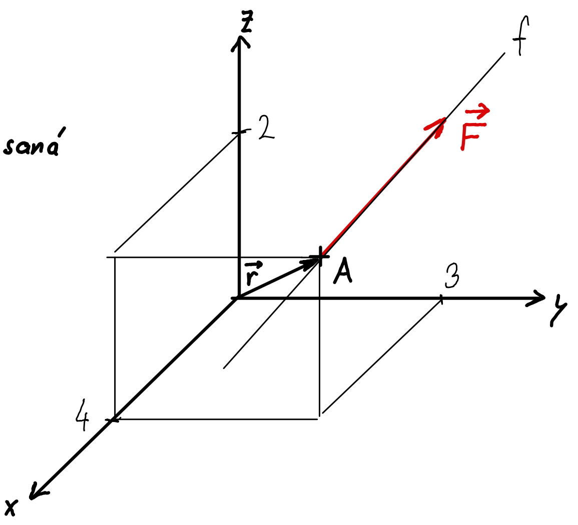
autor: Martin Hermann

STATIKA

malá cvičebnice (v1)

Obsah

1.1. Moment síly k souřadnicovým osám



Dáno: • $|\vec{F}| = 50\ N$, působiště síly $A = [4,3,2]\ m$
• směr je dán nositelkou síly $\vec{F}$, která je popsaná směrovými úhly $\alpha_f = 60°$, $\beta_f = 40°$, $\gamma_f < 90°$

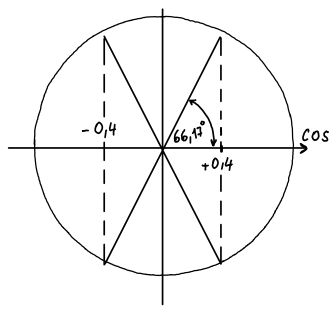
Určit: • moment síly k souř. osám x, y, z
• moment síly k ose o (osa zadaná později)

1) Dopočítáme úhel γ_f

pro směrové cosiny platí: $\boxed{\cos^2\alpha_f + \cos^2\beta_f + \cos^2\gamma_f = 1}$

z toho odvodíme $\cos\gamma_f = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha_f - \cos^2\beta_f}$

$\cos\gamma_f = \pm\ 0{,}4040$



Při pohledu na jednotkovou kružnici zjistíme, že je zde více úhlů, pro které platí $\cos = \pm 0{,}4$.
Pokud zadáno • $\gamma_f < 90°$, $\cos(\gamma_f) = +$ hodnota
• $\gamma_f > 90°$, $\cos(\gamma_f) = -$ hodnota

$\gamma_f < 90° \rightarrow \cos\gamma_f = +0{,}404 \rightarrow \gamma_f = \underline{\underline{66{,}17°}}$

2) Složky síly $\vec{F}$

Nyní známe všechny směrové úhly nositelky f.
Cosiny směrových úhlů odpovídají složkám jednotkového vektoru ve směru nositelky f.

$\vec{f^0} = (\cos\alpha_f,\ \cos\beta_f,\ \cos\gamma_f)$

Vektor síly $\vec{F}$ je poté roven: $\boxed{\vec{F} = |\vec{F}| . \vec{f^0}}$

$\vec{F} = |\vec{F}| . (\cos\alpha_f,\ \cos\beta_f,\ \cos\gamma_f)$

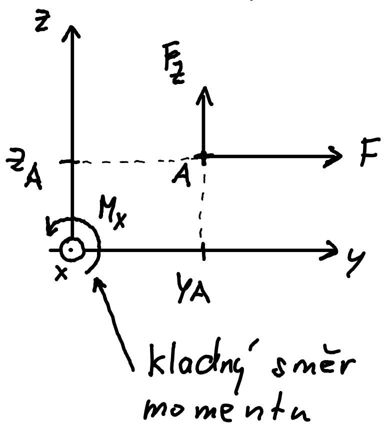
Složky síly: $F_x = |\vec{F}| . \cos\alpha_f = 50 . \cos(60°) = \underline{\underline{25\ N}}$

$F_y = |\vec{F}| . \cos\beta_f = 50 . \cos(40°) = \underline{\underline{38{,}3\ N}}$

$F_z = |\vec{F}| . \cos\gamma_f = 50 . \cos(66{,}17°) = \underline{\underline{20{,}2\ N}}$

3) Moment síly k osám x, y, z

Začněme u osy x. Složka F_x je rovnoběžná s osou, nevytváří tedy moment k ose x. Moment vytváří pouze složky F_y, F_z. Zde pomůže pohled na rovinu yz.



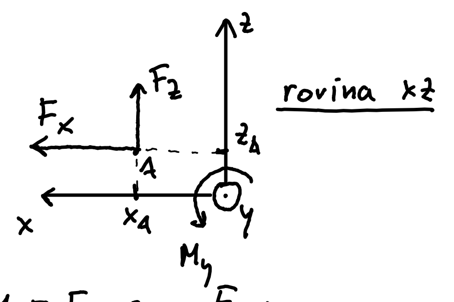
$A = [x_A, y_A, z_A] = [4, 3, 2]$

$M_x = F_z . y_A - F_y . z_A$

$M_x = 20{,}2 . 3 - 38{,}3 . 2 = \underline{\underline{-16\ Nm}}$

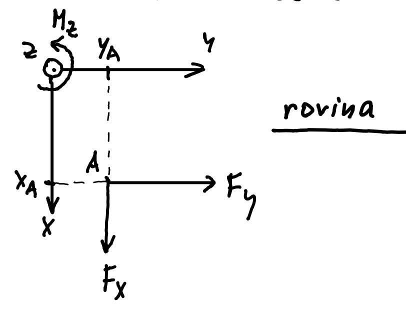
Stejným způsobem spočítáme zbývající momenty.

Moment k ose y:



$M_y = F_x . z_A - F_z . x_A$
$M_y = 25 . 2 - 20{,}2 . 4 = \underline{\underline{-30{,}8\ Nm}}$

Moment k ose z:



$M_z = F_y . x_A - F_x . y_A$
$M_z = 38{,}3 . 4 - 25 . 3 = \underline{\underline{78{,}2\ Nm}}$

Tento postup je názorný, ale zdlouhavý a pracný. Ke stejnému výsledku lze dojít pomocí vztahu pro výpočet momentu síly:

$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$ vektor $\vec{r} = (x_A, y_A, z_A)$ začíná v počátku souř. sys. a končí v bodě A. Tímto vztahem tedy spočítáme vektor momentu síly k počátku. Počátkem prochází osy x, y, z a tedy složky momentu budou momenty k osám x, y, z.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}(y_A F_z - z_A F_y) - \vec{j}(x_A F_z - z_A F_x) + \vec{k}(x_A F_y - y_A F_x) = \dots$$

$$\dots = (-16{,}6\,\vec{i} - 30\,\vec{j} + 78{,}2\,\vec{k})\ Nm$$

$$\rightarrow \vec{M} = (-16;\ -30{,}8;\ 78{,}2)\ Nm$$

(porovnejte s dříve vypočítanými složkami M_x, M_y, M_z)

4) Moment síly k ose σ

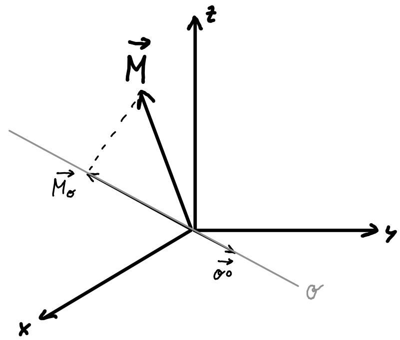
Osa σ prochází počátkem souř. systému a je určená směrovými úhly: $\alpha_\sigma = 50°$, $\beta_\sigma = 45°$, $\gamma_\sigma > 90°$.

$$\cos\gamma_\sigma = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha_\sigma - \cos^2\beta_\sigma} = \pm\, 0{,}2947$$

$$\gamma_\sigma > 90° \longrightarrow \gamma_\sigma = \underline{\underline{107{,}14}}\,°$$

Jednotkový vektor ve směru osy σ:

$$\vec{\sigma^o} = (\cos\alpha_\sigma, \cos\beta_\sigma, \cos\gamma_\sigma)$$



Průmět momentu $\vec{M}$ do směru $\vec{\sigma^o}$:

$$|\vec{M_\sigma}| = \vec{M}.\vec{\sigma^o} = (M_x, M_y, M_z).(\cos\alpha_\sigma, \cos\beta_\sigma, \cos\gamma_\sigma) = \underline{\underline{-55{,}11 \text{ Nm}}}$$

Skalárním součinem jsme získali <u>velikost</u> momentu. Vektor momentu $\vec{M_\sigma}$ získáme vynásobením velikosti a jednotkového vektoru:

$$\vec{M_\sigma} = |\vec{M_\sigma}|.\vec{\sigma^o} = -55{,}11\,.(\cos\alpha_\sigma, \cos\beta_\sigma, \cos\gamma_\sigma) =$$

$$\underline{\underline{\vec{M_\sigma} = (-35{,}4\ ;\ -38{,}9\ ;\ 16{,}2) \text{ Nm}}}$$

Vzorec pro vektor momentu síly k ose σ:

$$\boxed{\vec{M_\sigma} = (\vec{M}.\vec{\sigma^o}).\vec{\sigma^o}}$$

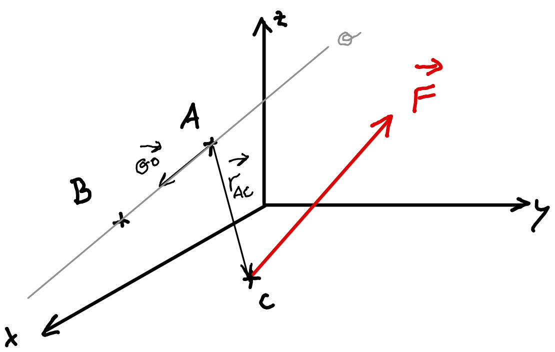
1.2. Moment síly k libovolné ose

Dáno: $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (20, 15, 40)$

síla působí v bodě $C = [5, 2, 1]$ m

osa o je určená dvěma body A, B

$A = [2, 1, 4]$ m, $B = [4, 0, 3]$ m



1) Vektor $\vec{r}_{AC}$: $\vec{r}_{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) =$

$\vec{r}_{AC} = (3, 1, -3)$ m

2) Vektor $\vec{r}_{AB}$: $\vec{r}_{AB} = (2, -1, -1)$ m

3) Velikost $|\vec{r}_{AB}|$: $|\vec{r}_{AB}| = \sqrt{\vec{r}_{AB} \cdot \vec{r}_{AB}} = 4{,}34$ m

4) Jednotkový vektor $\vec{o}^{\,o}$:

$$\vec{o}^{\,o} = \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|} = \frac{(2, -1, -1)}{4{,}34} = (0{,}82\ ;\ -0{,}41\ ;\ -0{,}41)\,\text{m}$$

5) Moment síly $\vec{F}$ k bodu A:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F} = (85\ ;\ -180\ ;\ 25)\ \text{Nm}$$

6) Průmět $\vec{M}_A$ do směru $\vec{o}^{\,o}$:

$$|\vec{M}_o| = \vec{M}_A \cdot \vec{o}^{\,o} = 132{,}68\ \text{Nm}$$

7) Vektor momentu síly k ose o:

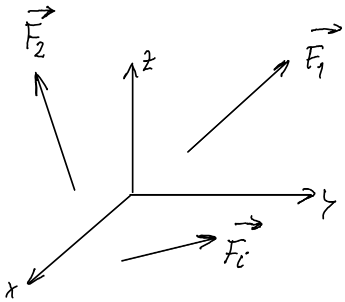
$$\vec{M}_o = |\vec{M}_o| \cdot \vec{o}^{\,o} = \underline{\underline{(108{,}3\ ;\ -54{,}2\ ;\ -54{,}2)\ \text{Nm}}}$$

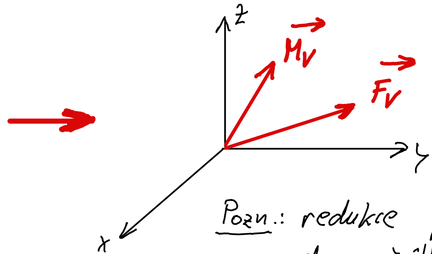
Pozn.: krok 5) a 6) se dá nahradit smíšeným součinem:

$$|\vec{M}_o| = \vec{o}^{\,o} \cdot (\vec{r}_{AC} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \cos\alpha_o & \cos\beta_o & \cos\gamma_o \\ 3 & 1 & -3 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 132{,}68\,\text{Nm}$$

2.1. Redukční pár, silový šroub, silový kříž (teorie)

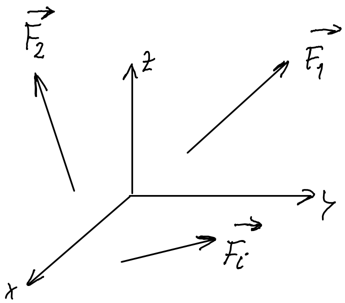
Redukční pár – soustavu sil v prostoru nahradím $\underbrace{\text{výslednou silou } \vec{F_V} \text{ a výsledným momentem } \vec{M_V}}_{\text{redukční pár}}$.

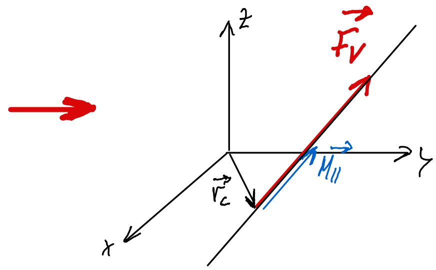




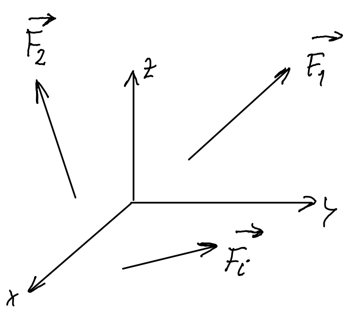
Pozn.: redukce provedena do počátku

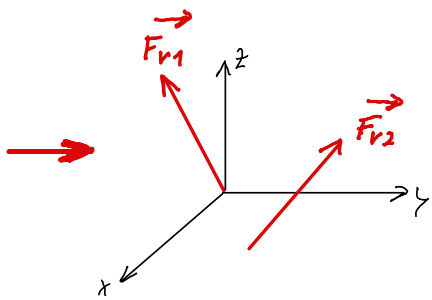
Silový šroub – soustavu sil v prostoru nahradím výslednou silou $\vec{F_V}$ umístěnou do působiště $\vec{r_c}$ a momentem $\vec{M_{\parallel}}$, který je rovnoběžný s $\vec{F_V}$.





Silový kříž – soustavu sil v prostoru nahradím dvěma mimoběžnými silami, je nekonečně mnoho řešení

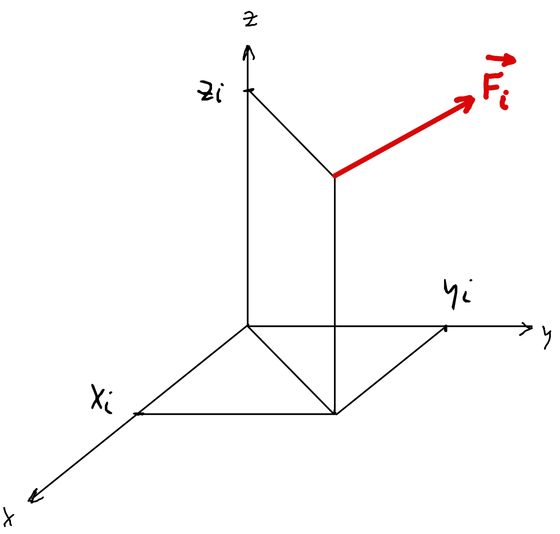




2.2. Nahrazení redukčním párem a silovým šroubem

Soustava sil definovaná tabulkou:

i	F_x (N)	F_y (N)	F_z (N)	x (m)	y (m)	z (m)
1	100	−120	−85	1,2	−0,8	−0,2
2	0	110	60	0,9	0,9	−1
3	−50	70	−30	−0,6	1,1	0,4
4	−30	−20	120	−1	−0,5	−0,2



Nahrazení redukčním párem

$$\vec{F_V} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F_i} \quad (3 \text{ rovnice})$$

$\hookrightarrow F_{Vx} = \sum_{i=1}^{4} F_{ix} = 100 + 0 - 50 - 30 = \underline{30\ N}$

$\hookrightarrow F_{Vy} = \sum_{i=1}^{4} F_{iy} = -120 + 110 + 70 - 20 = \underline{40\ N}$

$\hookrightarrow F_{Vz} = \sum_{i=1}^{4} F_{iz} = -85 + 60 - 30 + 120 = \underline{65\ N}$

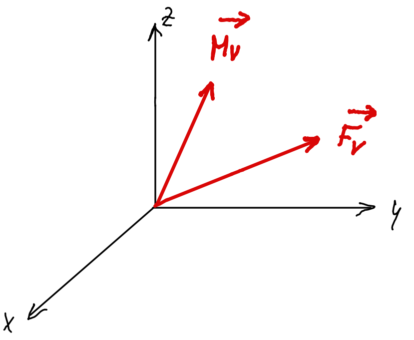
$\vec{F_V} = (30, 40, 65)\ N$

$$\vec{M_V} = \sum_{i=1}^{4} \vec{M_i} = \sum_{i=1}^{4} (\vec{r_i} \times \vec{F_i})$$

Pozn.: $\vec{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$
$\vec{F_i} = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$

$\vec{M_1} = (44, 82, -64)\ Nm$
$\vec{M_2} = (164, -54, 99)\ Nm$
$\vec{M_3} = (-61, -38, 13)\ Nm$
$\vec{M_4} = (-64, 126, 5)\ Nm$

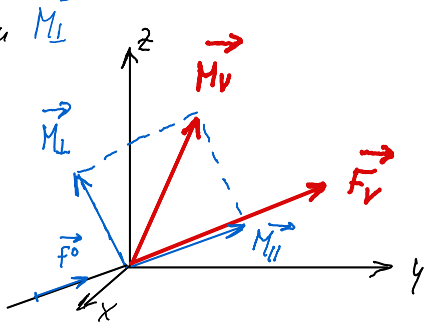
$\vec{M_V} = (83, 116, 53)\ Nm$



$\vec{F_V}, \vec{M_V}$ ... redukční pár

Nahrazení silovým křížem

Rozložíme $\vec{M_V}$ na kolmou složku $\vec{M_\perp}$ a rovnoběžnou složku $\vec{M_\parallel}$.



$$\vec{M_V} = \vec{M_\perp} + \vec{M_\parallel}$$

$\vec{f^o} = \frac{\vec{F_V}}{|\vec{F_V}|} = \frac{(20, 40, 65)}{78,9} = (0,25\ ;\ 0,51\ ;\ 0,82)$

$|\vec{M_\parallel}| = \vec{M_V} \cdot \vec{f^o} = 123,5\ Nm$

$\vec{M_\parallel} = (\vec{M_V} \cdot \vec{f^o}) \cdot \vec{f^o} = |\vec{M_\parallel}| \cdot \vec{f^o} = (31,31\ ;\ 62,62\ ;\ 101,76)\ Nm$

$\vec{M_\perp} = \vec{M_V} - \vec{M_\parallel} = (51,69\ ;\ 53,38\ ;\ -48,76)\ Nm$

$|\vec{M_\perp}| = 88,87\ Nm$

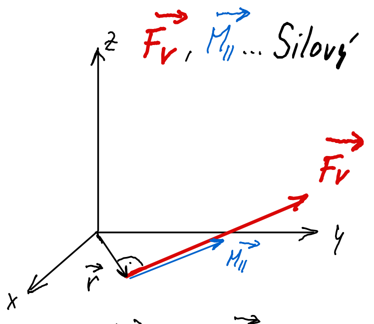
Posuneme $\vec{F_V}$ do nového působiště, aby $\vec{r_c} \times \vec{F_V} = \vec{M_\perp}$.
Zbývá dopočítat vektor $\vec{r_c}$.

$\vec{M_\perp} = \vec{r_c} \times \vec{F_V}$

$\vec{M_V} - \vec{M_\parallel} = \vec{r_c} \times \vec{F_V} \quad / \vec{F_V} \times$

$\vec{F_V} \times \vec{M_V} - \underbrace{\vec{F_V} \times \vec{M_\parallel}}_{\vec{F_V} \parallel \vec{M_\parallel} \ \rightarrow\ \vec{F_V} \times \vec{M_\parallel} = \vec{0}} = \vec{F_V} \times (\vec{r_c} \times \vec{F_V})$

$\vec{F_V}, \vec{M_\parallel}$ ... Silový šroub



$\vec{M_\perp} = \vec{r_c} \times \vec{F_V}$

vzorec:
$\left(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})\right)$

$\vec{F_V} \times (\vec{r_c} \times \vec{F_V}) = \vec{r_c}(|\vec{F_V}|^2) - \vec{F_V}(\vec{F_V} \cdot \vec{r_c}) \quad \vec{F_V} \perp \vec{r_c} \ \rightarrow\ \vec{F_V} \cdot \vec{r_c} = 0$

$\vec{F_V} \times \vec{M_V} = \vec{r_c} \cdot |\vec{F_V}|^2 \ \rightarrow\ \vec{r_c} = \frac{\vec{F_V} \times \vec{M_V}}{|\vec{F_V}|^2} = (-0,87\ ;\ 0,7\ ;\ -0,16)\ m$

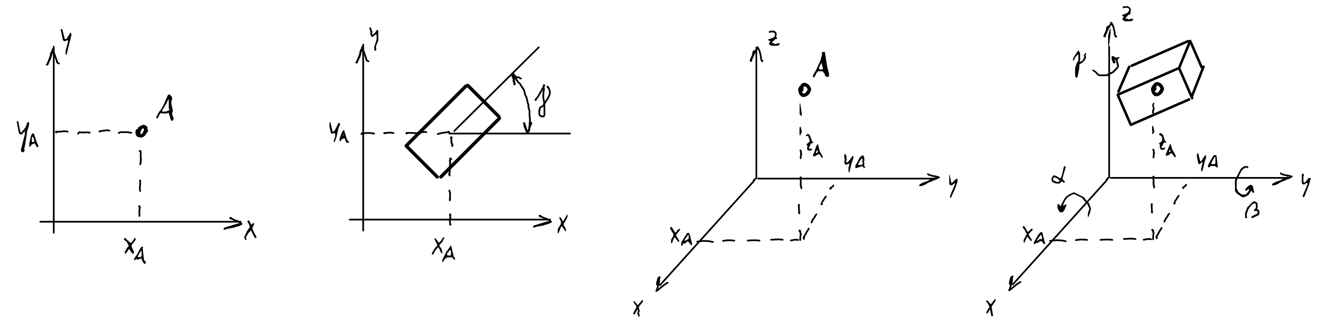
3.1. Stupně volnosti a přehled vazeb

Stupně volnosti

i... počet stupňů volnosti
m... počet odebraných stupňů volnosti

Počet stupňů volnosti pro:

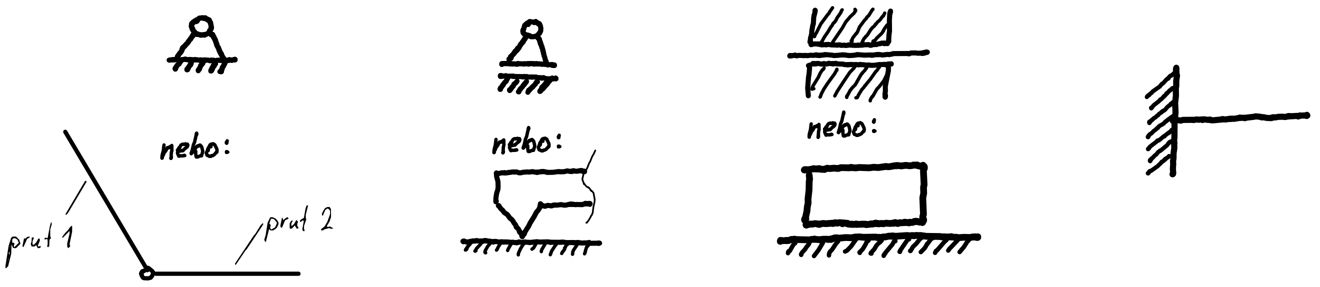
a) bod 2D   b) těleso 2D   c) bod 3D   d) těleso 3D



$\boxed{i = 2}$ $\boxed{i = 3}$ $\boxed{i = 3}$ $\boxed{i = 6}$

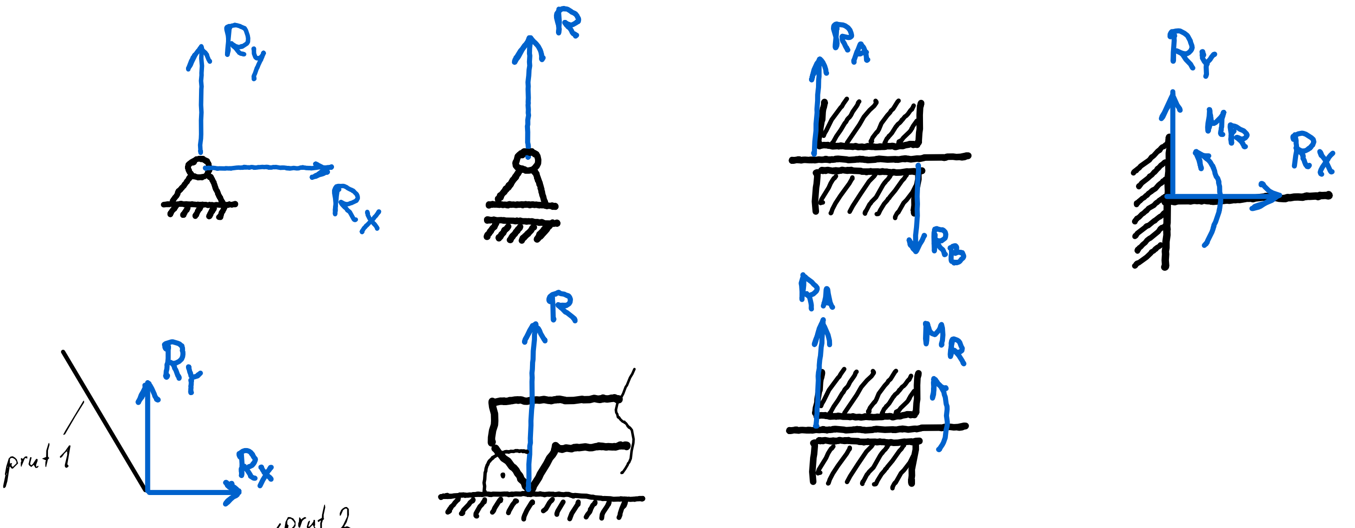
Typy vazeb (2D)

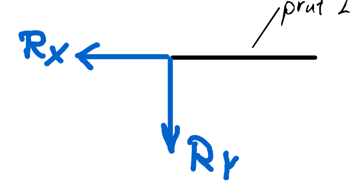
Rotační   Obecná   Posuvná   Pevná (vetknutí)



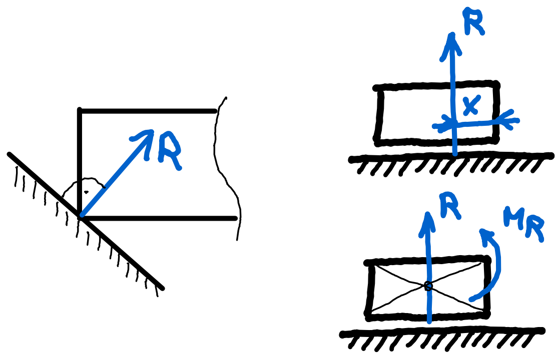
$\boxed{m = 2}$ $\boxed{m = 1}$ $\boxed{m = 2}$ $\boxed{m = 3}$

Počet odebraných stupňů volnosti odpovídá počtu reakcí, které musíme zavést při uvolnění:





- dbáme na akci a reakci

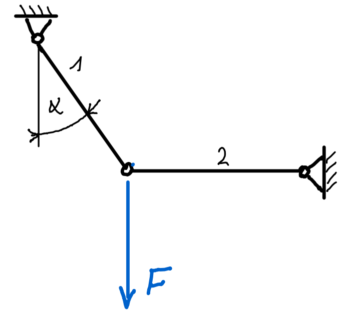


- reakce je na <u>neznámém</u> působišti x

- reakce působí v námi zvoleném místě a je přidán M_R

Posuvná vazba jde uvolnit více ekvivalentními způsoby.

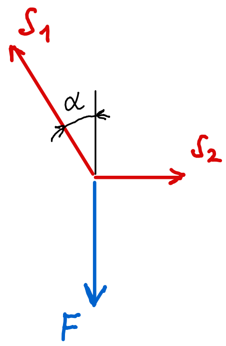
4.1. Styčník 1

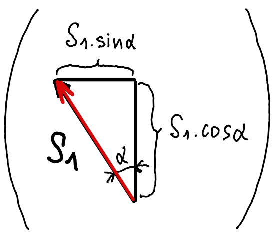


Dáno: F, α

Určit: síly v prutech 1,2

Uvolnění styčníku:





Rovnice rovnováhy:

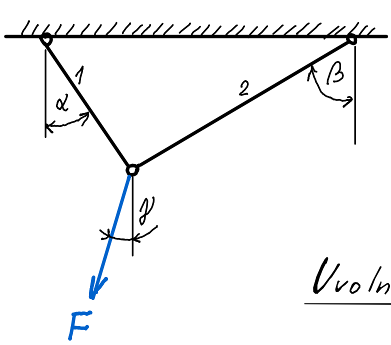
$$(x): \quad -S_1 . \sin\alpha + S_2 = 0 \qquad (1)$$

$$(y): \quad S_1 . \cos\alpha - F = 0 \qquad (2)$$

$$(2) \rightarrow \quad S_1 = \frac{F}{\cos\alpha}$$

$$(1) \rightarrow \quad S_2 = S_1 . \sin\alpha = \frac{F}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = F . \operatorname{tg}\alpha$$

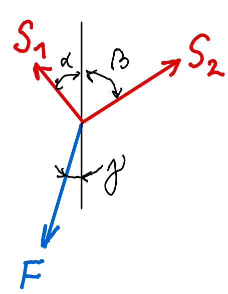
4.2. Styčník 2



Dáno: F, α, β, γ

Určit: síly v prutech 1, 2

Uvolnění styčníku:



Rovnice rovnováhy:

$$(x): \quad -S_1 . \sin\alpha - F . \sin\gamma + S_2 . \sin\beta = 0 \qquad / . \cos\beta \qquad (1)$$

$$(y): \quad S_1 . \cos\alpha + S_2 . \cos\beta - F . \cos\gamma = 0 \qquad / . \sin\beta \qquad (2)$$

$$-S_1 \sin\alpha . \cos\beta - F \sin\gamma . \cos\beta + S_2 \sin\beta \cos\beta = 0 \qquad (3)$$

$$S_1 \cos\alpha \sin\beta + S_2 \cos\beta \sin\beta - F \cos\gamma \sin\beta = 0 \qquad (4)$$

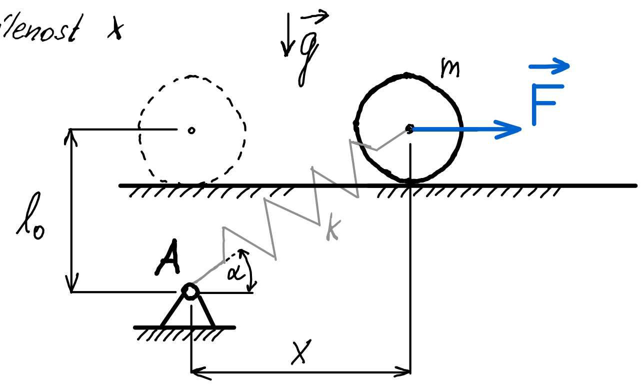
$$(4)-(3) \quad S_1 \cos\alpha \sin\beta + S_1 \sin\alpha \cos\beta - F \cos\gamma \sin\beta + F \sin\gamma \cos\beta = 0 \qquad (5)$$

$$(5) \rightarrow S_1 = \frac{F(\cos\gamma \sin\beta - \sin\gamma \cos\beta)}{\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta}$$

$$(2) \rightarrow S_2 = \frac{F\cos\gamma - S_1 \cos\alpha}{\cos\beta}$$

4.3. Bod na pružině

Kulové těleso v gravitačním poli na pružině je z rovnovážné polohy posunuto o vzdálenost x silou $\vec{F}$.



Dáno: - tuhost pružiny k (N/m)
- volná délka pružiny l_0 (m)
- gravitační zrychlení $\vec{g}$ $\left(\frac{m}{s^2}\right)$
- hmotnost tělesa m (kg)

Určit: a) síla od pružiny $\vec{F_p}$
b) uvolnění tělesa, výpočet reakce od podložky $\vec{N}$ jako funkce posunutí x
c) sílu $\vec{F}$ jako funkce posunutí x
d) reakce v rotační vazbě A

Pozn.:
$\vec{N} = (0, N)$
$\vec{F} = (F, 0)$

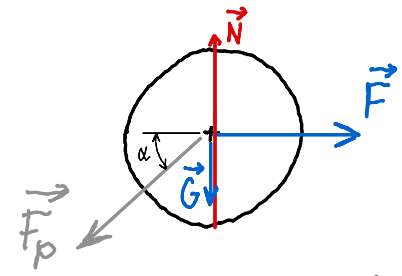
a) síla od pružiny $F_p = |\vec{F_p}| = k \cdot \Delta l$

aktuální délka pružiny $l = \sqrt{x^2 + l_0^2}$

změna délky $\Delta l = l - l_0 = \sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0$

$$\boxed{F_p = k \cdot \Delta l = k \cdot \left(\sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0\right)}$$

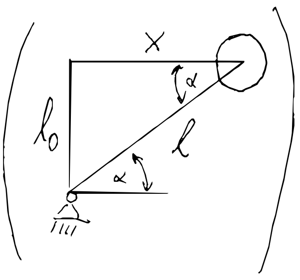
b) uvolnění tělesa – všechny nositelky sil prochází těžištěm, můžeme těleso nahradit hmotným bodem



$(\sum F_x = 0): \quad F - F_p \cdot \cos\alpha = 0 \qquad (1)$

$(\sum F_y = 0): \quad N - G - F_p \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (2)$

Reakci od podložky $N = |\vec{N}|$ spočítáme přímo z rovnice (2):



$(2) \rightarrow \quad N = G + F_p \cdot \sin\alpha$

Za $G, F_p, \sin\alpha$ dosadíme:

$G = m \cdot g$

$F_p = k \cdot \left(\sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0\right)$

$\sin\alpha = \frac{l_0}{l} = \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + l_0^2}}$

$$\boxed{N(x) = mg + k \cdot \left(\sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0\right) \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + l_0^2}}}$$

c) Sílu $F = |\vec{F}|$ spočítáme z rovnice (1):

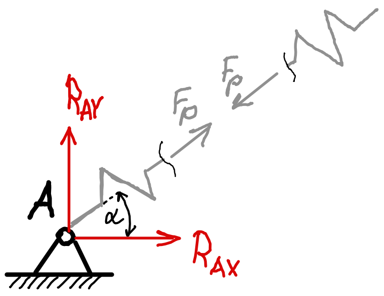
$(1) \rightarrow \quad F = F_p \cdot \cos\alpha$

Za $\cos\alpha$ dosadíme:

$\cos\alpha = \frac{x}{l} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l_0^2}}$

$$\boxed{F(x) = k \cdot \left(\sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0\right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + l_0^2}}}$$

d) reakce v rotační vazbě A závisí pouze na síle v pružině F_p a úhlu α:



Rovnice rovnováhy:

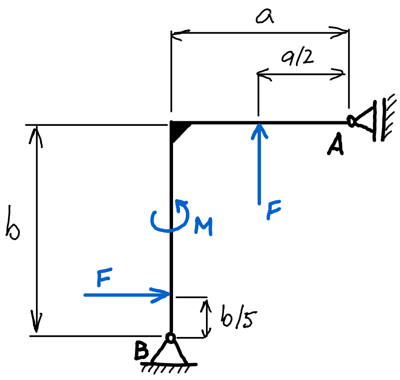
$(x): \quad F_p \cdot \cos\alpha + R_{Ax} = 0 \qquad (3)$

$(y): \quad R_{Ay} + F_p \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (4)$

$(3) \rightarrow \quad \boxed{R_{Ax} = -F_p \cdot \cos\alpha}$

$(4) \rightarrow \quad \boxed{R_{Ay} = -F_p \cdot \sin\alpha}$

5.1. Těleso tvaru L

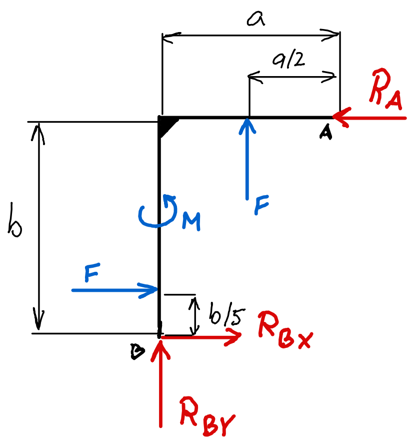


Dáno: a, b, F, M

Určit: reakce v podporách A, B

Pozn.: moment je tzv. „volný" vektor, tzn. označení ↺M symbolizující moment síly můžeme do zadání nakreslit na libovolné místo, všimněme si, že v momentové rovnici (3) se jeho poloha nijak neprojevuje, pouze jeho směr otáčení.

Uvolnění tělesa:



Rovnice rovnováhy:

$$(x):\quad R_{Bx} + F - R_A = 0 \qquad (1)$$

$$(y):\quad R_{BY} + F = 0 \qquad (2)$$

$$(\overset{+}{\curvearrowleft} M_B):\quad -F\cdot b/5 + M + F\cdot a/2 + R_A\cdot b = 0 \qquad (3)$$

$$(2) \rightarrow \boxed{R_{BY} = -F}$$

$$(3) \rightarrow \boxed{R_A = \frac{F\cdot b/5 - M - F\cdot a/2}{b}}$$

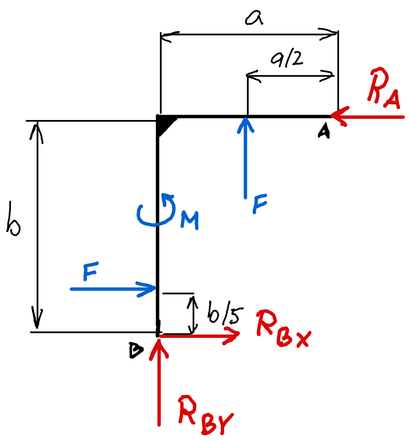
$$(1) \rightarrow R_{Bx} = R_A - F$$

dosadíme za R_A:

$$R_{Bx} = R_A - F = \frac{F\cdot b/5 - M - F\cdot a/2}{b} - \frac{F\cdot b}{b} = \frac{-\frac{4}{5}Fb - M - \frac{1}{2}Fa}{b}$$

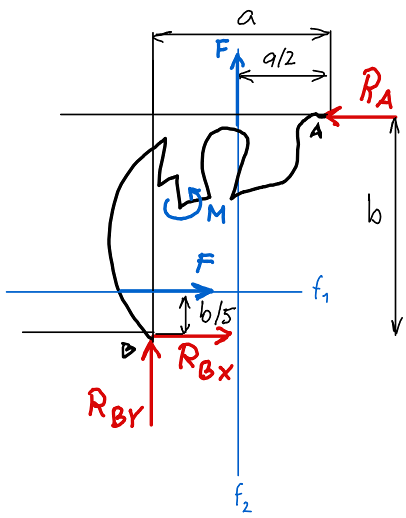
$$\boxed{R_{Bx} = \frac{-\frac{4}{5}Fb - M - \frac{1}{2}Fa}{b}}$$

Pozn. ke geometrii tělesa: pokud síly zůstanou na svých nositelkách, můžeme libovolně změnit tvar tělesa a reakce zůstanou stejné.

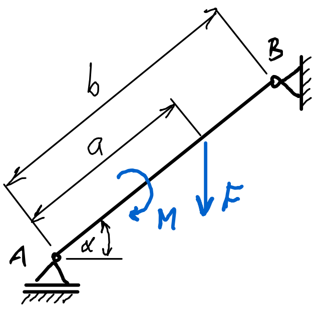


=

(stejné reakce)



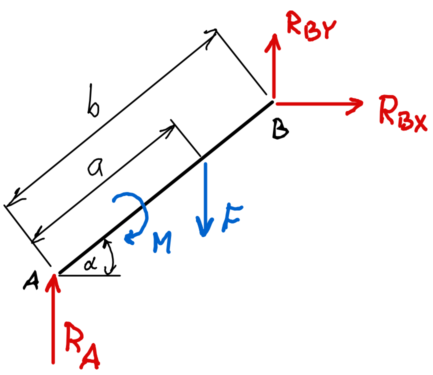
5.2. Nakloněný nosník



<u>Dáno</u>: a, b, F, M, α

<u>Určit</u>: reakce v podporách A, B

<u>Uvolnění tělesa</u>:



<u>Rovnice rovnováhy</u>:

$$(x):\quad \boxed{R_{Bx} = 0} \qquad (1)$$

$$(y):\quad R_A - F + R_{BY} = 0 \qquad (2)$$

$$(\overset{\curvearrowleft +}{M_B}):\quad F.\underbrace{(b-a).\cos\alpha}_{*} - M - R_A.b.\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$(3) \rightarrow \boxed{R_A = \frac{F.(b-a).\cos\alpha - M}{b.\cos\alpha}}$$

$$(2) \rightarrow \quad R_{BY} = F - R_A$$

$$R_{BY} = \frac{F.b.\cos\alpha - F(b-a)\cos\alpha + M}{b.\cos\alpha} = \frac{F.\cos\alpha\,(b-(b-a)) + M}{b.\cos\alpha} =$$

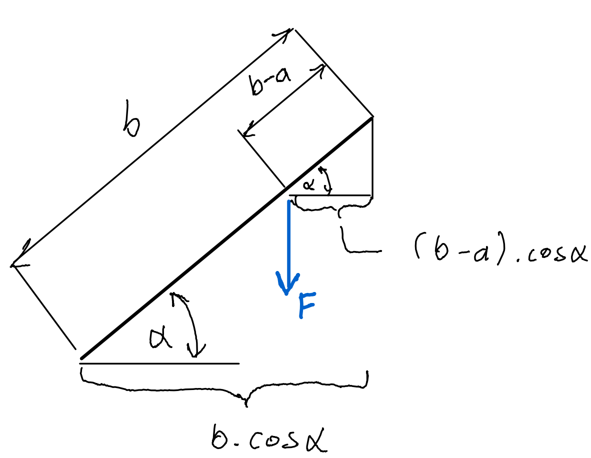
$$\boxed{R_{BY} = \frac{F.\cos\alpha.a + M}{b.\cos\alpha}}$$

Pro procvičení (nebo kontrolu!) zkusme vypočítat reakci R_{BY} z momentové rovnice pro bod A, když z rovnice (1) víme, že $R_{Bx} = 0$:

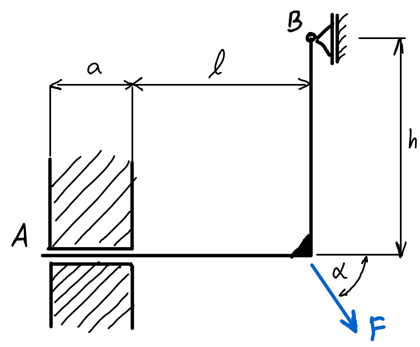
$$(\overset{\curvearrowleft +}{M_A}):\quad -F.a.\cos\alpha - M + R_{BY}.b.\cos\alpha = 0 \qquad (4)$$

$$(4) \rightarrow \quad R_{BY} = \frac{F.a.\cos\alpha + M}{b.\cos\alpha}$$

*



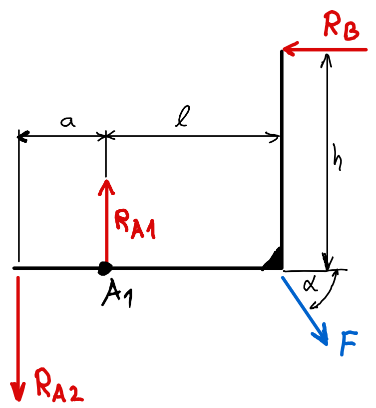
5.3. Těleso s posuvnou vazbou



Dáno: F, a, ℓ, h, α

Určit: reakce v podporách A, B

Uvolnění tělesa:



Rovnice rovnováhy:

$(x): \; -R_B + F.\cos\alpha = 0$ (1)

$(y): \; R_{A1} - R_{A2} - F.\sin\alpha = 0$ (2)

$(M_{A1}): \; R_B.h + R_{A2}.a - F\sin\alpha.\ell = 0$ (3)

---

3 rovnice, 3 neznámé: R_{A1}, R_{A2}, R_B

$(1) \rightarrow \boxed{R_B = F.\cos\alpha}$

$(3) \rightarrow \; R_{A2} = \dfrac{F.\sin\alpha.\ell - R_B.h}{a}$

dosadíme za R_B: $\boxed{R_{A2} = \dfrac{F.\sin\alpha.\ell - F.\cos\alpha.h}{a}}$

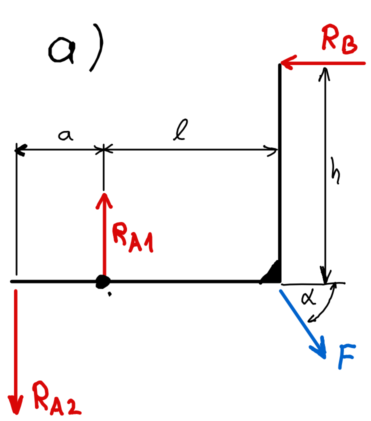
$(2) \rightarrow \; R_{A1} = F.\sin\alpha + R_{A2}$

dosadíme za R_{A2}: $R_{A1} = F\sin\alpha + \dfrac{F\sin\alpha\,\ell - F\cos\alpha\,h}{a} =$

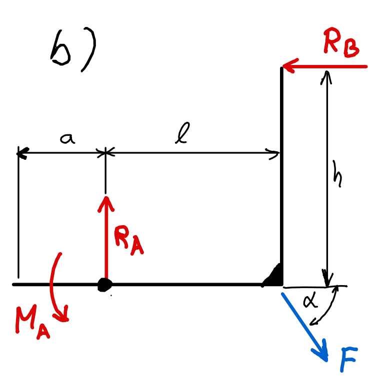
$$\boxed{R_{A1} = \frac{F\sin\alpha\,(a+\ell) - F.\cos\alpha\,h}{a}}$$

Poznámka k uvolnění tělesa: posuvná vazba se dá uvolnit více ekvivalentními způsoby:

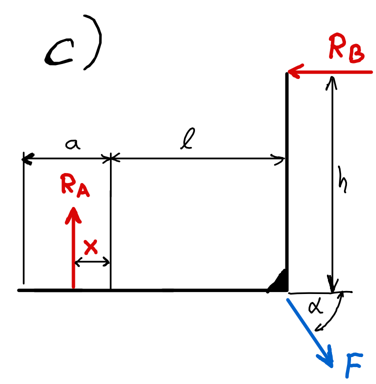
a)



b)

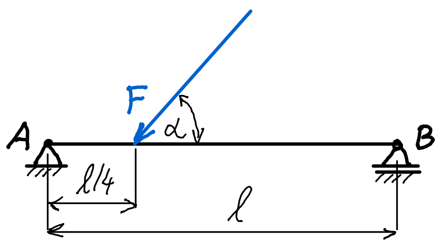


c)



Posuvná vazba odebírá 2 stupně volnosti, to odpovídá dvěma neznámým v soustavě rovnic (1), (2), (3)
a) R_{A1}, R_{A2}
b) R_A, M_A
c) R_A, x

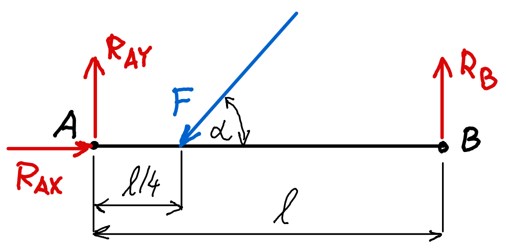
6.1. Nosník 1 - zatížený jednou silou



Dáno: F, l, α

Určit: Vnější (R_{Ax}, R_{Ay}, R_B) a vnitřní $(N(x), T(x), M(x))$ statické účinky nosníku zatíženého silou F.

Uvolnění:



Rovnice rovnováhy:

$$(x):\quad R_{Ax} - F\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$(y):\quad R_{Ay} - F\sin\alpha + R_B = 0 \qquad (2)$$

$$(\overset{+}{\curvearrowleft} M_A):\quad -F\sin\alpha\,\frac{l}{4} + R_B \cdot l = 0 \qquad (3)$$

Výpočet reakcí:

$(1) \rightarrow \quad \boxed{R_{Ax} = F\cos\alpha}$

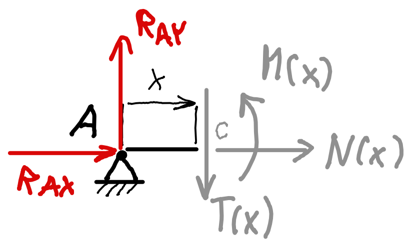
$(3) \rightarrow \quad \boxed{R_B = \frac{1}{4} F\sin\alpha}$

$(2) \rightarrow \quad R_{Ay} = F\sin\alpha - R_B = F\sin\alpha - \frac{1}{4}F\sin\alpha$

$\boxed{R_{Ay} = \frac{3}{4} F\cdot\sin\alpha}$

Průběhy vnitřních statických účinků (VSÚ):

I. interval, $x \in \left(0, \frac{l}{4}\right)$



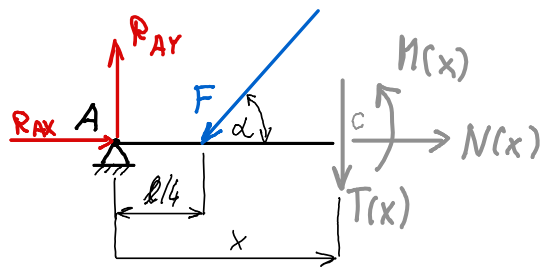
R.R.:

$$(x):\quad N(x) + R_{Ax} = 0 \qquad (4)$$

$$(y):\quad R_{Ay} - T(x) = 0 \qquad (5)$$

$$(\overset{+}{\curvearrowleft} M_c):\quad M(x) - R_{Ay}\cdot x = 0 \qquad (6)$$

II. interval, $x \in \left(\frac{l}{4}, l\right)$



R.R.:

$$(x):\quad R_{Ax} - F\cos\alpha + N(x) = 0 \qquad (7)$$

$$(y):\quad R_{Ay} - F\sin\alpha - T(x) = 0 \qquad (8)$$

$$(\overset{+}{\curvearrowleft} M_c):\quad M(x) + F\sin\alpha\cdot\left(x - \frac{l}{4}\right) - R_{Ay}\cdot x = 0 \qquad (9)$$

$(4) \rightarrow \quad \boxed{N(x)} = -R_{Ax} = \boxed{-F\cos\alpha}$

$(5) \rightarrow \quad \boxed{T(x)} = R_{Ay} = \boxed{\frac{3}{4} F\sin\alpha}$

$(6) \rightarrow \quad \boxed{M(x)} = R_{Ay}\cdot x = \boxed{\frac{3}{4} F\sin\alpha\cdot x}$

Velikost momentu v krajních bodech:

$M(0) = 0$

$M\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{3}{4}F\sin\alpha\cdot\frac{l}{4} = \frac{3}{16}Fl\sin\alpha$

$(7) \rightarrow \quad N(x) = F\cos\alpha - R_{Ax} = F\cos\alpha - F\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{N(x) = 0}$

$(8) \rightarrow \quad T(x) = R_{Ay} - F\sin\alpha = \frac{3}{4}F\sin\alpha - F\sin\alpha = -\frac{1}{4}F\sin\alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{T(x) = -\frac{1}{4}F\sin\alpha}$

$(9) \rightarrow \quad M(x) = R_{Ay}\cdot x - F\sin\alpha\left(x - \frac{l}{4}\right) = \frac{3}{4}F\sin\alpha\, x - F\sin\alpha\, x + F\sin\alpha\,\frac{l}{4}$

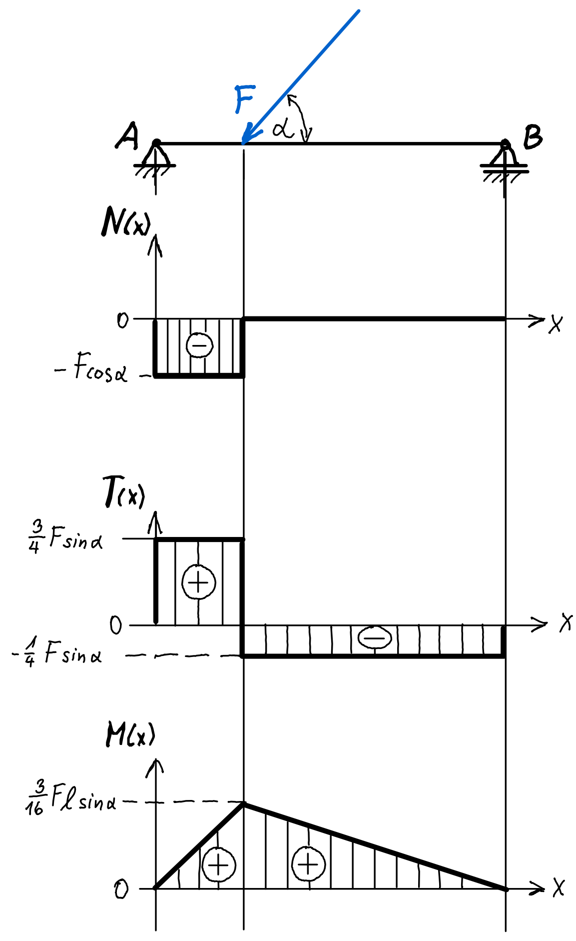
$\rightarrow \quad \boxed{M(x) = -\frac{1}{4}F\sin\alpha\cdot x + F\sin\alpha\,\frac{l}{4}}$

Velikost momentu v krajních bodech:

$M\left(\frac{l}{4}\right) = -\frac{1}{4}F\sin\alpha\,\frac{l}{4} + F\sin\alpha\,\frac{l}{4} = F\sin\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{l}{16}\right) = F\sin\alpha\,\frac{3}{16}l$

$M(l) = -\frac{1}{4}F\sin\alpha\cdot l + F\sin\alpha\,\frac{l}{4} = 0$

Grafy průběhů $N(x), T(x), M(x)$:



I. interval:

$N(x) = -F\cos\alpha$

$T(x) = \frac{3}{4}F\sin\alpha$

$M(x) = \frac{3}{4}F\sin\alpha\cdot x$

II. interval:

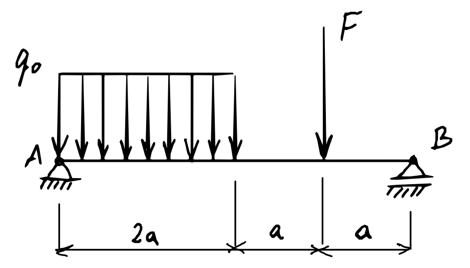
$N(x) = 0$

$T(x) = -\frac{1}{4}F\sin\alpha$

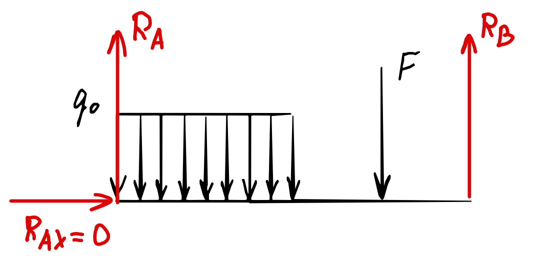
$M(x) = -\frac{1}{4}F\sin\alpha\cdot x + F\sin\alpha\,\frac{l}{4}$

6.2. Nosník 2 - síla + spoj. zat

Zadání:



Uvolnění:



R.R.: (y): $R_A + R_B - F - q_0 2a = 0$ (1)

$(\overset{\curvearrowleft}{M_A})$: $R_B . 4a - F . 3a - q_0 2a . a = 0$ (2)

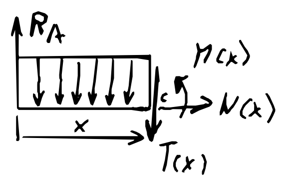
(2) → $R_B = \dfrac{3Fa + 2q_0a^2}{4a} = \dfrac{3F + 2q_0a}{4} = \frac{3}{4}F + \frac{1}{2}q_0a$

(1) → $R_A = F + q_0 2a - R_B = F + 2q_0a - \frac{3}{4}F - \frac{1}{2}q_0a$

$\boxed{R_A = \frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a}$ $\boxed{R_B = \frac{3}{4}F + \frac{1}{2}q_0a}$

VSÚ:

I. interval $x \in (0, 2a)$



$N(x) = 0$

R.R.: (y): $R_A - q_0x - T(x) = 0$ (3)

$(\overset{\curvearrowleft}{M_C})$: $M(x) + q_0 x . \frac{x}{2} - R_A . x = 0$ (4)

(3) → $T(x) = R_A - q_0x = \frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a - q_0x$

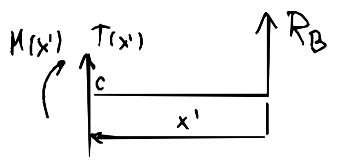
(4) → $M(x) = R_A . x - \frac{1}{2}q_0x^2 = (\frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a)x - \frac{1}{2}q_0x^2$

$T(0) = R_A$

$T(2a) = \frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a - q_0 2a = \frac{1}{4}F - \frac{1}{2}q_0a$

$M(0) = 0$, $M(2a) = \frac{1}{2}Fa + 3q_0a^2 - 2q_0a^2 = \frac{1}{2}Fa + q_0a^2$

II. interval $x' \in (0, a)$

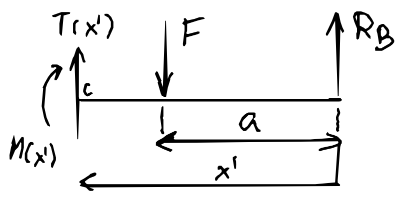


R.R.: (y): $T(x') + R_B = 0$ → $T(x') = -R_B = -\frac{3}{4}F - \frac{1}{2}q_0a$

$(\overset{\curvearrowleft}{M_C})$: $R_B . x' - M(x') = 0$ → $M(x') = R_B . x' = (\frac{3}{4}F + \frac{1}{2}q_0a)x'$

$M(0) = 0$, $M(a) = \frac{3}{4}Fa + \frac{1}{2}q_0a^2$

III. interval $x' \in (a, 2a)$

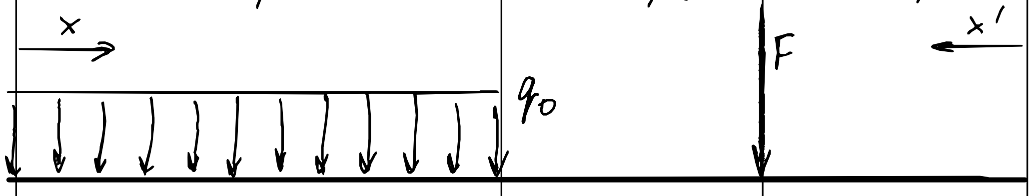


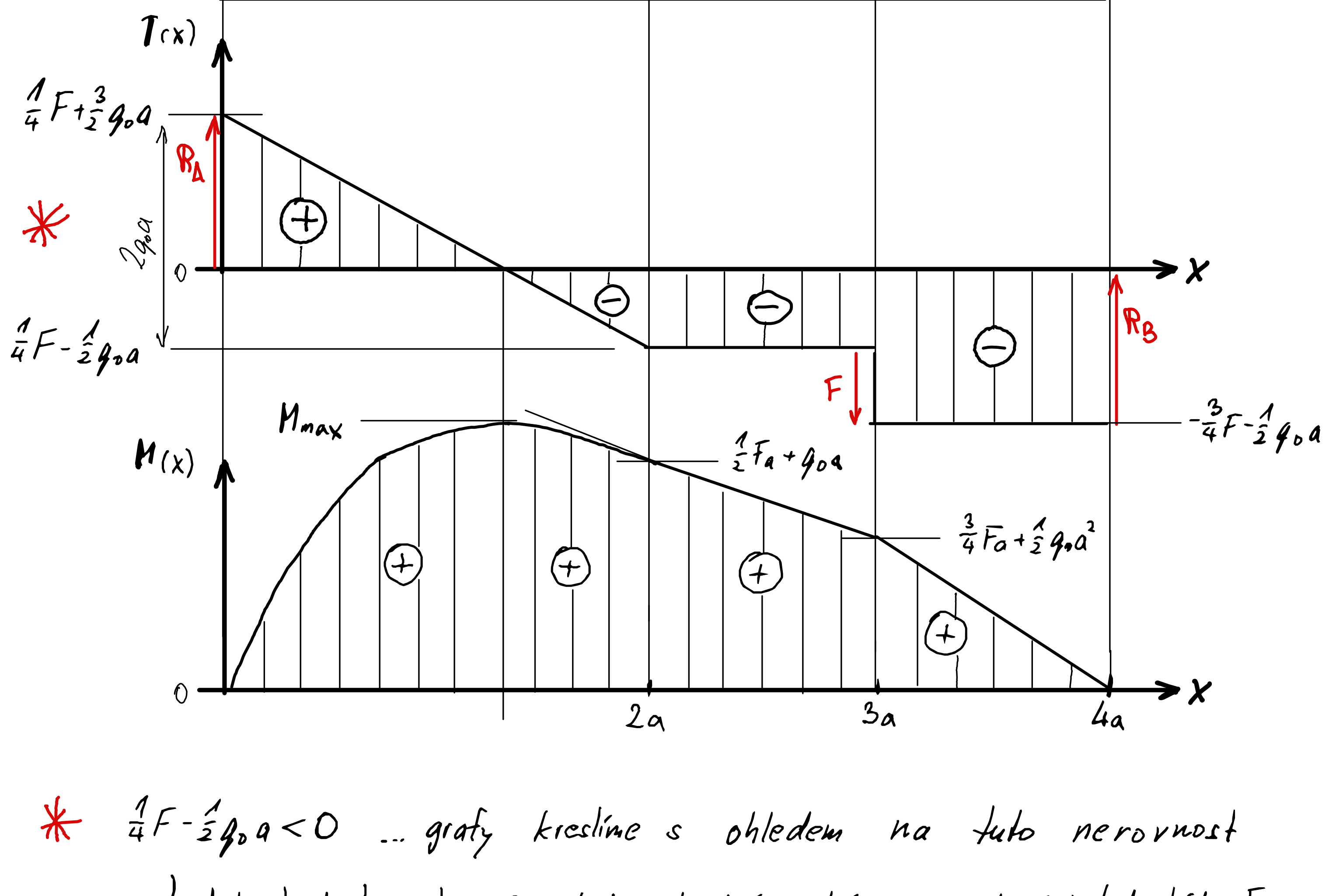
R.R. (y): $T(x') - F + R_B = 0$ → $T(x') = F - R_B = F - \frac{3}{4}F - \frac{1}{2}q_0a = \frac{1}{4}F - \frac{1}{2}q_0a$

$(\overset{\curvearrowleft}{M_C})$: $R_B . x' - F(x' - a) - M(x') = 0$ → $M(x') = R_B . x' - F(x' - a)$
$= (\frac{3}{4}F + \frac{1}{2}q_0a) . x' - F(x' - a)$

$M(a) = \frac{3}{4}Fa + \frac{1}{2}q_0a^2$, $M(2a) = \frac{3}{2}Fa + q_0a^2 - Fa = \frac{1}{2}Fa + q_0a^2$

Souhrn:

	I. interval $x \in (0, 2a)$	III. Interval $x' \in (a, 2a)$	II. Interval $x' \in (0, a)$
			
VSÚ:	$T(x) = \frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a - q_0x$ $M(x) = (\frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a)x - \frac{1}{2}q_0x^2$	$T(x') = \frac{1}{4}F - \frac{1}{2}q_0a$ $M(x') = (\frac{3}{4}F + \frac{1}{2}q_0a)x' - F(x' - a)$	$T(x') = -\frac{3}{4}F - \frac{1}{2}q_0a$ $M(x') = (\frac{3}{4}F + \frac{1}{2}q_0a)x'$
krajní body intervalu:	$T(0) = \frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a$ $T(2a) = \frac{1}{4}F - \frac{1}{2}q_0a$ $M(0) = 0$ $M(2a) = \frac{1}{2}Fa^2 + q_0a^2$	$T(a) = \frac{1}{4}F - \frac{1}{2}q_0a$ $T(2a) = T(a)$ $M(a) = \frac{3}{4}Fa + \frac{1}{2}q_0a^2$ $M(2a) = \frac{1}{2}Fa + q_0a^2$	$T(0) = -\frac{3}{4}F - \frac{1}{2}q_0a$ $T(a) = T(0)$ $M(0) = 0$ $M(a) = \frac{3}{4}Fa + \frac{1}{2}q_0a^2$



* $\frac{1}{4}F - \frac{1}{2}q_0a < 0$ ... grafy kreslíme s ohledem na tuto nerovnost

↳ tato hodnota ale může být i kladná, záleží na zadaných hodnotách F, q_0, a

• Přiložený Matlab skript vykreslí grafy, zkuste zadat různé hodnoty F, q_0, a a pozorujte, kde bude největší ohybový moment. (skript VSU_pr3.m)

Výpočet M_{max}: $\dfrac{dM}{dx} = T(x) = 0$

Pohybujeme se v I. intervalu, takže: $T(x) = \frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a - q_0x$

$$\frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a - q_0x_{max} = 0 \rightarrow x_{max} = \frac{1}{4}\frac{F}{q_0} + \frac{3}{2}a$$

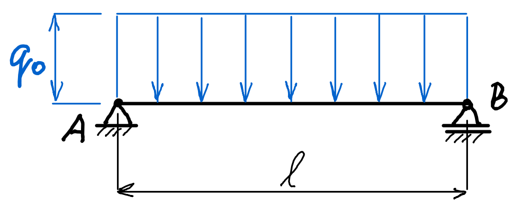
↳ místo, kde je největší moment

$M_{max} = M(x_{max}) = (\frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a)x_{max} - \frac{1}{2}q_0(x_{max})^2$

$M_{max} = (\frac{1}{4}F + \frac{3}{2}q_0a)(\frac{1}{4}\frac{F}{q_0} + \frac{3}{2}a) - \frac{1}{2}q_0(\frac{1}{4}\frac{F}{q_0} + \frac{3}{2}a)^2$

po úpravě: $M_{max} = \dfrac{(F + 6q_0a)^2}{32q_0}$

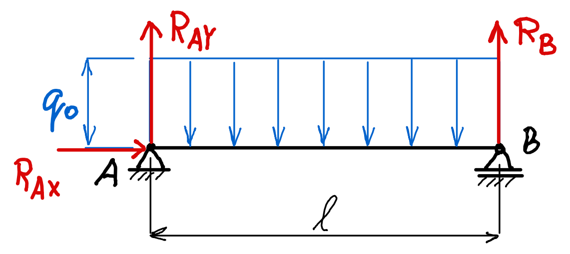
6.4 Nosník 3 - s konstantním spojitým zatížením



Dáno: q_0, ℓ

Určit: Vnější (R_{Ax}, R_{Ay}, R_B) a vnitřní $(N(x), T(x), M(x))$ statické účinky nosníku zatíženého konst. spojitým zatížením q_0.

Uvolnění:



Rovnice rovnováhy:

(x): $\boxed{R_{Ax} = 0}$ (1)

(y): $R_{Ay} + R_B - q_0 \ell = 0$ (2)

(M_A): $R_B \cdot \ell - q_0 \ell \cdot \frac{\ell}{2} = 0$ (3)

Výpočet reakcí:

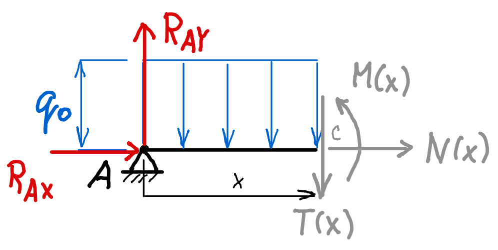
(3) → $\boxed{R_B = \frac{q_0 \cdot \ell}{2}}$

(2) → $R_{Ay} = q_0 \ell - R_B = q_0 \ell - \frac{q_0 \ell}{2} = \boxed{\frac{q_0 \cdot \ell}{2} = R_{Ay}}$

Průběhy vnitřních statických účinků (VSÚ):

Řešení 1: Metoda myšleného řezu:

I. interval, $x \in (0, \ell)$



Rovnice rovnováhy:

(x): $R_{Ax} + N(x) = 0$ (4)

(y): $R_{Ay} - q_0 \cdot x - T(x) = 0$ (5)

(M_C): $M(x) + q_0 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - R_{Ay} \cdot x = 0$ (6)

(4) → $\boxed{N(x) = -R_{Ax} = 0}$

(5) → $\boxed{T(x) = R_{Ay} - q_0 \cdot x = \frac{q_0 \cdot \ell}{2} - q_0 \cdot x}$

(6) → $\boxed{M(x) = R_{Ay} \cdot x - \frac{1}{2} q_0 x^2 = \frac{1}{2} q_0 \cdot \ell \cdot x - \frac{1}{2} q_0 x^2}$

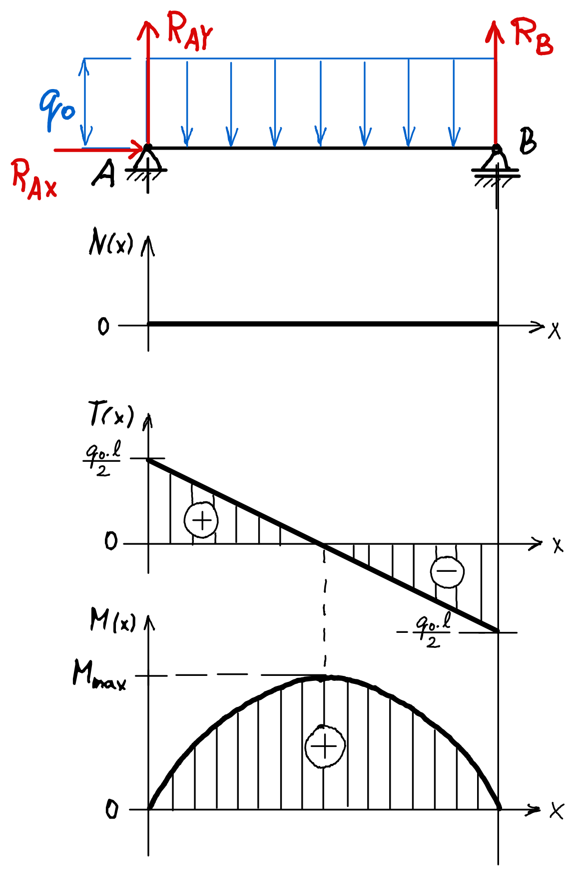
Hodnoty VSÚ v krajních bodech:

$N(0) = N(\ell) = 0$

$T(0) = \frac{q_0 \cdot \ell}{2}$, $T(\ell) = \frac{q_0 \cdot \ell}{2} - q_0 \cdot \ell = -\frac{q_0 \cdot \ell}{2}$

$M(0) = M(\ell) = 0$

Grafy průběhů $N(x), T(x), M(x)$:



Výpočet max. ohybového momentu M_{max}:

$M(x) = \frac{1}{2} q_0 \ell x - \frac{1}{2} q_0 x^2$

Bod podezřelý z extrému:

$\frac{dM}{dx} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} q_0 \ell - q_0 x = 0$

$\rightarrow x = \ell/2$

$M_{max} = M(\ell/2) = \frac{1}{2} q_0 \ell \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2} q_0 \frac{\ell^2}{4} = \frac{q_0 \ell^2}{4} - \frac{q_0 \ell^2}{8} = \frac{q_0 \ell^2}{8}$

$\rightarrow M_{max} = \frac{q_0 \ell^2}{8}$

Řešení 2: Schwedlerovy věty:

1. Schw. v.: $\boxed{q(x) = -\frac{dT}{dx}}$ 2. Schw. v.: $\boxed{T(x) = \frac{dM}{dx}}$

$\rightarrow dT = -q(x)dx$ $\rightarrow dM = T(x)dx$

Z 1. Schw. v. vypočítáme $T(x)$, známe $q(x) = q_0$:

pozn. dole * $\int_{R_{Ay}}^{T(x)} dT = \int_0^x -q_0 \, dx$

$T(x) - R_{Ay} = -q_0 x \rightarrow T(x) = R_{Ay} - q_0 x$

$\boxed{T(x) = \frac{1}{2} q_0 \ell - q_0 x}$

Z 2. Schw. v. vypočítáme $M(x)$, již známe $T(x)$:

$\int_0^{M(x)} dM = \int_0^x T(x) \, dx$

$M(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} q_0 \ell - q_0 x\right) dx$

$\boxed{M(x) = \frac{1}{2} q_0 \ell x - \frac{1}{2} q_0 x^2}$

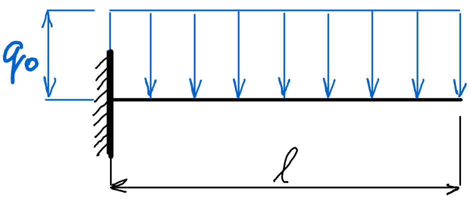
Porovnáním výsledků zjistíme, že obě metody (met. myš. řezu, Schw. věty) vedou ke stejným výsledkům.

* Musíme dávat pozor na integrační meze. Víme, že $T(0) = R_{Ay} = \frac{q_0 \ell}{2}$, proto je tato dolní mez rovna R_{Ay}.

Stejně tak víme, že $M(0) = 0$.

Grafy viz Matlab skript VSU_pr2.m

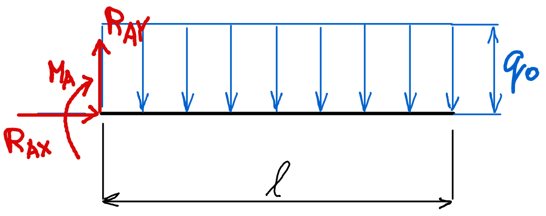
6.5. Nosník 4 – vetknutý



<u>Dáno</u>: q_0, l

<u>Určit</u>: Vnější (R_{AX}, R_{AY}, M_A) a vnitřní ($N(x), T(x), M(x)$) statické účinky vetknutého nosníku zatíženého konst. spoj. zatížením.

<u>Uvolnění</u>:



<u>Rovnice rovnováhy</u>:

(x): $\quad R_{AX} = 0 \qquad (1)$

(y): $\quad R_{AY} - q_0 \cdot l = 0 \qquad (2)$

$(\overset{\curvearrowleft}{M_A})$: $\quad -q_0 \cdot l \cdot \frac{l}{2} - M_A = 0 \qquad (3)$

<u>Výpočet reakcí</u>:

$(2) \rightarrow \boxed{R_{AY} = q_0 \cdot l}$

$(3) \rightarrow \boxed{M_A = -\frac{q_0 \cdot l^2}{2}}$

<u>Průběhy vnitřních statických účinků (VSÚ)</u>:

Schwedlerovy věty: 1. $q(x) = -\frac{dT}{dx}$

2. $T(x) = \frac{dM}{dx}$

$$dT = -q(x)\,dx$$

$$\int_{R_{AY}}^{T(x)} dT = \int_0^x -q_0\,dx$$

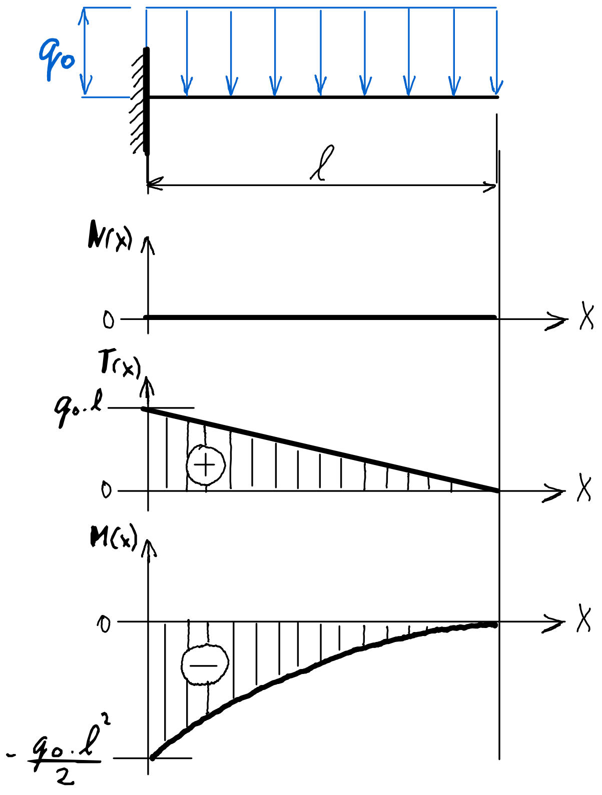
$$T(x) = R_{AY} - q_0 \cdot x = q_0 \cdot l - q_0 x = q_0 (l - x)$$

$$dM = T(x)\,dx$$

$$\int_{M_A}^{M(x)} dM = \int_0^x q_0 (l - x)\,dx$$

$$M(x) = M_A + q_0 \left(lx - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{q_0 \cdot l^2}{2} + q_0 \left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

<u>Grafy průběhů $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$</u>:

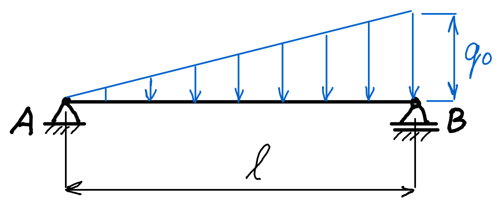


$N(x) = 0$

$T(x) = q_0 (l - x)$

$M(x) = -\frac{q_0 \cdot l^2}{2} + q_0 \left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$

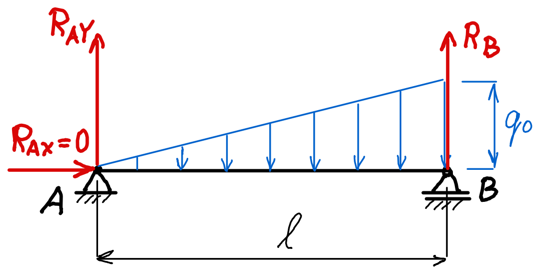
6.6. Nosník 5 – s lineárním spojitým zatížením



Dáno: q_0, ℓ

Určit: Vnější (R_{Ax}, R_{Ay}, R_B) a vnitřní ($N(x), T(x), M(x)$) statické účinky nosníku na dvou podporách zatíženého lineárně rostoucím spoj. zat.

Uvolnění:



Rovnice rovnováhy:

(x): $R_{Ax} = 0$ (1)

(y): $R_A + R_B - \frac{1}{2} q_0 \ell = 0$ (2)

($\overset{\curvearrowleft}{M_A}$): $R_B \cdot \ell - \frac{1}{2} q_0 \ell \cdot \frac{2}{3}\ell = 0$ (3)

Výpočet reakcí:

(3) → $\boxed{R_B = \frac{1}{3} q_0 \ell}$

(2) → $\boxed{R_A = \frac{1}{2} q_0 \ell - \frac{1}{3} q_0 \ell = \frac{1}{6} q_0 \ell}$

Průběhy vnitřních statických účinků (VSÚ):

Nejdřív musíme vyjádřit spoj. zat. jako funkci $q(x)$.

$$q(x) = \frac{q_0}{\ell} x$$

Schwedlerovy věty: 1. $q(x) = -\frac{dT}{dx}$ → $dT = -q(x)dx$ (4)

2. $T(x) = \frac{dM}{dx}$ → $dM = T(x)dx$ (5)

(4) → $\int_{R_{AY}}^{T(x)} dT = \int_0^x -\frac{q_0}{\ell} x \, dx$

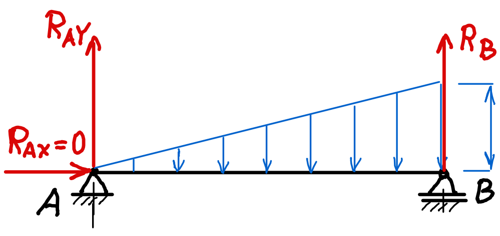
$T(x) - R_{AY} = -\frac{q_0 x^2}{2\ell}$ → $\boxed{T(x) = \frac{1}{6} q_0 \ell - \frac{q_0 x^2}{2\ell}}$

(5) → $\int_0^{M(x)} dM = \int_0^x \left(\frac{1}{6} q_0 \ell - \frac{q_0 x^2}{2\ell}\right) dx$ → $\boxed{M(x) = \frac{1}{6} q_0 \ell x - \frac{1}{6} \frac{q_0}{\ell} x^3}$

$T(0) = \frac{1}{6} q_0 \ell$, $T(\ell) = \frac{1}{6} q_0 \ell - \frac{1}{2} q_0 \ell = -\frac{1}{3} q_0 \ell$

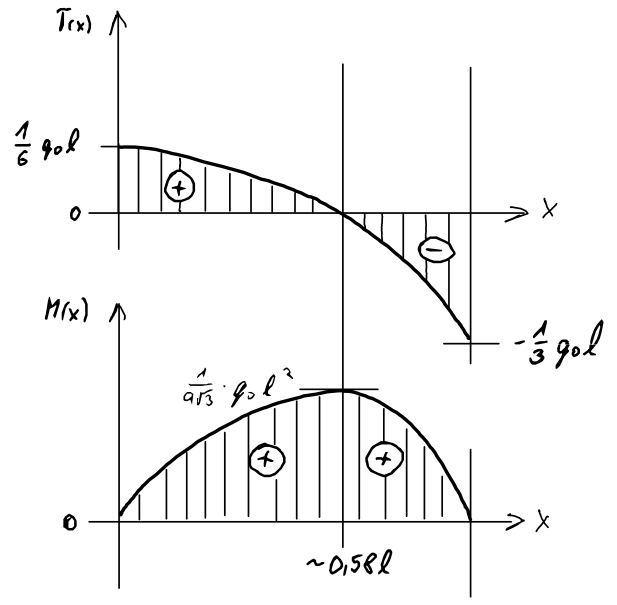
$M(0) = 0$, $M(\ell) = \frac{1}{6} q_0 \ell^2 - \frac{1}{6} q_0 \ell^2 = 0$

Grafy průběhů $N(x), T(x), M(x)$:



$\boxed{T(x) = \frac{1}{6} q_0 \ell - \frac{q_0 x^2}{2\ell}}$

$\boxed{M(x) = \frac{1}{6} q_0 \ell x - \frac{1}{6} \frac{q_0}{\ell} x^3}$



Výpočet M_{max}:

$\frac{dM}{dx} = T(x) = 0$

$\frac{1}{6} \cancel{q_0} \ell - \frac{\cancel{q_0} x_{max}^2}{2\ell} = 0$

$\frac{1}{3}\ell^2 = x_{max}^2$ → $x_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ell \doteq 0{,}58\ell$

$M_{max} = \frac{1}{6} q_0 \ell \frac{1}{\sqrt{3}} \ell - \frac{1}{6} \frac{q_0}{\ell} \frac{\ell^3}{3^{\frac{3}{2}}}$

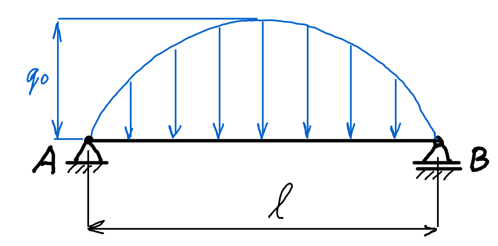
$M_{max} = \frac{1}{6\sqrt{3}} q_0 \ell^2 - \frac{1}{6 \cdot \sqrt{3}^3} q_0 \ell^2$ *

$M_{max} = \frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot q_0 \ell^2$

* $\sqrt{3}^3 = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3 \cdot \sqrt{3}$

$\frac{1}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{6 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}$

6.7. Nosník 6 - sinusové spoj. zatížení



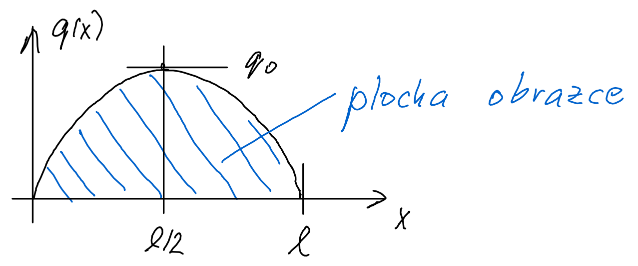
<u>Dáno</u>: q_0, ℓ

<u>Určit</u>: Vnější (R_{AX}, R_{AY}, R_B) a vnitřní ($N(x), T(x), M(x)$) statické účinky nosníku na dvou podporách zatíženého spoj. zat. ve tvaru sinusovky.

Vyjádříme spojité zatížení jako funkci $q(x)$.

$q(0)=0,\ q(\ell)=0,\ q(\frac{\ell}{2})=q_0$

$$\boxed{q(x) = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)}$$



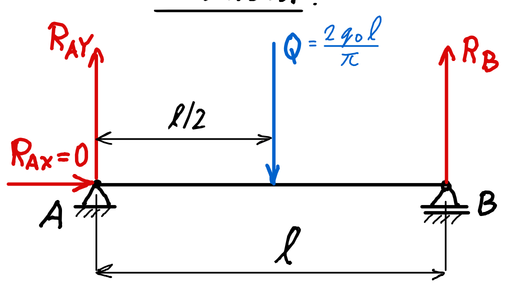
Spoj. zat. $q(x)$ lze při výpočtu reakcí nahradit silou Q, ta je rovna ploše obrazce. Plochu vypočítáme pomocí integrálu:

$$Q = \int_0^{\ell} q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) dx \overset{*}{=} -\frac{q_0 \ell}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)\right]_0^{\ell} = -\frac{q_0\ell}{\pi}\underbrace{\Big(\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - \underbrace{\cos(0)}_{1}\Big)}_{-1-1=-2}$$

$$Q = \frac{2 q_0 \ell}{\pi}$$

$$\left(\begin{aligned} &\int_0^x a \sin(bx)\,dx \overset{*}{=} -a \cdot \frac{1}{b}\left[\cos(bx)\right]_0^x \\ &\int_0^x a \cos(bx)\,dx = a \cdot \frac{1}{b}\left[\sin(bx)\right]_0^x \end{aligned}\right)$$

<u>Uvolnění</u>:



<u>Rovnice rovnováhy</u>:

(x): $R_{AX} = 0$ (1)

(y): $R_{AY} + R_B - \frac{2q_0\ell}{\pi} = 0$ (2)

(M_A): $R_B \cdot \ell - \frac{2q_0\ell}{\pi}\cdot\frac{\ell}{2} = 0$ (3)

<u>Výpočet reakcí</u>:

(3) → $\boxed{R_B = \frac{q_0\ell}{\pi}}$

(2) → $\boxed{R_{AY} = \frac{2q_0\ell}{\pi} - R_B = \frac{q_0\ell}{\pi}}$

I ze symetrie plyne, že se síla Q rovnoměrně rozloží, tedy

$R_{AY} = R_B = \frac{Q}{2} = \frac{q_0\ell}{\pi}$

<u>Průběhy vnitřních statických účinků (VSÚ)</u>:

$q(x) = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)$

Schwedlerovy věty: 1. $q(x) = -\frac{dT}{dx}$ → $dT = -q(x)dx$ (4)

2. $T(x) = \frac{dM}{dx}$ → $dM = T(x)dx$ (5)

(4) → $\displaystyle\int_{R_{AY}}^{T(x)} dT = \int_0^x -q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)dx$

$T(x) - R_{AY} = \frac{q_0\ell}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)\right]_0^x = \frac{q_0\ell}{\pi}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) - \underbrace{\cos(0)}_{1}\Big)$

$T(x) = \frac{q_0\ell}{\pi} + \frac{q_0\ell}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) - \frac{q_0\ell}{\pi}$

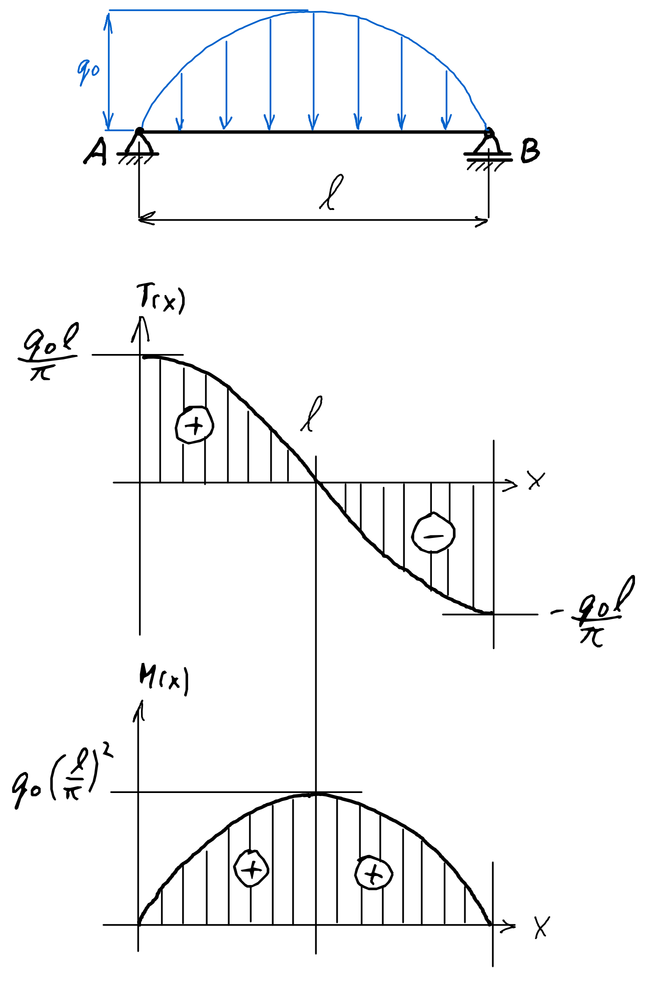
$$\boxed{T(x) = \frac{q_0\ell}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)}$$

(5) → $\displaystyle\int_0^{M(x)} dM = \int_0^x \frac{q_0\ell}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)dx$

$M(x) = \frac{q_0\ell}{\pi}\cdot\frac{\ell}{\pi}\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)\right]_0^x$

$$\boxed{M(x) = q_0\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)}$$

<u>Grafy průběhů N(x), T(x), M(x)</u>:



$\boxed{T(x) = \frac{q_0\ell}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)}$

$\boxed{M(x) = q_0\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)}$

$T(0) = \frac{q_0\ell}{\pi}\cdot\cos(0) = \frac{q_0\ell}{\pi}$

$T(\ell) = \frac{q_0\ell}{\pi}\cos(\pi) = -\frac{q_0\ell}{\pi}$

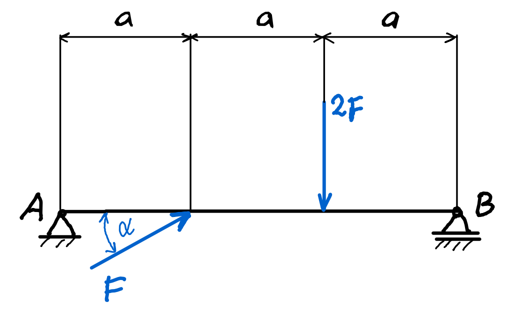
$M(0) = q_0\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot \sin(0) = 0$

$M(\ell) = q_0\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot \sin(\pi) = 0$

$M_{max} = M\left(x = \frac{\ell}{2}\right)$

$M_{max} = q_0\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = q_0\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2$

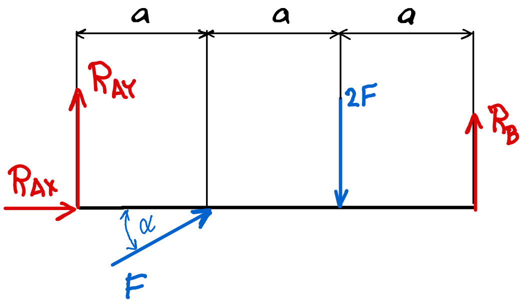
6.8. Nosník 7 - dvě síly



Dáno: $F, a, \alpha = 30° \rightarrow$ tzn. $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$, $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Určit: Vnější (R_{Ax}, R_{Ay}, R_B) a vnitřní $(N(x), T(x), M(x))$ statické účinky nosníku zatíženého silami F.

Uvolnění:



Rovnice rovnováhy:

$(x): \quad R_{Ax} + F\cos\alpha = 0 \qquad (1)$

$(y): \quad R_{Ay} + F\sin\alpha - 2F + R_B = 0 \qquad (2)$

$(M_A): \quad F\sin\alpha \cdot a - 2F \cdot 2a + R_B \cdot 3a = 0 \qquad (3)$

Výpočet reakcí:

$(1) \rightarrow \quad R_{Ax} = -F\overbrace{\cos\alpha}^{\cos(30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}} = -F\frac{\sqrt{3}}{2}$

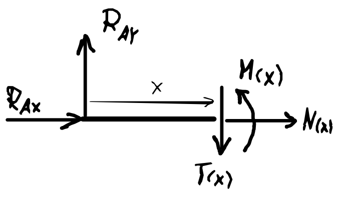
$(3) \rightarrow \quad R_B = \frac{4Fa - Fa\sin\alpha}{3a} = \frac{4}{3}F - \frac{1}{3}F\overbrace{\sin\alpha}^{\sin(30°)=\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}F - \frac{1}{6}F = \frac{7}{6}F$

$(2) \rightarrow \quad R_{Ay} = 2F - F\sin\alpha - R_B = 2F - \frac{1}{2}F - \frac{7}{6}F = \frac{1}{3}F$

$$\boxed{R_{Ax} = -F\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad R_{Ay} = \frac{1}{3}F \qquad R_B = \frac{7}{6}F}$$

Průběhy vnitřních statických účinků (VSÚ):

I. interval $x \in (0, a)$ R.R.:

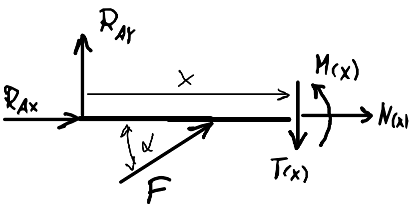


$(x): \quad N(x) + R_{Ax} = 0 \quad \rightarrow \quad N(x) = -R_{Ax} = F\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(y): \quad R_{Ay} - T(x) = 0 \quad \rightarrow \quad T(x) = R_{Ay} = \frac{1}{3}F$

$(M_C): \quad M(x) - R_{Ay} \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad M(x) = R_{Ay} \cdot x = \frac{1}{3}Fx$

II. interval $x \in (a, 2a)$ R.R.:



$(x): \quad R_{Ax} + F\cos\alpha + N(x) = 0 \quad \rightarrow \quad N(x) = -R_{Ax} - F\cos\alpha = 0$

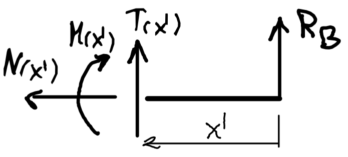
$(y): \quad R_{Ay} + F\sin\alpha - T(x) = 0 \quad \rightarrow \quad T(x) = R_{Ay} + F\sin\alpha = \frac{5}{6}F$

$(M_C): \quad M(x) - F\sin\alpha\,(x-a) - R_{Ay} \cdot x = 0$

$\hookrightarrow M(x) = R_{Ay} \cdot x + \frac{1}{2}F(x-a) = \frac{1}{3}F \cdot x + \frac{1}{2}Fx - \frac{1}{2}Fa$

$M(x) = \frac{5}{6}Fx - \frac{1}{2}Fa$

III. interval $x' \in (0, a)$ R.R.:

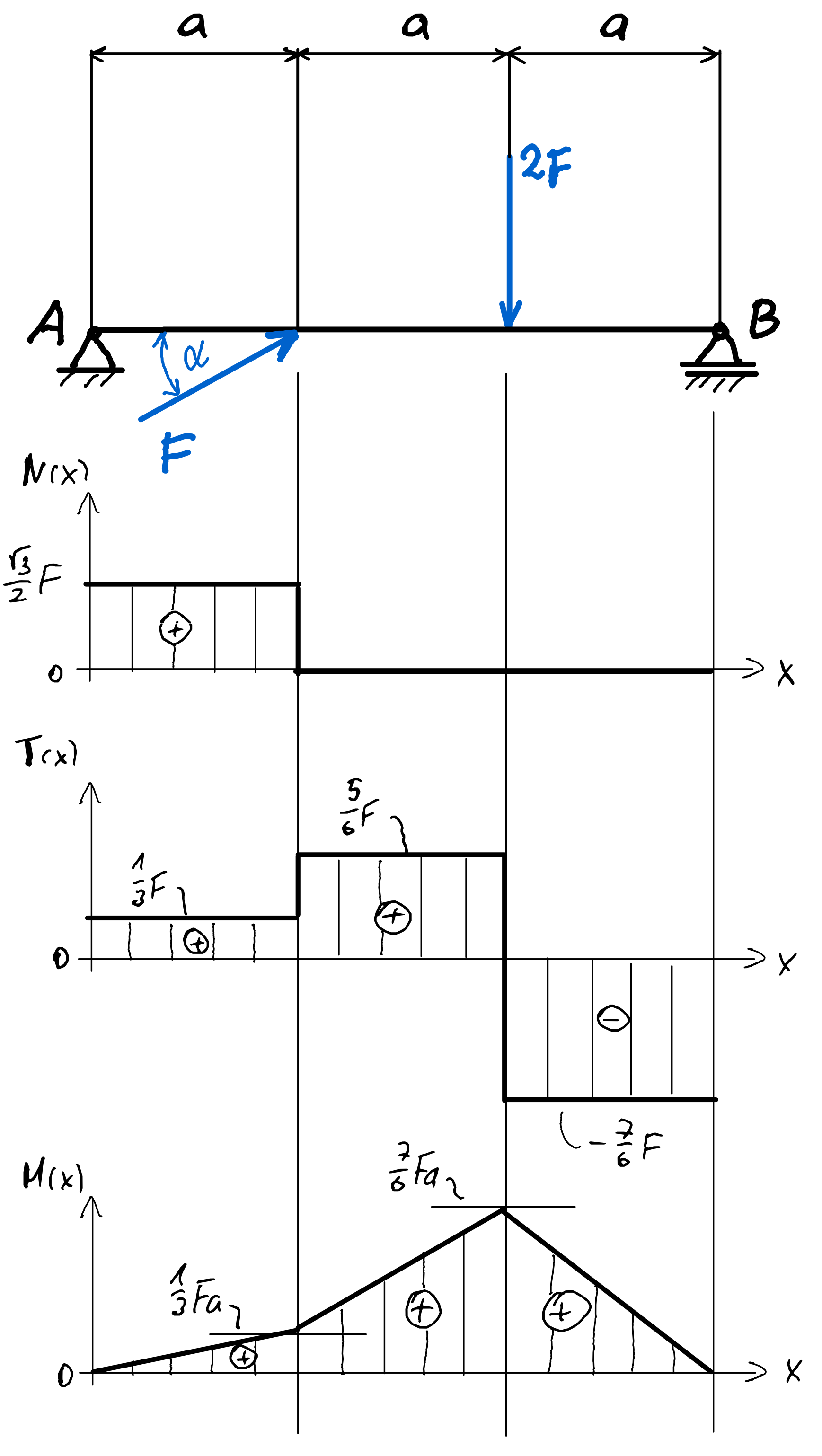


$(x): \quad N(x') = 0$

$(y): \quad T(x') + R_B = 0 \quad \rightarrow \quad T(x') = -R_B = -\frac{7}{6}F$

$(M_C): \quad -M(x') + R_B \cdot x' = 0 \quad \rightarrow \quad M(x') = \frac{7}{6}Fx'$

Grafy průběhů N(x), T(x), M(x):



I. interval $x \in (0, a)$

$N(x) = F\frac{\sqrt{3}}{2}$

$T(x) = \frac{1}{3}F$

$M(x) = \frac{1}{3}Fx$

II. interval $x \in (a, 2a)$

$N(x) = 0$

$T(x) = \frac{5}{6}F$

$M(x) = \frac{5}{6}Fx - \frac{1}{2}Fa$

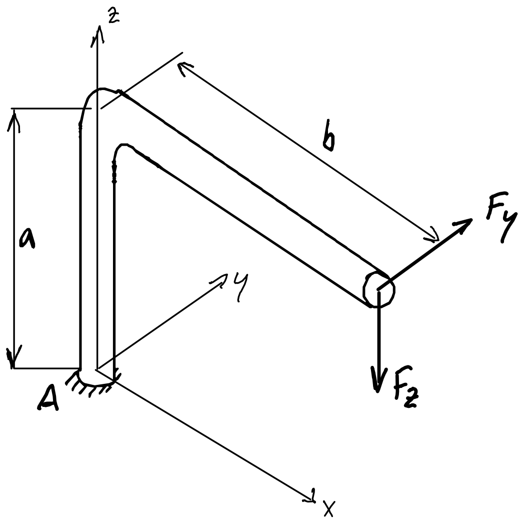
III. interval $x' \in (0, a)$

$N(x') = 0$

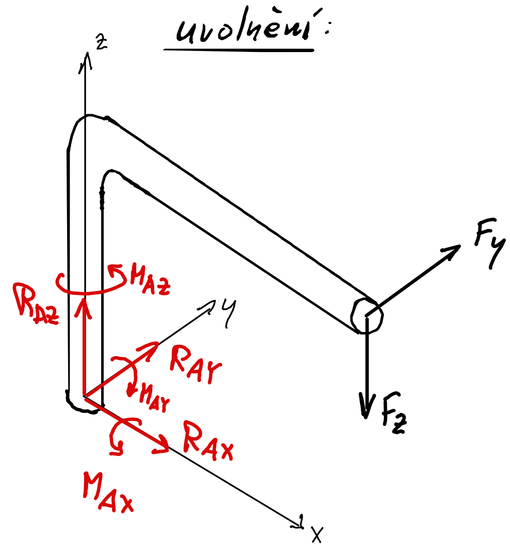
$T(x') = -\frac{7}{6}F$

$M(x') = \frac{7}{6}Fx'$

7.1. Křivý prut



uvolnění:



Rovnice rovnováhy:

(x): $R_{Ax} = 0$ (1) (M_x): $M_{Ax} = 0$ (4)

(y): $R_{AY} + F_y = 0$ (2) (M_y): $M_{AY} + F_z \cdot b = 0$ (5)

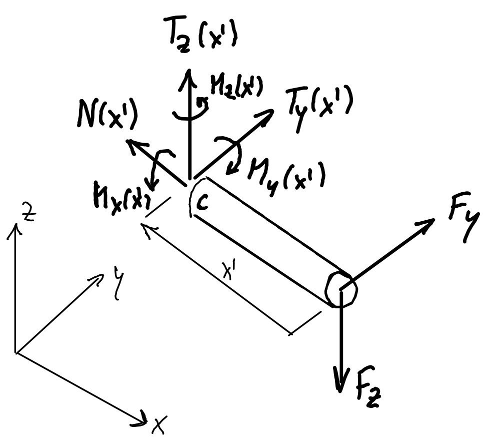
(z): $R_{Az} - F_z = 0$ (3) (M_z): $M_{Az} + F_y \cdot b = 0$ (6)

6 rovnic, 6 neznámých: $R_{Ax}, R_{AY}, R_{Az}, M_{Ax}, M_{AY}, M_{Az}$

Vnitřní statické účinky:

Můžeme provést řez od volného konce, takže pro stanovení VSÚ ani nebudeme potřebovat reakce $R_{Ax}, R_{AY}, R_{Az}, M_{Ax}, M_{AY}, M_{Az}$.

I. interval $x' \in (0, b)$



R.R.:

(x): $N(x') = 0$

(y): $T_y(x') + F_y = 0$

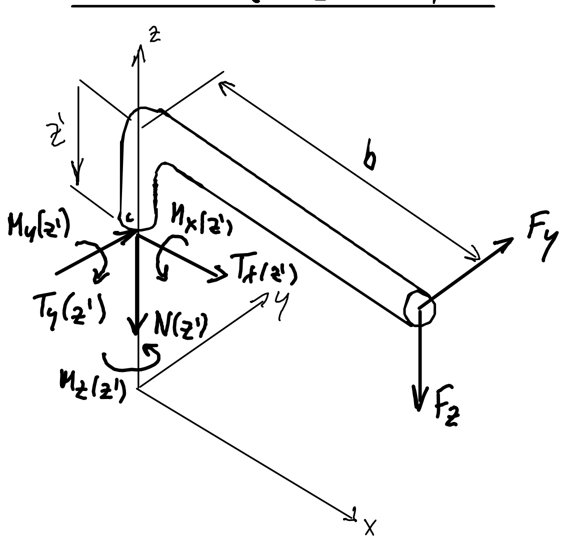
(z): $T_z(x') - F_z = 0$

(M_{cx}): $M_x(x') = 0$

(M_{cy}): $M_y(x') + F_z \cdot x' = 0$

(M_{cz}): $M_z(x') + F_y \cdot x' = 0$

II. interval $z' \in (0, a)$



R.R.:

(x): $T_x(z') = 0$

(y): $T_y(z') + F_y = 0$

(z): $-N(z') - F_z = 0$

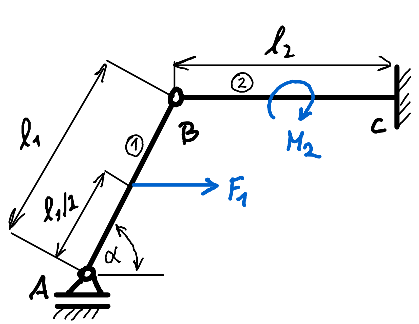
(M_{cx}): $M_x(z') - F_y \cdot z' = 0$

(M_{cy}): $M_y(z') + F_z \cdot b = 0$

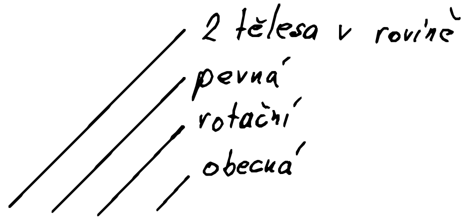
(M_{cz}): $M_z(z') + F_y \cdot b = 0$

8.1. Soustava těles 1 – dva pruty

Zadání:

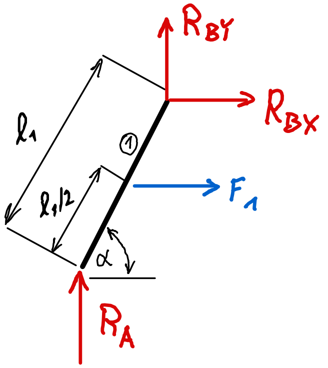


Počet stupňů volnosti:

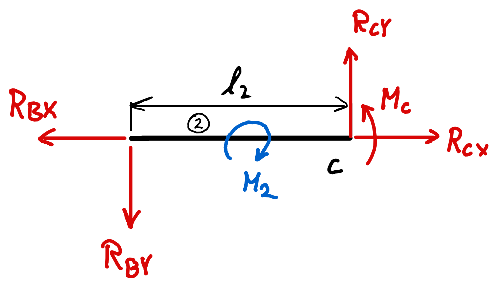


$$i = 6 - 3 - 2 - 1 = 0$$

Uvolnění tělesa ①:



Uvolnění tělesa ②:



Pozn. k vazbě B: při uvolnění prvního tělesa si směr R_{BX} a R_{BY} můžeme libovolně zvolit, při uvolnění druhého tělesa musíme brát v potaz zákon akce a reakce a R_{BX}, R_{BY} musí mít opačný smysl.

Rovnice rovnováhy ①:

(x): $R_{BX} + F_1 = 0$

(y): $R_A + R_{BY} = 0$

$(\overset{\curvearrowleft +}{M_B})$: $F_1 \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \sin\alpha - R_A \cdot l_1 \cdot \cos\alpha = 0$

Rovnice rovnováhy ②:

(x): $-R_{BX} + R_{CX} = 0$

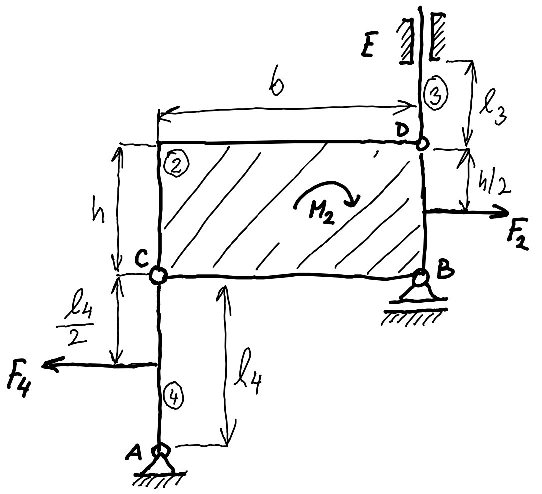
(y): $-R_{BY} + R_{CY} = 0$

$(\overset{\curvearrowleft +}{M_C})$: $M_C - M_2 + R_{BY} \cdot l_2 = 0$

8.2. Soustava těles 2 - bedna na prutech

<u>Dáno</u>: $F_2, M_2, F_4, b, h, l_3, l_4$

<u>Určit</u>: reakce v místech A, B, C, D, E



3 rotační vazby ... $r=3$

1 posuvná vazba... $p=1$

1 obecná vazba ... $o=1$

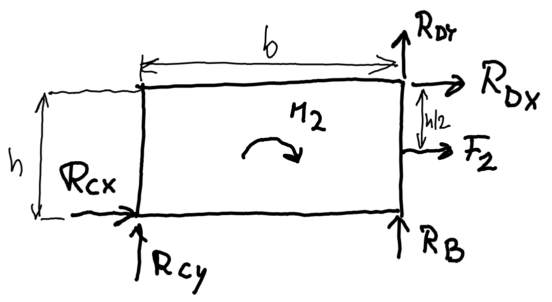
<u>Počet stupňů volnosti</u>

(počet těles včetně rámu $n=4$)

$$i = 3(n-1) - 2r - 2p - 1o =$$
$$= 3(4-1) - 2\cdot 3 - 2\cdot 1 - 1\cdot 1 = \underline{\underline{0}}$$

<u>$i=0$ ... staticky určité</u>

<u>Uvolnění tělesa 2:</u>



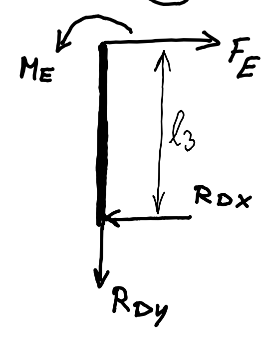
<u>Rovnice rovnováhy t. 2:</u>

$$(x): \; R_{Cx} + R_{Dx} + F_2 = 0$$

$$(y): \; R_{Cy} + R_{Dy} + R_B = 0$$

$$(M_D): \; -M_2 + F_2\frac{h}{2} + R_{Cx}\cdot h - R_{Cy}\cdot b = 0$$

Těleso 3:

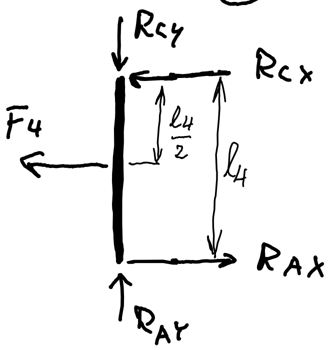


$$(x): \; F_E - R_{Dx} = 0$$

$$(y): \; -R_{Dy} = 0$$

$$(M_D): \; M_E - F_E\cdot l_3 = 0$$

Těleso 4



$$(x): \; R_{Ax} - R_{Cx} - F_4 = 0$$

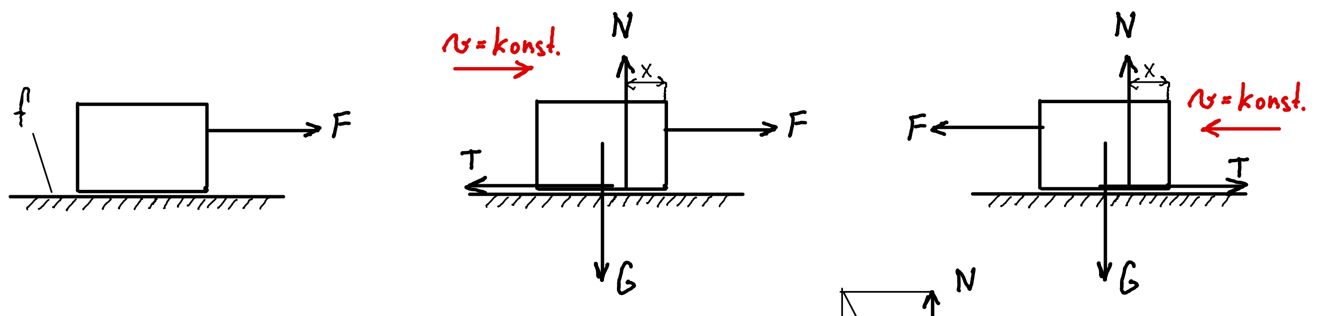
$$(y): \; R_{Ay} - R_{Cy} = 0$$

$$(M_A): \; F_4\frac{l_4}{2} + R_{Cx}\cdot l_4 = 0$$

9.1. Přehled pasivních odporů

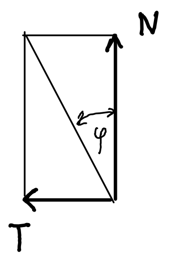
Smykové tření

Uvolnění: Pro opačný směr pohybu:



$\boxed{T = N \cdot f}$

T... třecí síla
N... reakce od podložky
f... součinitel tření

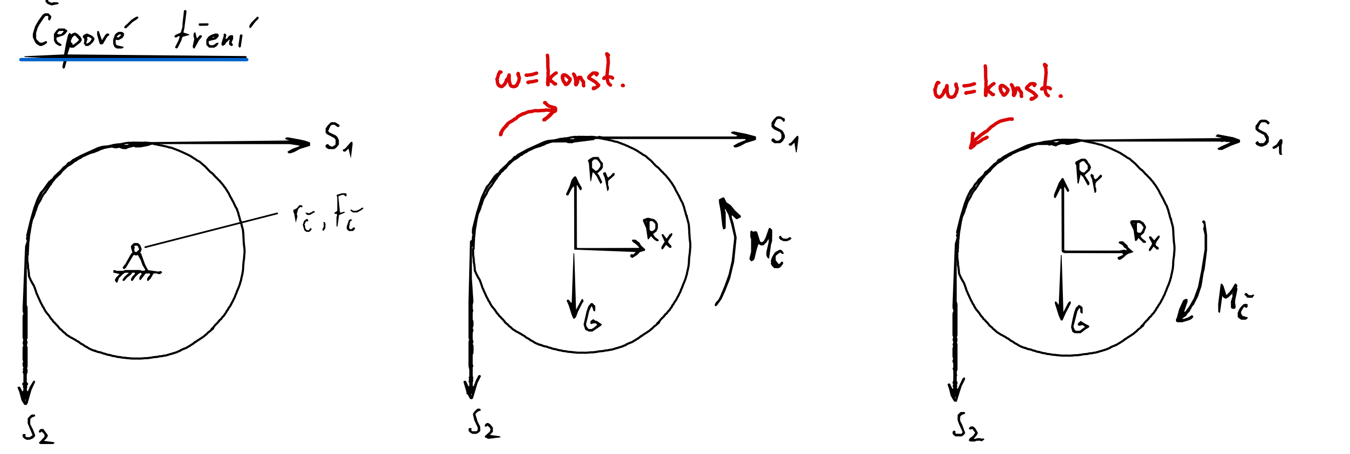


$tg\,\varphi = \frac{T}{N} = f$

φ... třecí úhel

Musíme dbát na směr pohybu a pasivní odpor zavést proti směru pohybu.

Čepové tření



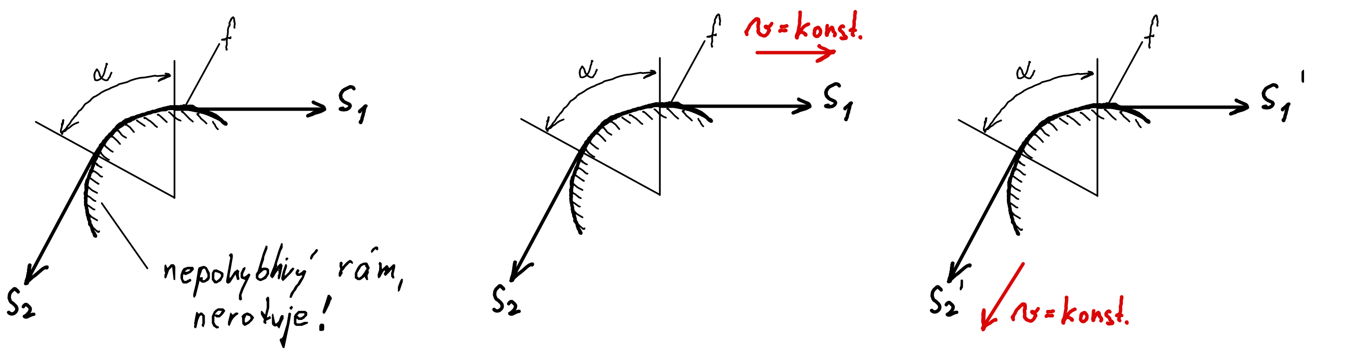
$\boxed{M_č = R \cdot r_č \cdot f_č}$

$M_č$ ... moment čepového tření
$r_č$ ... poloměr čepu
$f_č$ ... součinitel čepového tření

$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$ ... tento vztah vnáší do systému rovnic nelinearitu

LINEARIZACE: pro $R_Y > R_X$: $R = 0{,}96\,R_Y + 0{,}4\,R_X$
(Ponceletův vztah)

Vláknové tření



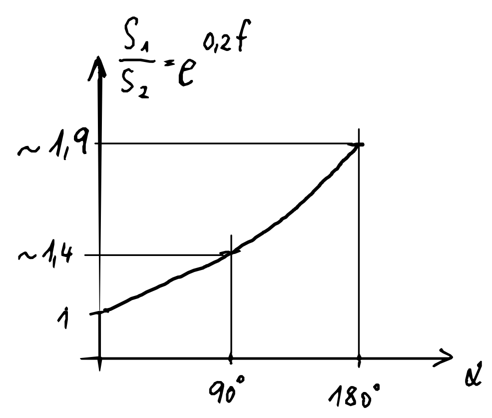
V závislosti na směru pohybu: $\boxed{S_1 = S_2 \cdot e^{\alpha f}}$ $\boxed{S_2' = S_1' \cdot e^{\alpha f}}$

Hodnota $e^{\alpha f}$ je vždy větší než 1, tzn. síla ve směru pohybu je vždy ta větší, protože překonává tření: $S_1 > S_2$, resp. $S_2' > S_1'$

α... úhel opásání v radiánech
f... součinitel tření

Pro představu, kolikrát je síla ve směru pohybu větší viz graf:

pro $F = 0{,}2$:



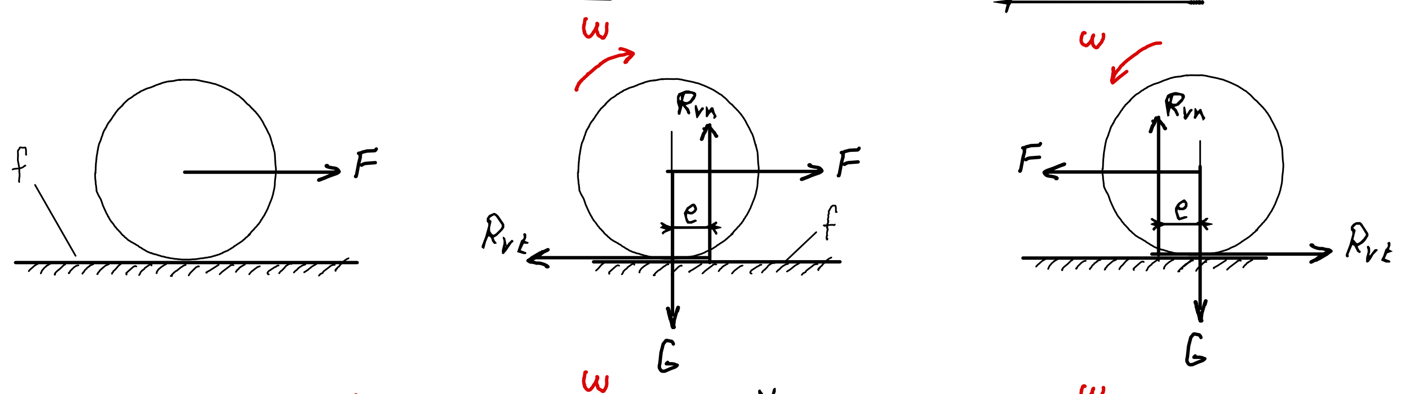
Valivý odpor

U valivého odporu můžeme uvolnění provést dvěma způsoby:

a) odsadíme normálovou složku reakce R_{vn} o rameno valivého odporu e *

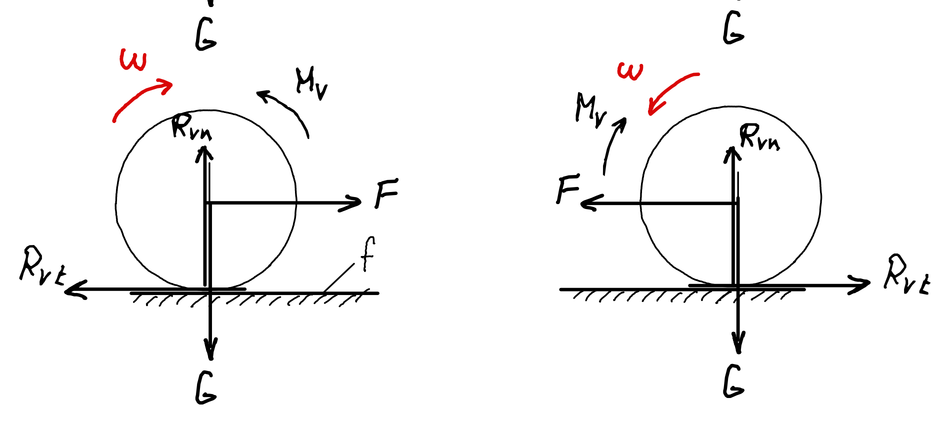
b) zavedeme odpor valivého odporu $M_v = R_{vn} \cdot e$

* Musíme odsadit na tu stranu, aby R_{vn} vytvářela moment vůči středu otáčení proti rotaci.



Podmínka valení:

$\boxed{R_{vt} < R_{vn} \cdot f}$



R_{vn} ... normálová složka reakce od valivé vazby

R_{vt} ... tečná složka reakce od valivé vazby

e ... rameno valivého odporu, toto není neznámá, máme zadáno

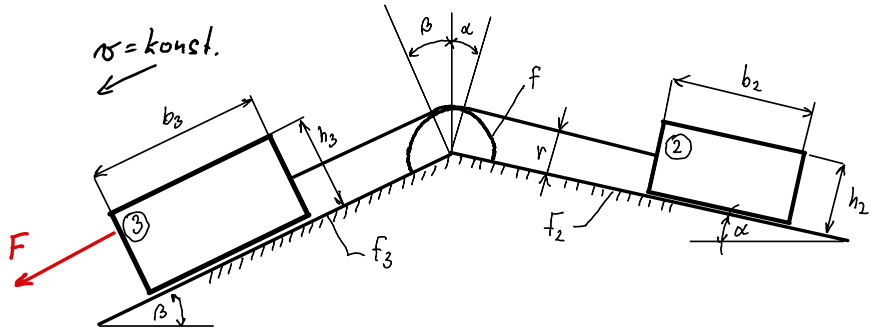
M_v ... moment valivého odporu

Pozn. k tečné složce: její směr se dá odhadnout podle toho, zda je kolo hnací nebo hnané, směr však nemusíme odhadnout správně, zvolíme ho libovolně a směr vyjde z rovnic.

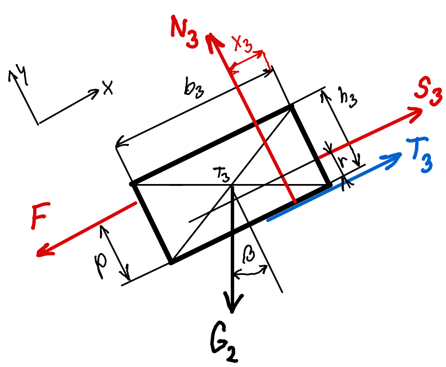
9.2. Pasivní odpory – příklad 1

Zadání: viz obr.

Určit: sílu F tak, aby se soustava pohybovala konstantní rychlostí



Uvolnění tělesa ③:



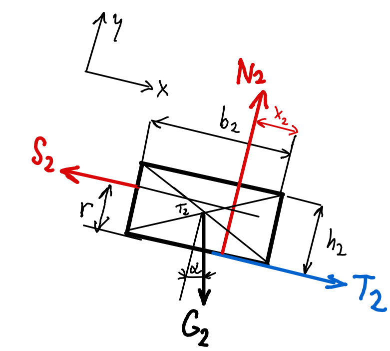
Rovnice rovnováhy tělesa ③:

$$(x):\quad -F + S_3 + T_3 - G_2 \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$(y):\quad N_3 - G_3 \cdot \cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$(M_{T_3}):\quad N_3 \cdot \left(\frac{b_3}{2} - x_3\right) + F\left(p - \frac{h_3}{2}\right) + S_3\left(\frac{h_3}{2} - r\right) + T_3 \cdot \frac{h_3}{2} = 0 \qquad (3)$$

Uvolnění tělesa ②:



Rovnice rovnováhy tělesa ②:

$$(x):\quad T_2 - S_2 + G_2 \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (4)$$

$$(y):\quad N_3 - G_2 \cdot \cos\alpha = 0 \qquad (5)$$

$$(M_{T_2}):\quad N_2\left(\frac{b_2}{2} - x_2\right) + T_2\,\frac{h_2}{2} + S_2\left(r - \frac{h_2}{2}\right) = 0 \qquad (6)$$

Rovnice pro pasivní odpory:

$$T_2 = N_2 \cdot f_2 \qquad (7)$$

$$T_3 = N_3 \cdot f_3 \qquad (8)$$

$$S_3 = S_2 \cdot e^{(\alpha+\beta)f} \qquad (9)$$

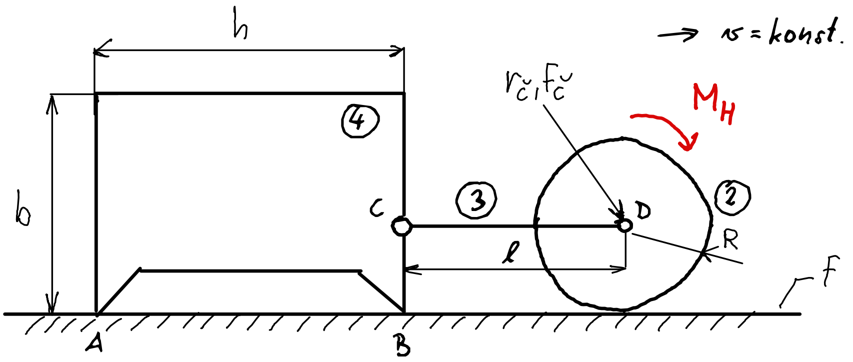
neznámé: $F, N_3, x_3, S_3, T_3, N_2, x_2, S_2, T_2$ … 9 neznámých

rovnice: 6x rovnice rovnováhy (1-6), 3x rovnice pas. odpory (7-9) … 9 rovnic

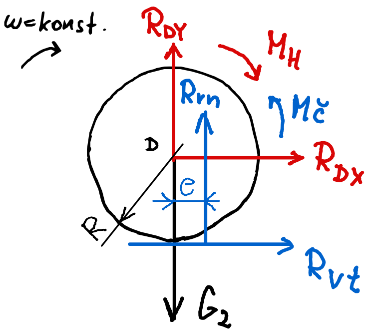
9.3. Pasivní odpory – příklad 2

Zadání: viz obr.

Určit: hnací moment M_H tak, aby se soustava pohybovala konstantní rychlostí



Uvolnění tělesa ②:



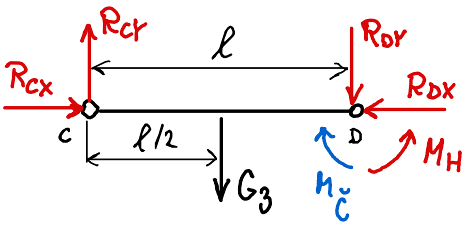
Rovnice rovnováhy tělesa ②:

$$(x):\quad R_{DX} + R_{vt} = 0 \qquad (1)$$

$$(y):\quad R_{DY} + R_{vn} - G_2 = 0 \qquad (2)$$

$$(M_D):\quad R_{vn} \cdot e + R_{vt} \cdot R - M_H + M_č = 0 \qquad (3)$$

Uvolnění tělesa ③:



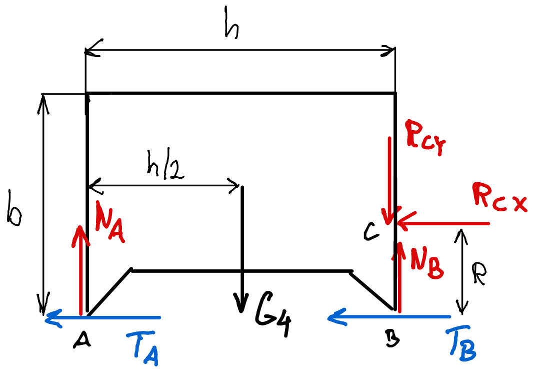
Rovnice rovnováhy tělesa ③:

$$(x):\quad R_{CX} - R_{DX} = 0 \qquad (4)$$

$$(y):\quad R_{CY} - R_{DY} - G_3 = 0 \qquad (5)$$

$$(M_D):\quad M_H - M_č + G_3 \cdot \frac{\ell}{2} - R_{CY} \cdot \ell = 0 \qquad (6)$$

Uvolnění tělesa ④:



Rovnice rovnováhy tělesa ④:

$$(x):\quad -T_A - T_B - R_{CX} = 0 \qquad (7)$$

$$(y):\quad N_A + N_B - G_4 - R_{CY} = 0 \qquad (8)$$

$$(M_B):\quad R_{CX} \cdot R + G_4 \cdot \frac{h}{2} - N_A \cdot h = 0 \qquad (9)$$

Rovnice pro pasivní odpory:

$$T_A = N_A \cdot f \qquad (10)$$

$$T_B = N_B \cdot f \qquad (11)$$

$$M_č = R_D \cdot r_č \cdot f_č \qquad (12)$$

$$(R_D^2 = R_{DX}^2 + R_{DY}^2)$$

Podmínka valení: $R_{vt} \leq R_{vn} \cdot f$ *

neznámé: $R_{DX}, R_{DY}, M_H, M_č, R_{vt}, R_{vn}, R_{CX}, R_{CY}, T_A, T_B, N_A, N_B$ … 12 neznámých

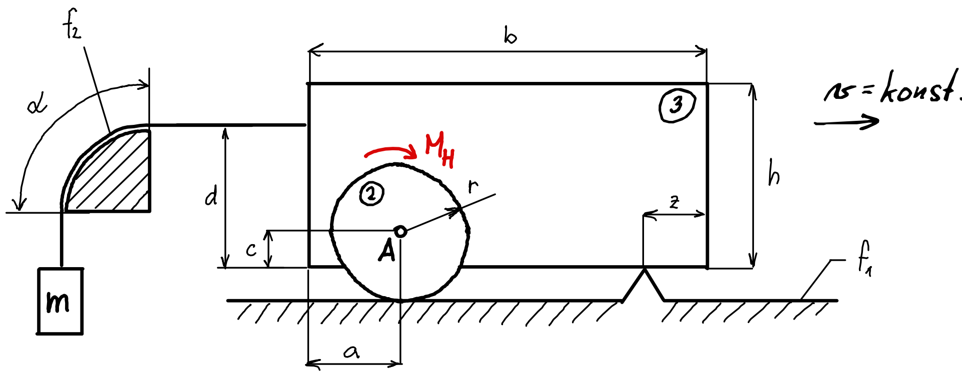
rovnice: 9x R.R. (1–9), 3x rovnice pas. odpory (10, 11, 12) … 12 rovnic

* Podmínka valení se do počtu rovnic nepočítá! Je to pouze podmínka, není to rovnice pomocí které spočítáme neznámou tečnou složku od valivé vazby (R_{vt}).

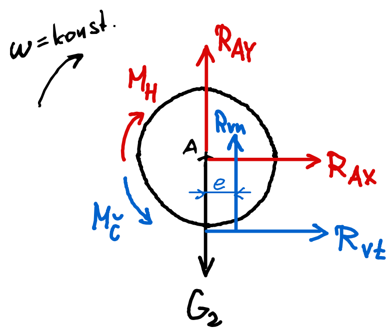
9.4. Pasivní odpory – příklad 3

Zadání: viz obr.

Určit: hnací moment M_H tak, aby se soustava pohybovala konstantní rychlostí



Uvolnění tělesa ②:



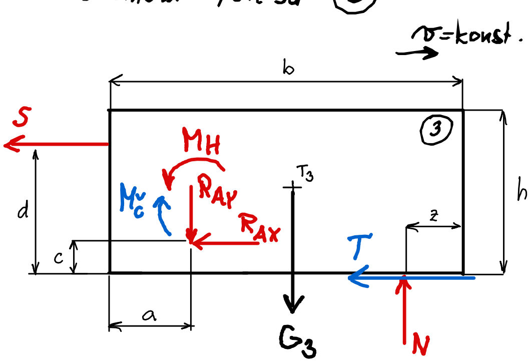
Rovnice rovnováhy tělesa ②:

$$(x):\quad R_{AX} + R_{vt} = 0 \qquad (1)$$

$$(y):\quad R_{AY} - G_2 + R_{vn} = 0 \qquad (2)$$

$$(M_A):\quad M_č - M_H + R_{vn}\cdot e + R_{vn}\cdot r = 0 \qquad (3)$$

Uvolnění tělesa ③:



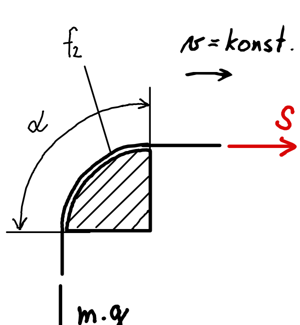
Rovnice rovnováhy tělesa ③:

$$(x):\quad -S - R_{AX} - T = 0 \qquad (4)$$

$$(y):\quad -R_{AY} - G_3 + N = 0 \qquad (5)$$

$$(M_A):\quad M_H - M_č - G_3\left(\frac{b}{2} - a\right) + N\cdot(b-a-z) - T\cdot c + S\cdot(d-c) = 0 \qquad (6)$$

Rovnice pro pasivní odpory:



$$T = N\cdot f_1 \qquad (7)$$

$$M_č = R_A \cdot r_č \cdot f_č \qquad (8)$$

$$(R_A^2 = R_{AX}^2 + R_{AY}^2)$$

$$S = m\cdot g\cdot e^{\alpha f_2} = m\cdot g\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot f_2} \qquad (9)$$

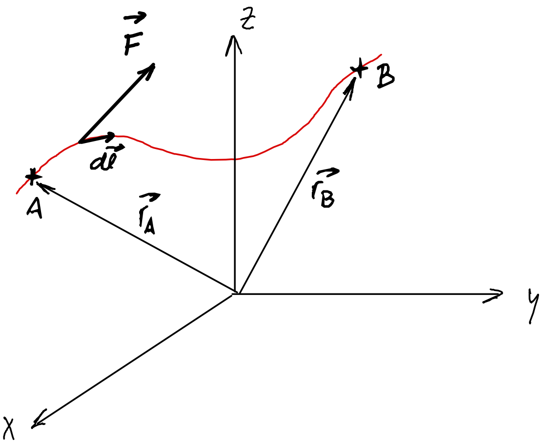
Podmínka valení: $R_{vt} \leq R_{vn}\cdot f_1$ *

neznámé: $M_H, M_č, R_{AX}, R_{AY}, R_{vt}, R_{vn}, S, T, N$ … 9 neznámých

rovnice: 6x R.R. (1–6), 3x rov. pas. odp. (7, 8, 9) … 9 rovnic

* Podmínka valení se do počtu rovnic nepočítá! Je to pouze podmínka, není to rovnice pomocí které spočítáme neznámou tečnou složku od valivé vazby (R_{vt}).

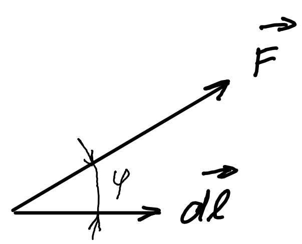
10.1. Mechanická práce – teorie



$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

skalární součin!

Ze skalárního součinu plyne, že práci vykonává pouze složka síly, která je rovnoběžná s dráhou.



$$dW = F \cdot dl \cdot \cos\varphi$$

Jednotka práce:

$$W = F \cdot l$$

$$[J] = [N \cdot m]$$

└ Joule

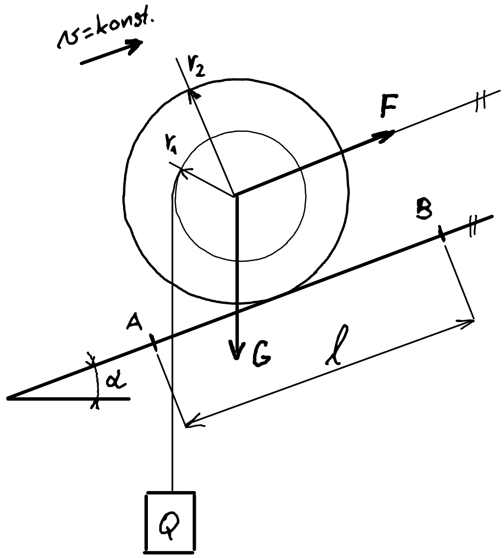
Joule v SI jednotkách?

Newton není SI jednotka, musíme vyjádřit $[N]$ v SI pomocí Newtonova zákonu síly:

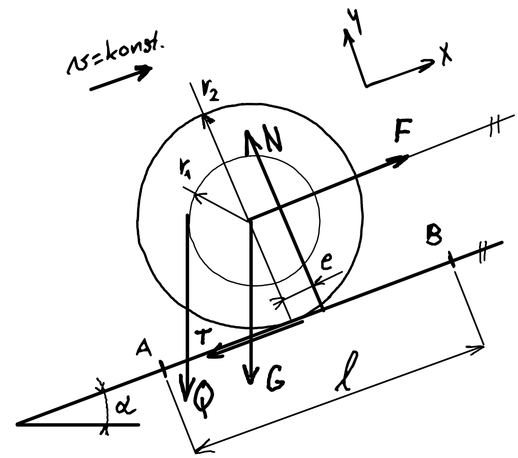
$$F = m \cdot a$$

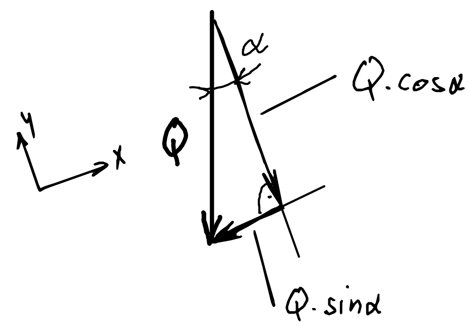
$$[N] = [kg] \cdot \left[\frac{m}{s^2}\right] \quad \rightarrow \quad [J] = \left[kg \, \frac{m^2}{s^2}\right]$$

10.2. Valení válce



Uvolnění:





$$(x):\quad F - T - (Q+G)\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$
$$(y):\quad N - (Q+G)\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$
$$(M_C^{\alpha}):\quad N.e + Q.r_1 - T r_2 = 0 \qquad (3)$$

$$(2) \rightarrow \quad N = (Q+G).\cos\alpha \qquad (4)$$

$$(4) \rightarrow (3) \quad (Q+G)\cos\alpha.e + Q r_1 - T r_2 = 0 \qquad (5)$$

$$(5) \rightarrow \quad T = \frac{(Q+G)\cos\alpha.e + Q r_1}{r_2} \qquad (6)$$

$$(6) \rightarrow (1) \quad F - \frac{(Q+G)\cos\alpha.e + Q r_1}{r_2} - (Q+G)\sin\alpha = 0 \quad (7)$$

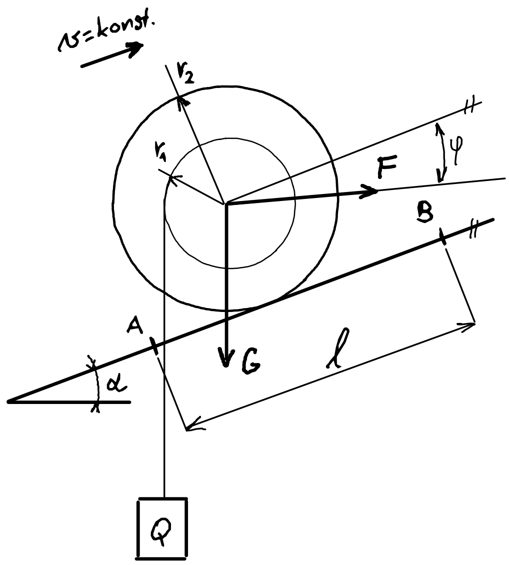
$$(7) \rightarrow \quad F = (Q+G)\sin\alpha + \frac{(Q+G)\cos\alpha.e + Q r_1}{r_2}$$

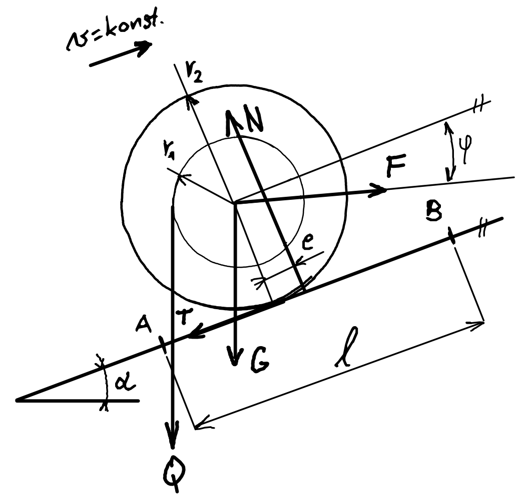
$$\boxed{W = \int_0^l \vec{F}.\vec{dl}}$$

Jelikož $F \parallel dl \rightarrow W = \int_0^l \vec{F}.\vec{dl} = F.l$

$$W = (Q+G)\sin\alpha.l + \frac{(Q+G)\cos\alpha.e + Q r_1}{r_2}.l$$

10.3. Valení válce – práce v závislosti na sklonu síly





$$(x):\quad F\cos\varphi - T - (Q+G)\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$(y):\quad -F\sin\varphi + N - (Q+G)\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$(M_C^{\alpha}):\quad N.e + Q.r_1 - T r_2 = 0 \qquad (3)$$

$$(2) \Rightarrow \quad N = (Q+G).\cos\alpha + F\sin\varphi \qquad (4)$$

$$(4) \rightarrow (3) \quad \big((Q+G)\cos\alpha + F\sin\varphi\big).e + Q r_1 - T r_2 = 0 \qquad (5)$$

$$(5) \Rightarrow \quad T = \frac{\big((Q+G)\cos\alpha + F\sin\varphi\big).e + Q r_1}{r_2} \qquad (6)$$

$$(6) \rightarrow (1) \quad F\cos\varphi - \frac{\big((Q+G)\cos\alpha + F\sin\varphi\big).e + Q r_1}{r_2} - (Q+G)\sin\alpha = 0 \qquad (7)$$

$$(7) \rightarrow \quad F\cos\varphi - \frac{(Q+G)\cos\alpha.e}{r_2} - F\frac{\sin\varphi.e}{r_2} - \frac{Q.r_1}{r_2} - (Q+G)\sin\alpha = 0$$

$$F\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi.e}{r_2}\right) = (Q+G)\sin\alpha + \frac{Q r_1}{r_2} + \frac{(Q+G)\cos\alpha.e}{r_2}$$

$$F = \frac{(Q+G)\sin\alpha + \frac{Q r_1}{r_2} + \frac{(Q+G)\cos\alpha.e}{r_2}}{\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi.e}{r_2}\right)}$$

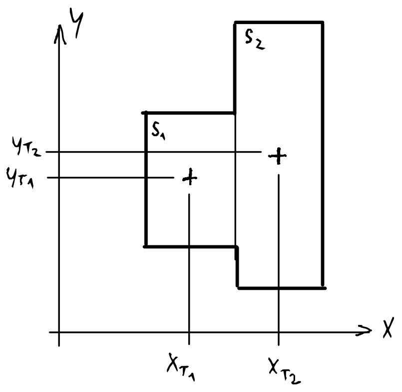
$$\boxed{W = \int_0^l \vec{F}.\vec{dl}}$$

Práci koná jen složka síly $\vec{F}$ rovnoběžná s $\vec{dl}$, tzn. složka $F.\cos\varphi$, práce je tedy rovna:

$$W = F.\cos\varphi.l$$

$$W = \frac{(Q+G)\sin\alpha + \frac{Q r_1}{r_2} + \frac{(Q+G)\cos\alpha.e}{r_2}}{\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi.e}{r_2}\right)} \cdot \cos\varphi.l$$

11.1. Těžiště - teorie



Pokud hledáme těžiště obrazce, a dokážeme ho rozdělit na jednoduché útvary (např. obdelníky), vypočítáme těžiště takto:

$$\boxed{x_T = \frac{x_{T_1}.S_1 + x_{T_2}.S_2}{S}} \qquad \boxed{y_T = \frac{y_{T_1}.S_1 + y_{T_2}.S_2}{S}}$$

$$(x_T.S = x_{T_1}.S_1 + x_{T_2}.S_2) \qquad (y_T.S = y_{T_1}.S_1 + y_{T_2}.S_2)$$

$T_1 = [x_{T_1}, y_{T_1}]$ ... těžiště obrazce s plochou S_1

$T_2 = [x_{T_2}, y_{T_2}]$ ... těžiště obrazce s plochou S_2

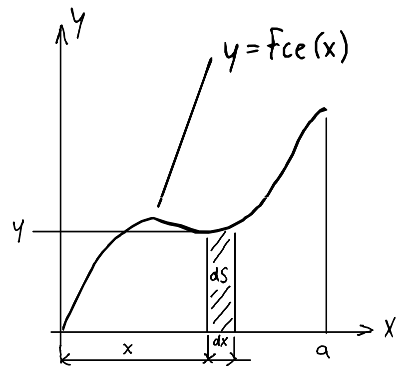
$T = [x_T, y_T]$ ... těžiště obrazce s plochou $S = S_1 + S_2$

Obecně pro libovolný počet ploch:

$$\boxed{x_T = \frac{\sum x_{Ti}.S_i}{S}} \qquad \boxed{y_T = \frac{\sum y_{Ti}.S_i}{S}} \qquad S = \sum_{i=1}^{N} S_i \quad , N\text{... počet ploch}$$

Pro nekonečné množství nekonečně malých ploch:

$$\boxed{x_T = \frac{\int x.dS}{S}} \qquad \boxed{y_T = \frac{\int y\, dS}{S}} \qquad S = \int_{(S)} dS$$



Pokud je obrazec definován funkcí, rozdělíme ho na vhodně zvolené nekonečně malé plochy, suma $\sum x_{Ti}.S_i$ přejde na integrál $\int x\, dS$,

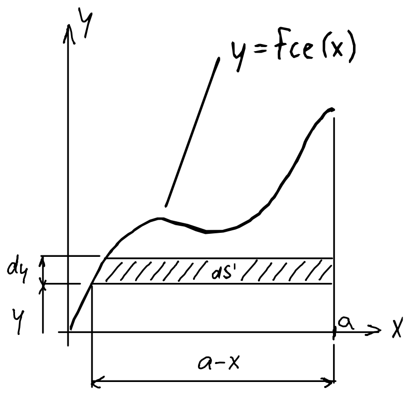
poté: $\boxed{x_T = \frac{\int x.dS}{S}}$ $\quad dS = y\, dx$

Těžiště plochy $dS = [x^{*}, \frac{1}{2}y]$ $\rightarrow$ $x_T = \frac{\int x.dS}{S}$

$$y_T = \frac{\int \frac{1}{2} y.dS}{S}$$

* x je těžiště plochy dS, protože dx je nekonečně malé

Plochu dS si můžeme zvolit více způsoby, například takto viz obrázek:



Souřadnice těžiště y_T je poté:

$$\boxed{y_T = \frac{\int y\, dS'}{S}} \qquad dS' = (a-x).dy$$

y je těžiště plochy dS'

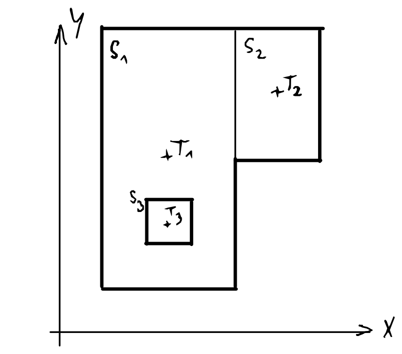
Souřadnici těžiště y_T (analogicky x_T) můžeme tedy vypočítat:

a) $\boxed{y_T = \frac{\int y\, dS'}{S}}$ $\qquad$ b) $\boxed{y_T = \frac{\int \frac{1}{2} y.dS}{S}}$

Volíme podle toho, jaký integrál je jednodušší viz příklady pro výpočet těžiště paraboly a čtvrtkruhu.

Obrazec s dírou

Pokud je v obrazci díra, spočítáme těžiště takto:



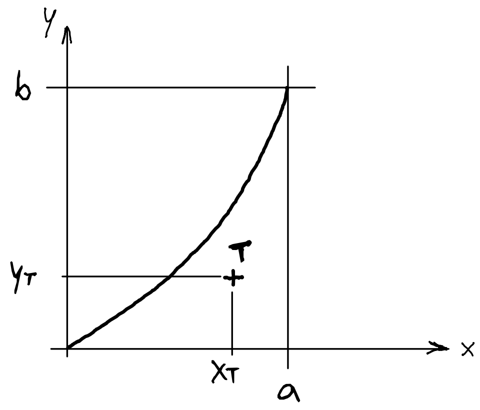
$T_1 = [x_{T_1}, y_{T_1}]$ $\quad T_2 = [x_{T_2}, y_{T_2}]$ $\quad T_3 = [x_{T_3}, y_{T_3}]$

$S = S_1 + S_2 - S_3$

$x_T.S = x_{T_1}.S_1 + x_{T_2}.S_2 - x_{T_3}.S_3 \longrightarrow x_T$

$y_T.S = y_{T_1}.S_1 + y_{T_2}.S_2 - y_{T_3}.S_3 \longrightarrow y_T$

11.2. Těžiště paraboly



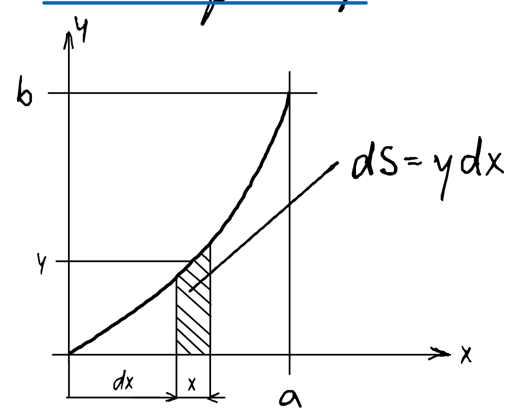
$$x_T \cdot S = \int_{(S)} x \cdot dS \qquad (1)$$

$$y_T \cdot S = \int_{(S)} y \cdot dS \qquad (2)$$

Zadaný předpis paraboly: $y = c_1 \cdot x^2 + c_2$, $c_2 = 0$

$$y(a) = b \rightarrow b = c_1 \cdot a^2 \rightarrow c_1 = \frac{b}{a^2} \rightarrow y = \frac{b}{a^2} x^2$$

Plocha paraboly:



$$S = \int_{(S)} dS = \int_0^a y \cdot dx = \int_0^a \underbrace{\frac{b}{a^2} x^2}_{y} dx = \frac{b}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{ab}{3}$$

$$\boxed{S = \frac{ab}{3}}$$

Těžiště x_T

(1) $\rightarrow$ $x_T = \dfrac{\int x \cdot dS}{S}$

Vypočítáme čitatel:

$$\int_{(S)} x \cdot dS = \int_0^a x \cdot dx \cdot y = \int_0^a x\, \frac{b}{a^2} x^2 \cdot dx = \frac{b}{a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{a^2 b}{4}$$

Dosadíme:

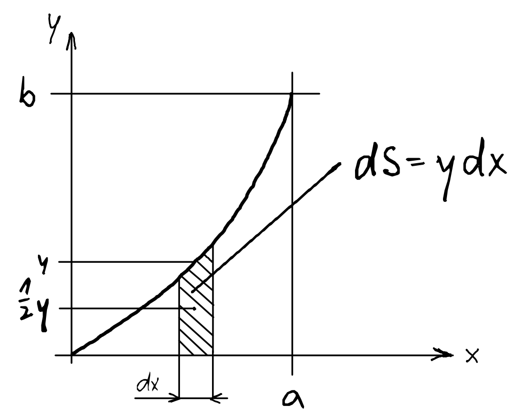
$$x_T = \frac{\frac{a^2 b}{4}}{\frac{ab}{3}} = \frac{3a^2 b}{4ab} = \frac{3}{4}a \qquad \boxed{x_T = \frac{3}{4}a}$$

Těžiště y_T

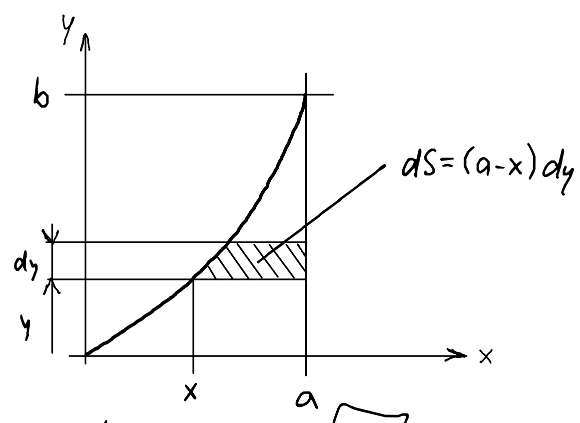
(2) $\rightarrow$ $y_T = \dfrac{\int y\, dS}{S}$ $\qquad \int y\, dS = ?$

Plochu dS si mohu zvolit více způsoby:

a)



b)



a)

$$y_T \cdot S = \int_{(S)} \frac{1}{2} y \cdot dS$$

$$\int_0^a \frac{1}{2} y \cdot dx \cdot y = \int \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^4} x^4 dx =$$

$$= \frac{b^2}{2a^4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{b^2}{2a^4} \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{ab^2}{10}$$

b)

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 y}{b}}$$

$$\int_0^b y \cdot (a-x)\, dy = \int_0^b y\left(a - \sqrt{\frac{a^2 y}{b}}\right) dy =$$

$$= \int_0^b y a\, dy - \int_0^b y \frac{a}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot dy =$$

$$= a\frac{b^2}{2} - \frac{a}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^b =$$

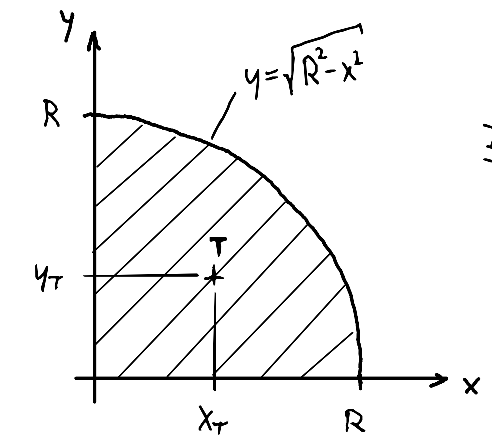
$$= \frac{ab^2}{2} - \frac{a}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2}{5} \cdot b^{\frac{5}{2}} = \frac{ab^2}{2} - \frac{2ab^2}{5} =$$

$$= \frac{5ab^2 - 4ab^2}{10} = \frac{ab^2}{10}$$

$$y_T = \frac{\int y\, dS}{S}, \quad S = \frac{ab}{3}$$

$$y_T = \frac{\frac{ab^2}{10}}{\frac{ab}{3}} = \frac{3ab^2}{10ab} = \frac{3}{10}b \qquad \boxed{y_T = \frac{3}{10}b}$$

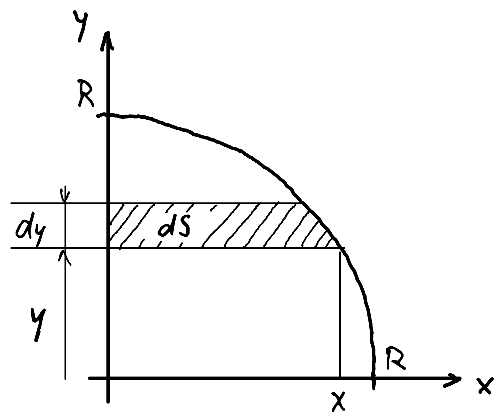
11.3. Těžiště čtvrtkruhu



<u>Dáno:</u> R <u>Určit:</u> těžiště čtvrtkruhu

Ze symetrie plyne $x_T = y_T$

rovnice kružnice $y^2 = R^2 - x^2$ (1)



- zvolíme si nekonečně malou plochu $\underline{dS = x \cdot dy}$
- těžiště plochy dS je y, proto platí:

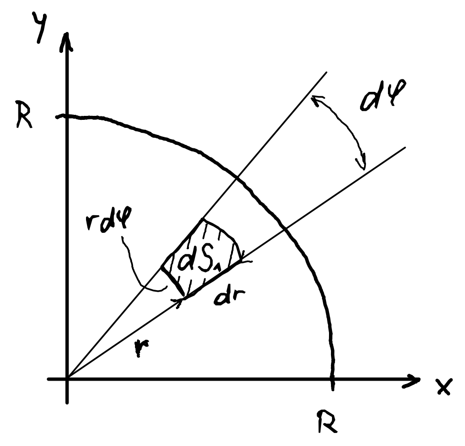
$$\int_{(S)} y\,dS = y_T \cdot S \qquad (2)$$

$$(2) \rightarrow \boxed{y_T = \frac{\int y \cdot dS}{S}}$$

- pro výpočet tedy potřebujeme plochu S a integrál $\int_{(S)} y\,dS$

1) Výpočet plochy S pomocí polárních souřadnic

Samozřejmě můžeme použít známý vztah pro plochu kruhu, ale na ukázku jak může být výhodná změna souřadnicového systému:



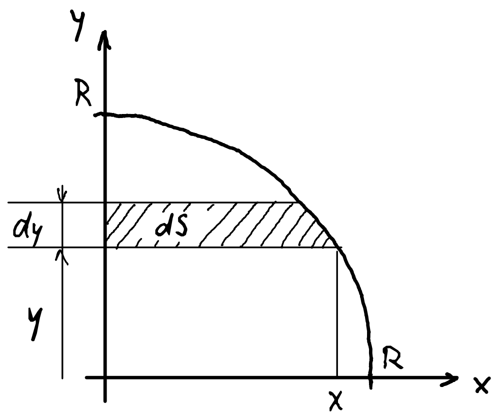
$$dS_1 = r\,d\varphi\,dr$$

$$S = \int_0^{\pi/2}\int_0^{R} r\,d\varphi\,dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R} r\,dr =$$

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2}{4}}$$ - plocha čtvrtkružnice

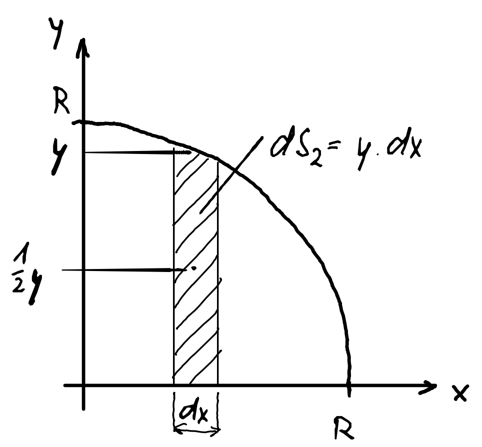
2) Výpočet integrálu $\int_{(S)} y\,dS$



z rovnice (1) $\rightarrow$ $x = \sqrt{R^2 - y^2}$

$$\int_{(S)} y\,dS = \int_0^R y \cdot \overbrace{x \cdot dy}^{dS} = \int_0^R y \cdot \sqrt{R^2 - y^2} \cdot dy$$

Takto zvolená plocha dS vede ke složitějšímu integrálu, lze zvolit plochu lépe:



Platí $\int_{(S)} y\,dS = \int_{(S)} \frac{1}{2} y \cdot dS_2$

($\frac{1}{2}y$ = Těžiště plochy dS_2)

$$\int_{(S)} \frac{1}{2} y \cdot dS_2 = \int_0^R \frac{1}{2} y \cdot \overbrace{y \cdot dx}^{dS_2} = \frac{1}{2}\int_0^R y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^R R^2 dx - \int_0^R x^2 dx\right) = \frac{1}{2}\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} R^3 =$$

$$= \frac{1}{3} R^3$$

3) Výpočet těžiště

$$y_T = \frac{\int y\,dS}{S} = \frac{\int \frac{1}{2} y\,dS_2}{S} = \frac{\frac{1}{3}R^3}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$