako druhá a druhá je stejně dlouhá jako třetí, pak první je stejně dlouhá jako třetí, tj. platí, že $|AB| = |CD| \wedge |CD| = |EF| \Rightarrow |AB| = |EF|$.



Z toho plyne, že relace rovnost úseček umožňuje rozdělit množinu úseček všech možných délek na podmnožiny, ve kterých budou vždy úsečky stejné délky. Přitom žádná podmnožina nebude prázdná.



$\Downarrow$ relace rovnost úseček



Užití relace rovnosti úseček na 1. stupni ZŠ:

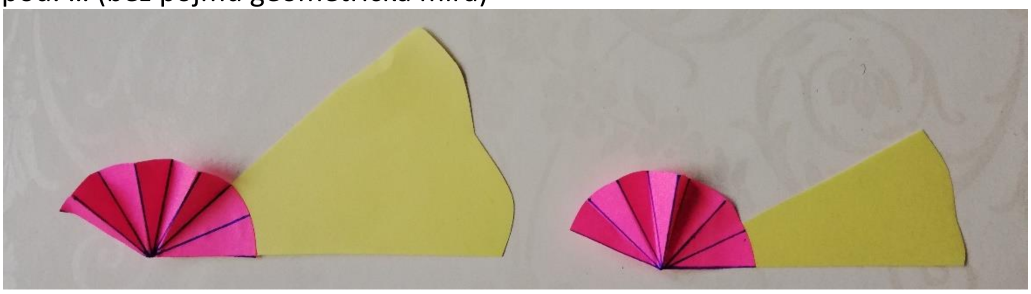
- porovnávání délek úseček, tzn. určení, která úsečka je kratší, resp. delší
- žáci k porovnání délek úseček nemusí používat pravítko, ale např. kružítko, proužek papíru, provázek, klacíky různých délek apod. … (bez pojmu geometrická míra)

11.4.3 Relace rovnost úhlů

Analogickým způsobem, jakým je možné porovnávat velikosti úseček, je také možné porovnávat velikosti úhlů. Dva úhly $\angle AVB$, $\angle A'V'B'$, které se rovnají, mají sobě rovné velikosti, tj. symbolicky zapisujeme $|\angle AVB| = |\angle A'V'B'|$.

Užití relace rovnost úhlů na 1. stupni ZŠ:

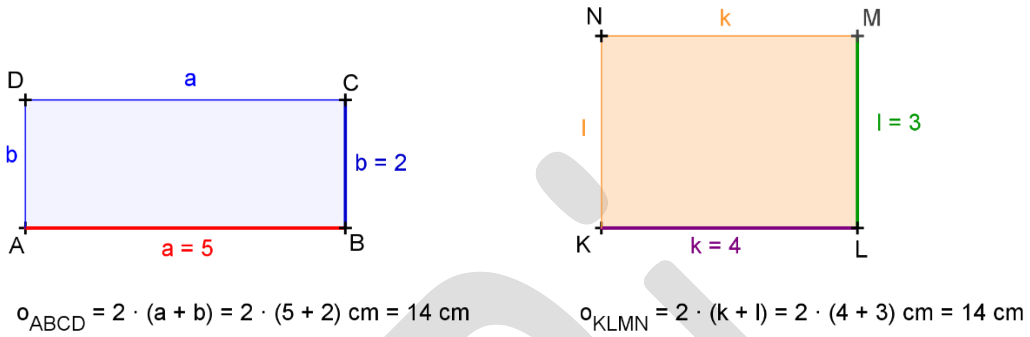
- porovnávání velikostí úhlů, tzn. určení, který úhel je větší, resp. menší
- žáci k porovnání velikostí úhlů nemusí používat úhloměr, ale např. kružítko, úhlový vějíř apod. … (bez pojmu geometrická míra)



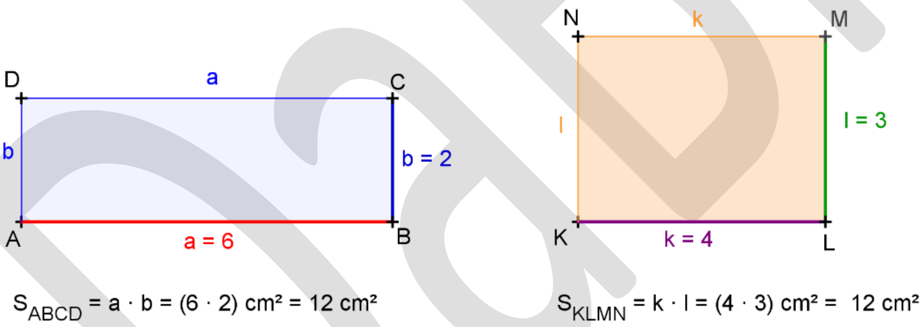
11.4.4 Relace rovnost obvodů, obsahů rovinných útvarů

Relaci rovnost lze zjišťovat např. i pro obvod, resp. obsah rovinných útvarů. Uveďme dva konkrétní příklady.

Může nastat případ, kdy **dva obdélníky** mají **sobě rovné obvody**, ale tyto obdélníky **nemusí být shodné**. Např. obdélník *ABCD* o délkách stran a = 5 cm, b = 2 cm a obdélník *KLMN* o délkách stran k = 4 cm, l = 3 cm mají obvody rovny 14 cm.



Může nastat též případ, kdy **dva obdélníky** mají **sobě rovné obsahy**, ale tyto obdélníky přitom **nemusí být shodné**. Např. obdélník *ABCD* o délce a = 6 cm, o šířce b = 2 cm a obdélník *KLMN* o délce k = 4 cm a o šířce l = 3 cm mají obsahy rovny 12 cm^2.



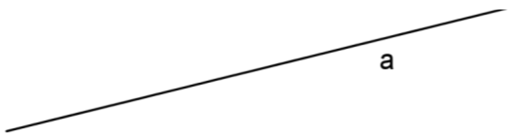
11.5 Relace mezi bodovými množinami (vzájemné polohy útvarů)

11.5.1 Základní polohy útvarů

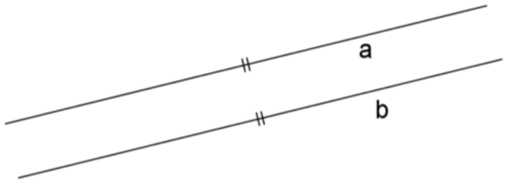
Rovnoběžnost přímek

Rovnoběžnost je relace ekvivalence, což si ukážeme na rovnoběžnosti přímek. Tj. **relace rovnoběžnost přímek** je

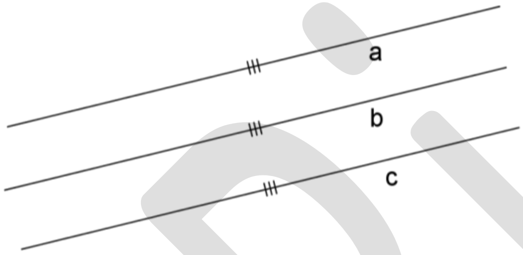
- **reflexivní** - přímka je rovnoběžná sama se sebou, tj. *a* // *a*;



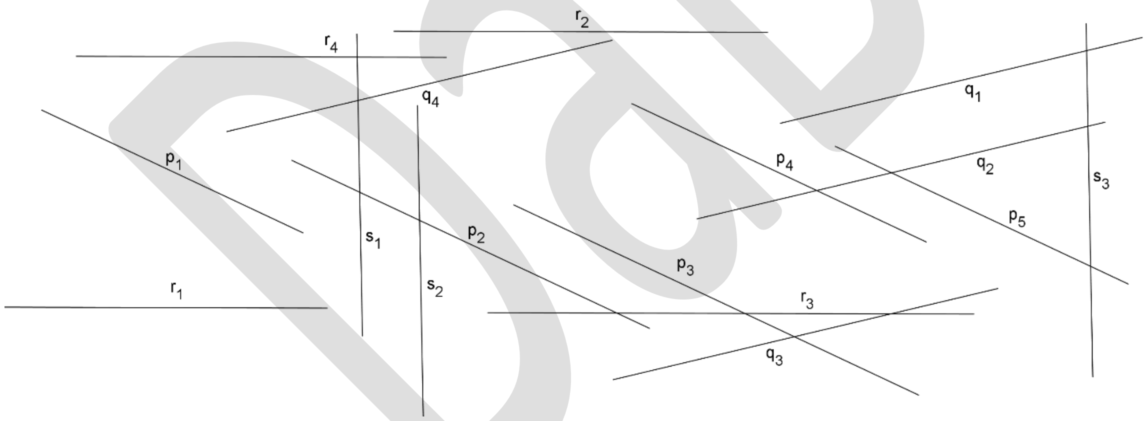
- **symetrická** - jsou-li dány dvě přímky, z nichž první přímka je rovnoběžná s druhou přímkou, pak i druhá přímka je rovnoběžná s první přímkou, tj. $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$;



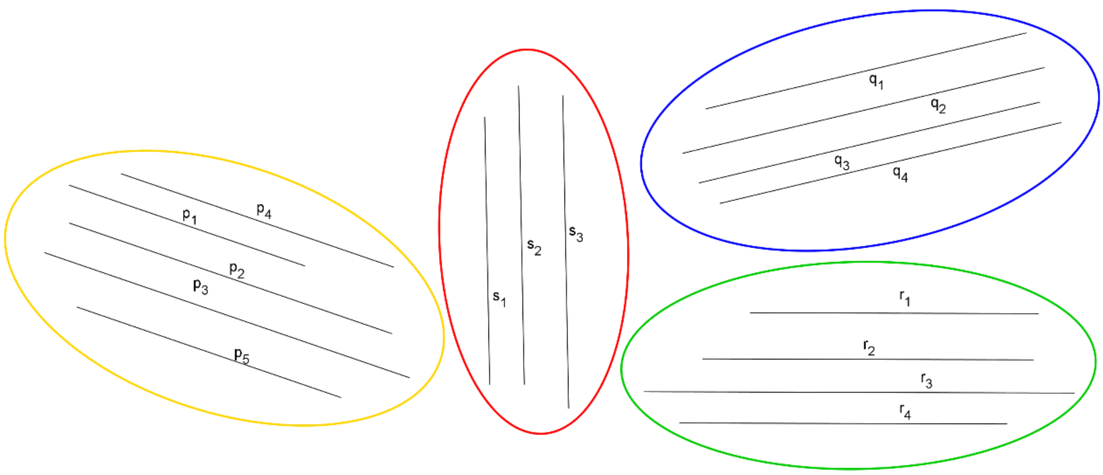
- **tranzitivní** - jsou-li dány tři přímky, z nichž první dvě přímky jsou navzájem rovnoběžné a z nichž druhá přímka je rovnoběžná se třetí přímkou, pak první přímka bude také rovnoběžná se třetí přímkou, tj. $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$.



Ověřili jsme, že rovnoběžnost přímek je relace ekvivalence, která vytváří rozklad množiny všech rovnoběžných přímek na třídy navzájem rovnoběžných přímek, přitom žádná z vytvořených tříd nesmí být prázdná.



$\Downarrow$ relace rovnoběžnost přímek



Přitom každá z vytvořených tříd navzájem rovnoběžných přímek se nazývá **směr.**

Relace rovnoběžnost rovin je analogicky jako relace rovnoběžnost přímek relací ekvivalence, která v množině všech rovnoběžných rovin vytváří rozklad na třídy navzájem rovnoběžných rovin, přitom každá z těchto tříd se nazývá **dvojsměr (osnova)**.

Různoběžnost přímek

- není relace ekvivalence
  - **není reflexivní** = přímka není různoběžná sama se sebou

Mimoběžnost přímek

- není relace ekvivalence
  - **není reflexivní** = přímka není mimoběžná sama se sebou

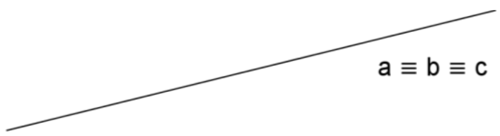
11.5.2 Odvozené polohy útvarů

Splývající - zvláštní případ rovnoběžnosti

- je **relace ekvivalence**
  - **je reflexivní** - přímka je splývající sama se sebou, tj. $a \equiv a$

  - **symetrická** – jsou dány dvě přímky, když první přímka splývá se druhou přímkou, pak druhá přímka splývá s první přímkou, tj. $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$

  - **tranzitivní** = jsou dány tři přímky, když první dvě přímky splývají a druhá přímka splývá se třetí přímkou, pak první přímka bude splývat se třetí přímkou, tj. $a \equiv b \wedge \wedge b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$.



Kolmost - zvláštní případ různoběžnosti

- není relace ekvivalence, **není reflexivní** = přímka není kolmá sama k sobě

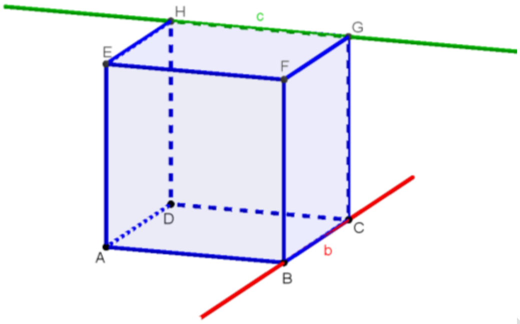
11.5.3 Vzájemná poloha dvou přímek

Kritérii třídění vzájemné polohy dvou přímek je skutečnost, zda přímky leží v téže rovině, anebo zda neleží v téže rovině, a zjištění, co je jejich průnikem.

a) <u>průnikem je prázdná množina (0 společných bodů)</u>

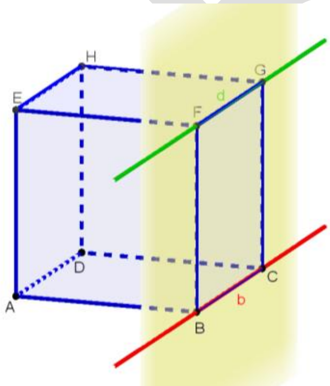
- **přímky jsou mimoběžné** – neleží ve stejné rovině (jsou tzv. nekomplanární)

Definice 11.9: Dvě přímky jsou mimoběžné, právě když nemají žádný společný bod a když neleží v téže rovině.



- **přímky jsou rovnoběžné různé** – leží ve stejné rovině (jsou tzv. komplanární)

Definice 11.10: Dvě přímky jsou rovnoběžné různé, právě když nemají žádný společný bod a zároveň leží v jedné rovině.



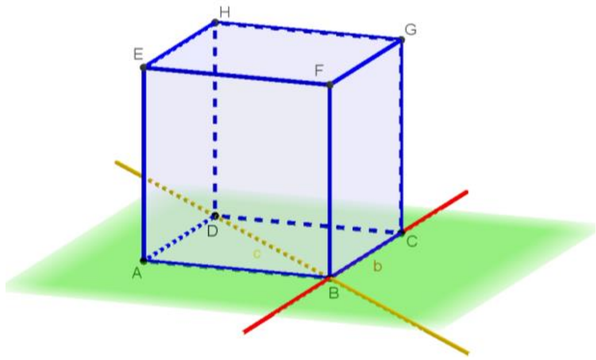
Věta 11.3: Přímky *b, d*, které mají od sebe stále stejnou vzdálenost, jsou rovnoběžné.

- rovnoběžnost je relace ekvivalence -> *rozklad na třídy navzájem rovnoběžných přímek s názvem směr*

b) <u>průnikem je právě jeden společný bod</u>

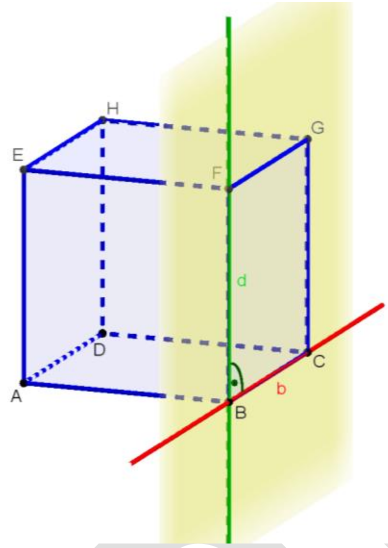
- **přímky jsou různoběžné**

Definice 11.11: Dvě přímky jsou různoběžné, právě když mají společný právě jeden bod (průsečík) a když zároveň leží v jedné rovině.



- **přímky jsou různoběžné kolmé** (speciální případ různoběžnosti přímek)

Definice 11.12: Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je 90°.



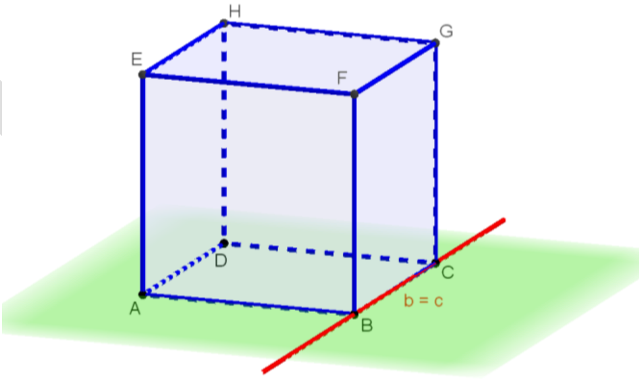
Věta 11.4: Přímky *b, c*, které rozdělí rovinu na čtyři shodné části (pravé úhly), jsou navzájem kolmé.

- kolmost přímek je relace symetrická, ale není reflexivní (*přímka není kolmá sama k sobě*), ani tranzitivní

c) <u>**průnikem je nekonečně mnoho společných bodů (celá přímka)**</u>

- **přímky jsou rovnoběžné splývající**

Definice 11.13: Dvě přímky jsou rovnoběžné splývající, právě když mají nekonečně mnoho společných bodů.



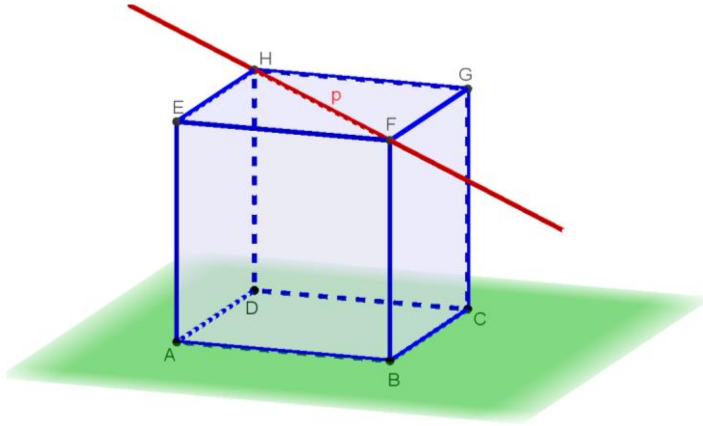
11.5.4 Vzájemná poloha přímky a roviny

Kritérii třídění vzájemné polohy přímky a roviny je skutečnost, zda přímka a rovina leží v téže rovině, a zjištění, co je jejich průnikem.

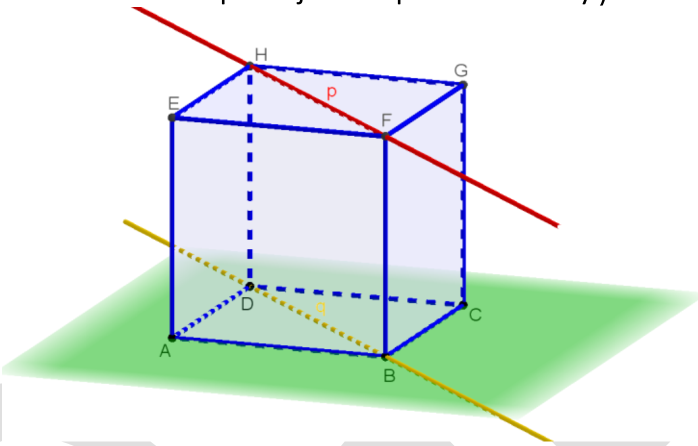
a) <u>**průnikem je prázdná množina**</u>

- **přímka a rovina jsou rovnoběžné různé**

Definice 11.14: Přímka *p* je **rovnoběžná různá s rovinou** ρ ($p \parallel \rho$) právě tehdy, když nemá s rovinou ρ **žádný společný bod.**



- **kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny:** Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ právě tehdy, když je rovnoběžná alespoň s jednou přímkou roviny ρ.

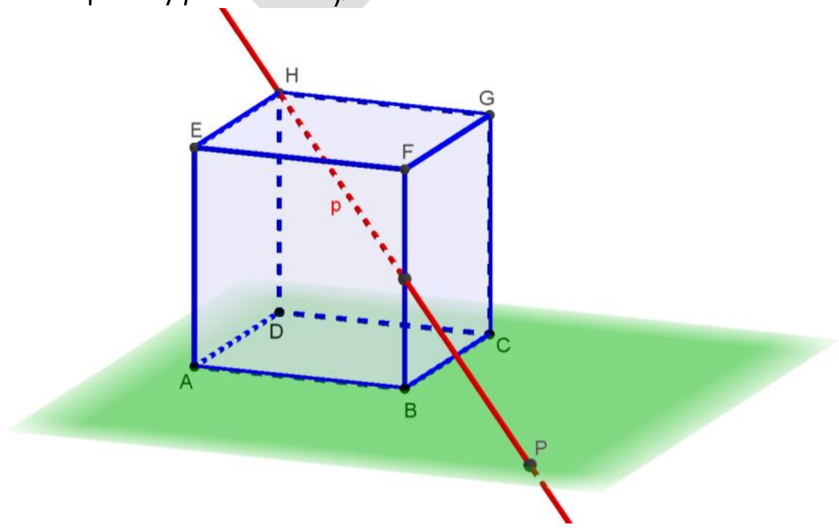


- rovnoběžnost je relace ekvivalence -> *rozklad na třídy navzájem rovnoběžných přímek s názvem směr a navzájem rovnoběžných rovin s názvem dvojsměr (= osnova)*
- **!!! vztah mimoběžnosti přímky a roviny ve trojrozměrném prostoru není definován**

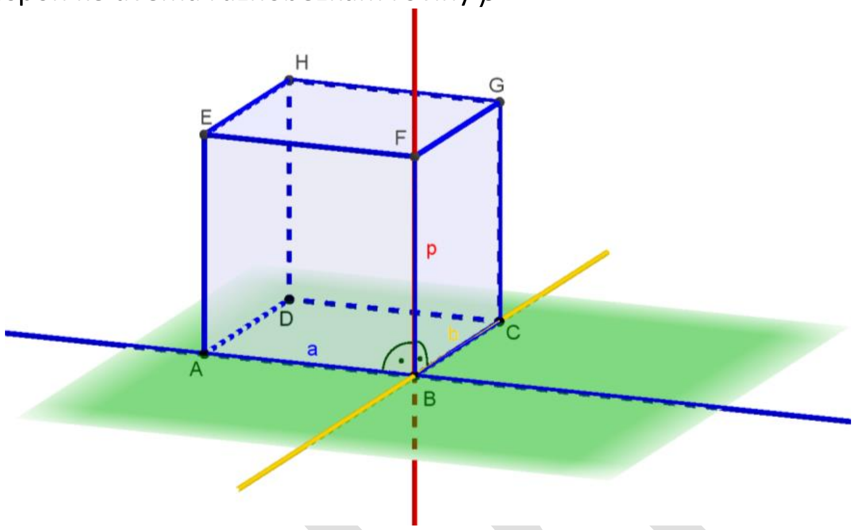
b) <u>**průnikem je právě jeden bod**</u>

- **přímka a rovina jsou různoběžné**

Definice 11.15: Přímka p je **různoběžná s rovinou** ρ ($p \nparallel \rho$) právě tehdy, když má s rovinou ρ **právě jeden společný bod – průsečík** P. Symbolicky píšeme $P \equiv p \cap \rho$ a čteme – bod P je průsečíkem přímky p s rovinou ρ.



- **přímka a rovina jsou kolmé**
  - zvláštní případ různoběžnosti
  - **kritérium kolmosti přímky a roviny:** přímka *p* je kolmá k rovině ρ právě tehdy, když je kolmá alespoň ke dvěma různoběžkám roviny ρ

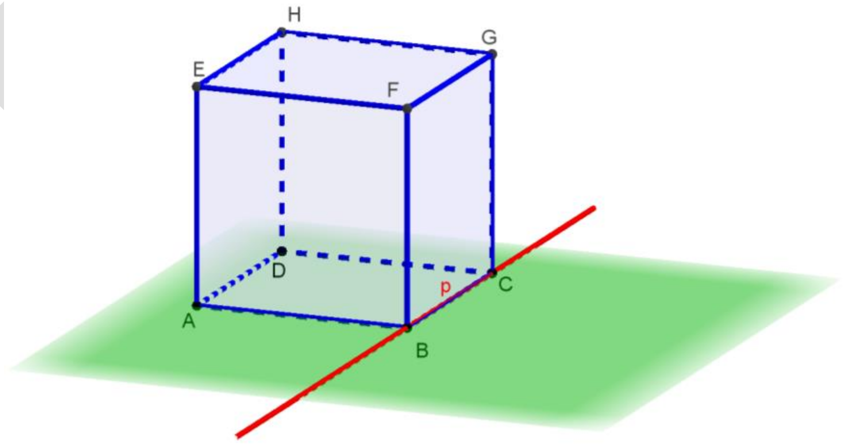


c) <u>**průnikem je nekonečně mnoho společných bodů (celá přímka)**</u>

- **přímka leží v rovině**

Definice 11.16: Přímka *p* leží v rovině ρ ($p \in \rho$), tj. přímka *p* je **incidentní** (**rovnoběžná** a **totožná**) s rovinou ρ právě tehdy, když má s rovinou **nekonečně mnoho společných bodů**.

- zvláštní případ rovnoběžnosti



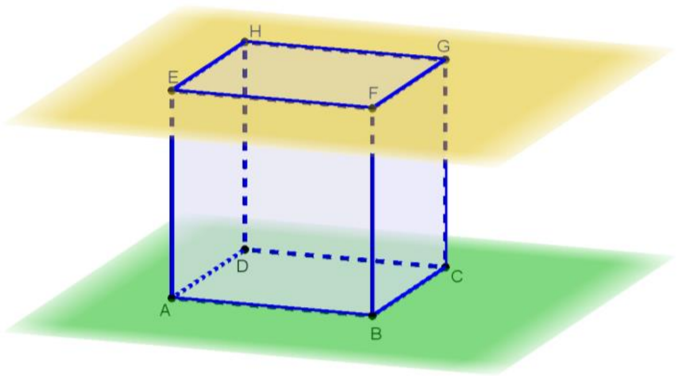
11.5.5 Vzájemná poloha dvou rovin

Kritériem třídění vzájemné polohy dvou rovin je zjištění, co je jejich průnikem.

a) <u>**průnikem je prázdná množina**</u>

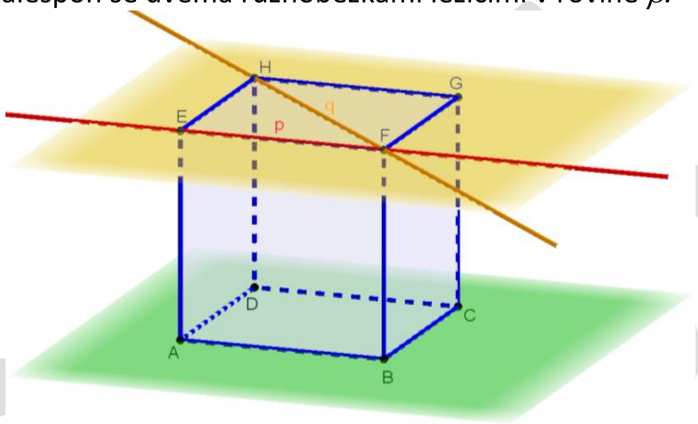
- **roviny jsou rovnoběžné různé**

Definice 11.17: Roviny α, β jsou **rovnoběžné různé** ($\alpha \parallel \beta$) právě tehdy, když nemají **žádný společný bod**.



Věta 11.5: Roviny α a β, které mají od sebe stále stejnou vzdálenost, jsou navzájem rovnoběžné různé.

- **kritérium rovnoběžnosti dvou rovin**: roviny α a β jsou rovnoběžné, když rovina α je rovnoběžná alespoň se dvěma různoběžkami ležícími v rovině β.

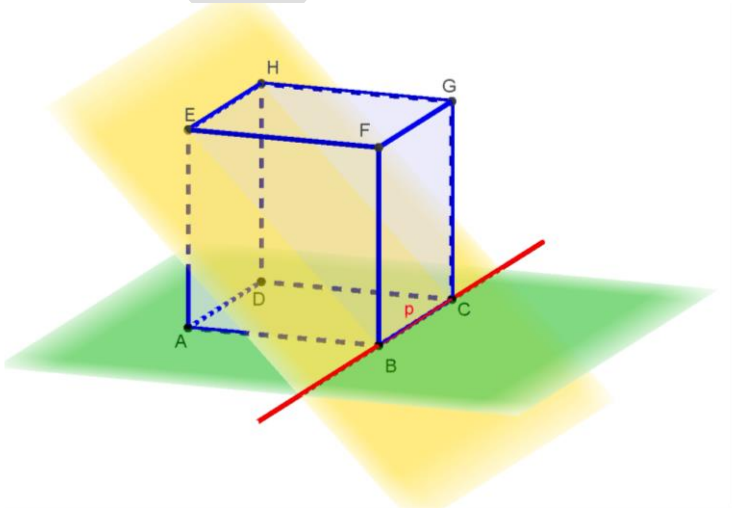


- **!!! vztah mimoběžnosti dvou rovin ve trojrozměrném prostoru není definován**

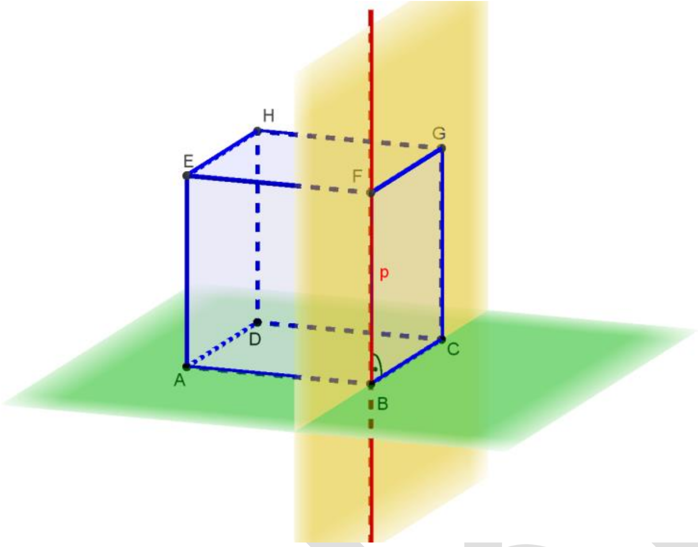
b) <u>**průnikem je přímka**</u>

- **roviny jsou různoběžné**

Definice 11.18: Roviny α, β jsou **různoběžné** ($\alpha \nparallel \beta$) právě tehdy, když mají společnou právě jednu přímku – **průsečnici** p, píšeme $p \equiv \alpha \cap \beta$ a čteme přímka p je průsečnicí rovin α, β.



- **roviny jsou kolmé**
  - zvláštní případ různoběžnosti
  - **kritérium kolmosti dvou rovin**: roviny α a β jsou kolmé právě tehdy, když rovina α je kolmá alespoň k jedné přímce roviny β

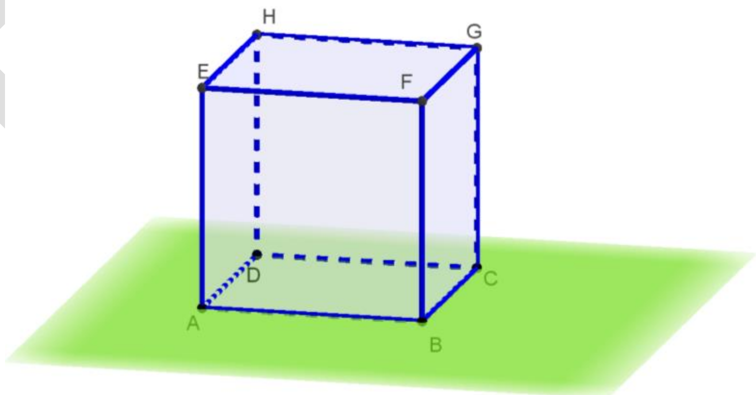


c) <u>**průnikem je celá rovina**</u>

- **roviny jsou splývající**

Definice 11.19: Roviny α, β jsou **incidentní** ($\alpha \equiv \beta$), tj. jsou **rovnoběžné totožné (splývající)** právě tehdy, když mají **nekonečně mnoho společných bodů.**

  - zvláštní případ rovnoběžnosti



4.6 Relace v geometrii na 1. stupni ZŠ

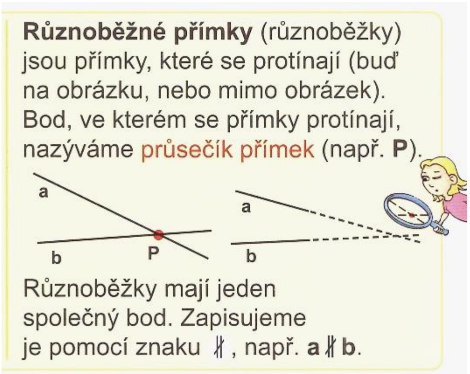
4.6.1 Zavedení pojmů

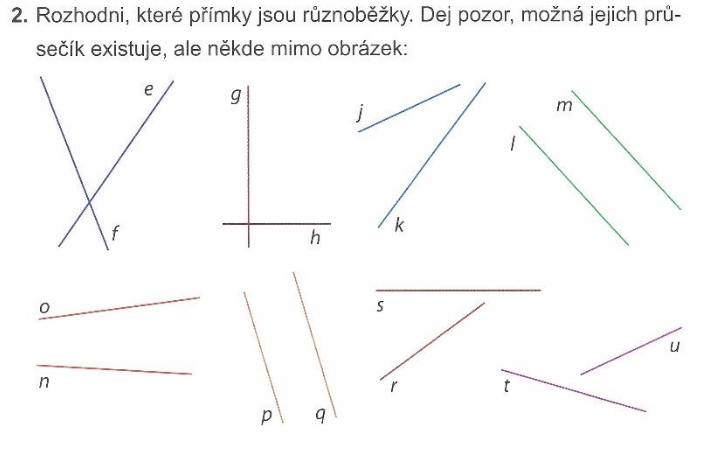
Zavedení geometrických pojmů a relací v geometrii v uvedených ročnících je pouze orientační, neboť je uvedeno dle vybraných učebnic/pracovních sešitů Matematiky pro 1. stupeň ZŠ:

1. **ročník** – rozeznávání a pojmenovávání geometrických útvarů (čtverec, kruh, trojúhelník, obdélník)
2. **ročník** – pojmy bod, úsečka, krajní body úsečky
3. **až 5. ročník** – pojmy polopřímka, počáteční bod polopřímky, opačné polopřímky, přímka, **různoběžky, shodnost úseček**, střed úsečky, délka úsečky, grafický součet a rozdíl úseček, …, **pravý úhel, rovnoběžky, kolmice**, rovnoběžník, pravoúhelník, …

Zavedení pojmu různoběžky:

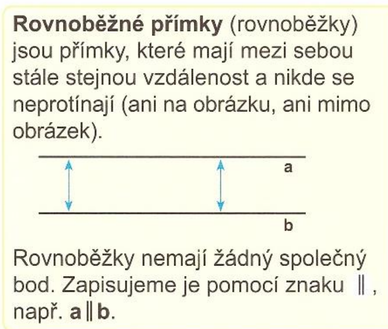
- různoběžky zavádíme jako přímky, které mají jeden společný bod (= průsečík)
- ukázka na dvou tužkách (nesvírají však pravý úhel)
- žáci vyhledávají různoběžky ve třídě, znázorňují je pomocí špejlí/plastových tyček
- rýsování pomocí jednoho pravítka -> sestrojení jedné přímky a následně druhé přímky a to takovým způsobem, aby měla s první přímkou právě jeden společný bod
- rýsování různoběžek daným bodem

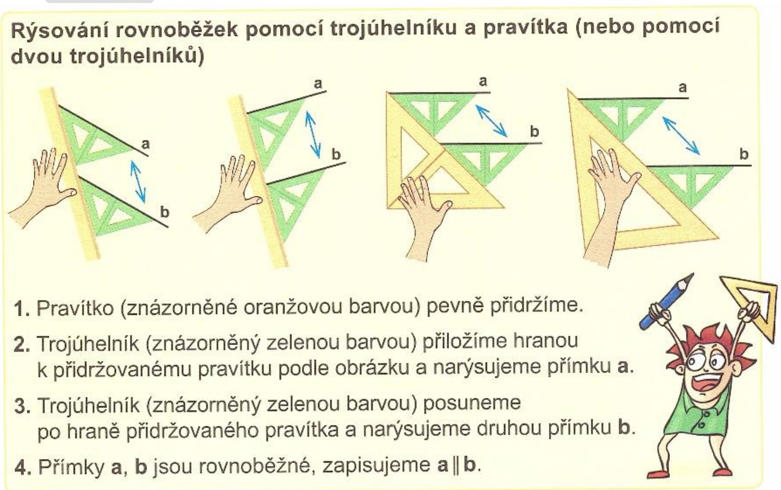




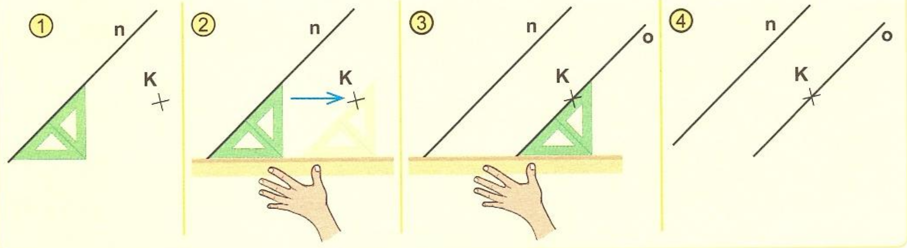
Zavedení pojmu rovnoběžky:

- rovnoběžky zavádíme jako přímky, které nemají žádný společný bod
- ukázka např. na čtverci (dokreslení přímek procházejících protějšími stranami čtverce), příklad z reálného života – tramvajové či vlakové koleje (pozor ale na zatáčky ☺)
- žáci vyhledávají rovnoběžky v okolí (př. protější hrany lavice, dveří, obrazů, protější strany učebnice, …)
- rýsování pomocí dvou pravítek (min. jeden trojúhelník s ryskou)





Narýsujeme přímku **o**, která je rovnoběžná s přímkou **n** a prochází bodem **K**.



Rýsování **přímky** procházející daným bodem a rovnoběžné s danou přímkou.
Rýsuj do sešitu podle programu (dobře si prohlédni i obrázek):

dáno ***p***

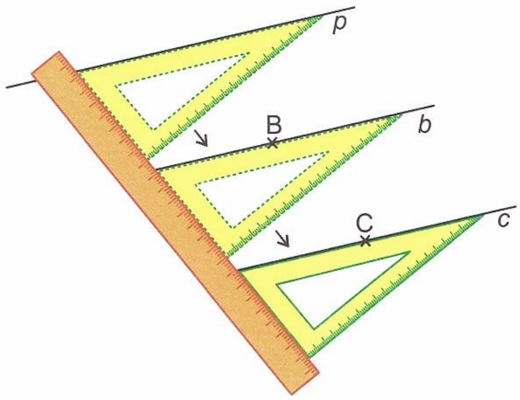
zvol **B**
B $\notin$ ***p***

narýsuj ***b***
B $\in$ ***b*** a ***b*** || ***p***

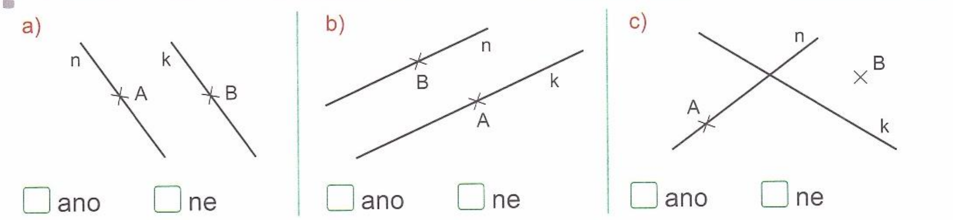
zvol **C**
C $\notin$ ***p*** a **C** $\notin$ ***b***

narýsuj ***c***
C $\in$ ***c*** a ***c*** || ***p***

ověř
b || ***c***



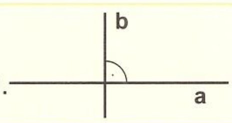
1 Rozhodněte, zda jsou na obrázku narýsované přímky **k ∥ n**, pro které platí **A** $\in$ **n**, **B** $\notin$ **n**.



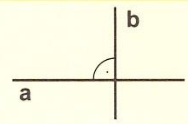
Zavedení pojmu kolmice:

- kolmice zavádíme jako přímky, které mají právě jeden společný bod a svírají spolu pravý úhel
- ukázka např. na čtverci, listu papíru, …
- žáci vyhledávají kolmice ve svém okolí
- rýsování pomocí trojúhelníku s ryskou -> libovolná přímka a k ní přiložit rysku pravítka -> kolmice
- nejdříve libovolné kolmice, později kolmice procházející daným bodem

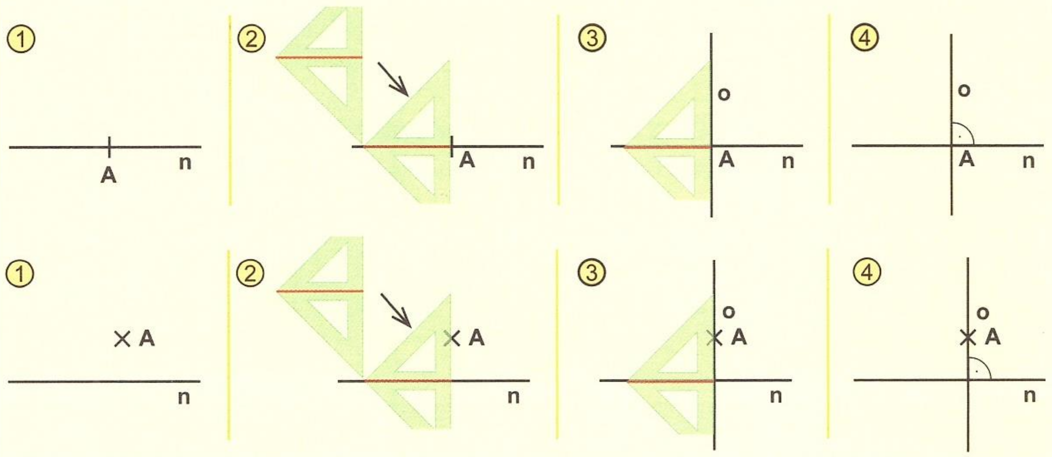
Přímky (různoběžky), které svírají pravý úhel, nazýváme **přímky kolmé** a zapisujeme je pomocí znaku ⊥, např. **a**⊥**b**.



Kolmice je přímka, která protíná jinou přímku a svírá s ní pravý úhel.



K přímce **n** narýsujeme kolmici **o**, která prochází bodem **A**.



Rýsování **kolmic** k dané přímce, které procházejí daným bodem.
Rýsuj do sešitu podle programu (dobře si prohlédni i obrázek):

dáno ***p***

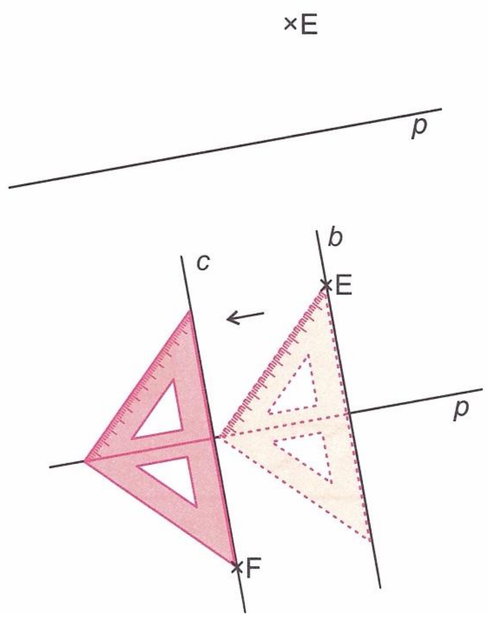
zvol **E**
$E \notin p$

narýsuj ***b***
$E \in b$ a $b \perp p$

zvol **F**
$F \notin p$ a $F \notin b$

narýsuj ***c***
$F \in c$ a $c \perp p$

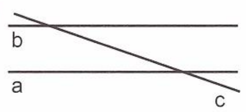
ověř
$b \parallel c$



Úlohy k procvičení vzájemných poloh přímek

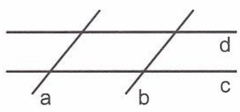
1 Rozhodněte, které zápisy jsou správné, a označte je křížkem.

a)



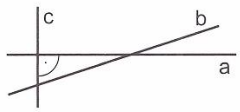
- ☐ $a \parallel b$, $a \nparallel c$
- ☐ $b \nparallel c$, $a \nparallel c$
- ☐ $b \parallel a$, $a \parallel b$

b)



- ☐ $a \parallel b$, $c \parallel d$
- ☐ $a \nparallel c$, $c \nparallel b$
- ☐ $a \parallel b$, $a \parallel c$

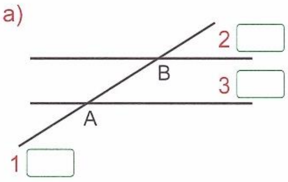
c)



- ☐ $a \perp c$, $a \nparallel b$
- ☐ $b \nparallel c$, $b \parallel a$
- ☐ $a \nparallel b$, $a \perp b$

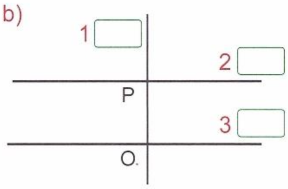
2 Popište přímky tak, aby byl zápis správný.

a)



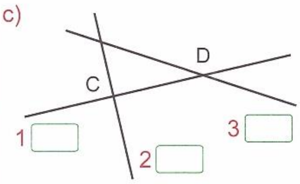
$a \parallel b$, $A \notin a$, $c \nparallel b$

b)



$k \perp n$, $m \parallel n$, $P \in n$

c)



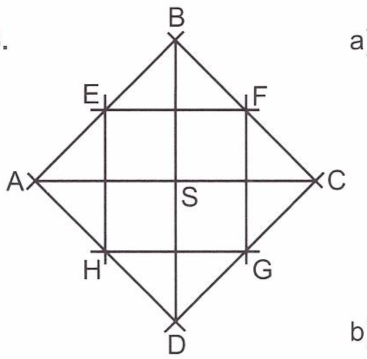
$r \perp t$, $C \notin s$, $D \in t$

3 Podle zadání rýsujte do sešitu.

Narýsujte přímky **a**, **b**, **c** tak, aby platilo $a \nparallel b$, $b \perp c$. Označte vzniklé průsečíky.

7. Narýsuj přímku **r**. Mimo tuto přímku zvol body A a B. Nejprve sestroj bodem A kolmici k přímce ***r***. Tuto kolmici pojmenuj ***s***. Pak sestroj bodem B kolmici k přímce ***s***. Tuto kolmici pojmenuj ***t***. Jaká je vzájemná poloha přímek ***r*** a ***t***?

8.



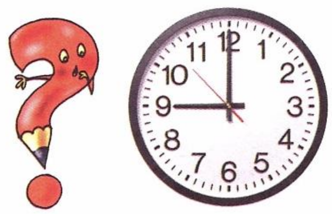
a) Pomocí symbolů ⊥ a II zapiš polohu přímek:

↔ AB	↔ DC	↔ SB	↔ SC
↔ BC	↔ AD	↔ BC	↔ AH
↔ EF	↔ FG	↔ DG	↔ EB
↔ AS	↔ BD	↔ SD	↔ HG
↔ EH	↔ AS	↔ EH	↔ FG

b) Najdi na obrázku příklady různoběžek.

9. Ve své třídě najdi 4 příklady využití:

a) kolmosti přímek,
b) rovnoběžnosti přímek,
c) různoběžnosti přímek.



10. V kolik hodin jsou na sebe ručičky na ciferníku kolmé?

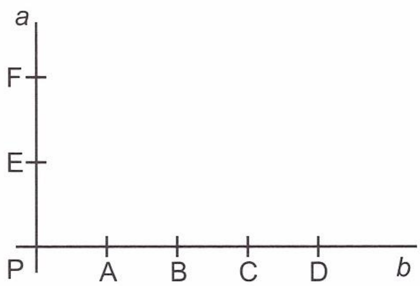
11. Narýsuj přímku ***p*** a na ní zvol různé body A a B. Oběma body veď kolmice k přímce ***p***. Na závěr sestroj libovolnou rovnoběžku s přímkou ***p***, která protíná narýsované kolmice. Jak se jmenuje geometrický útvar, který vznikl?

12. Narýsuj přímku ***r*** a k ní sestroj kolmici ***s***. Na přímce ***r*** zvol body A a B.

a) Body A a B veď kolmice k přímce ***r***.
b) Body A a B veď rovnoběžky s přímkou ***s***. Co jsi zjistil(a)?

13. Do sešitu si narýsuj podle obrázku v učebnici dvě navzájem kolmé přímky ***a***, ***b*** a na nich vyznač body A, B, C, D, E, F.

a) Body A, B, C, D veď kolmice k přímce ***b***.
b) Body E a F veď rovnoběžky s přímkou ***b***.
c) Jaká je vzájemná poloha všech kolmic vedených k přímce ***b***?



Použité zdroje:

- https://cs.wikipedia.org/wiki/Podobnost_(geometrie)
- Novotný, M. – Novák, F.: *Geometrie pro 4. ročník – Matýskova matematika*. Nová škola, s.r.o., Brno 2017. ISBN 978-80-7289-959-3
- Čížková, M.: *Matematika pro 3. ročník základní školy*. SPN, Praha 2015. ISBN 978-80-7235-564-8
- Eiblová, L. – Melichar, J. – Šestáková, M.: *Matematika pro 4. ročník základní školy*. SPN, Praha 2017. ISBN 978-80-7235-599-0
- Vacková, I. – Fajfrlíková, L. – Uzlová, Z.: *Matematika pro 5. ročník základní školy*. SPN, Praha 2016. ISBN 978-80-7235-575-4
- Kouřim, J. a kol.: *Základy elementární geometrie pro učitelství 1. stupně ZŠ*. SPN, Praha 1985.