3. Hydrostatika tekutin

- u statiky tekutin mluvíme o statice, když se tekutina nepohybuje
- zabývá se tedy rovnováhou sil působících na kapalinu za klidu:

$$p = \frac{F}{S}, \qquad [Pa = \frac{N}{m^2}] \tag{1}$$

- při nerovnoměrném rozložení tlaku je dán obecně:

$$p = \frac{dF}{dS} \tag{2}$$

- tlak působí vždy kolmo na plochu

3.1. Zákonu o šíření tlaku v kapalinách

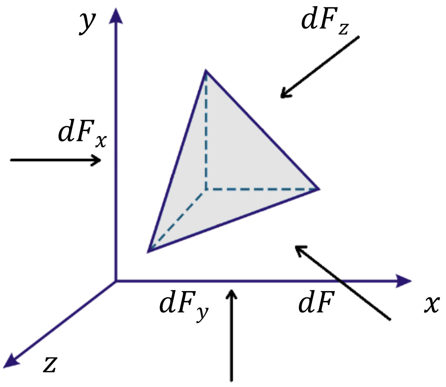
- elementární objem V kapaliny ve tvaru čtyřstěnu
- tíha kapaliny dF_g se může zanedbat, je o řád menší

než tlakové síly (dF_x , dF_y , dF_z).

$dF_x = p_x . dS_x \quad (\sim dy.dz)$

$dF_y = p_y . dS_y \quad (\sim dx.dz)$

$dF_z = p_z . dS_z \quad (\sim dx.dy)$



$dF = p.dS$ -> tento tlak působí na šikmou stěnu ve směru normály plochy dS pod úhly α, β, γ.

- tlaky na stěny (plochy) čtyřstěnu jsou konstantní => výsledné tlakové síly působí v těžištích trojúhelníků ($p = p_x = p_y = p_z$)

3.2. Eulerova rovnice hydrostatiky

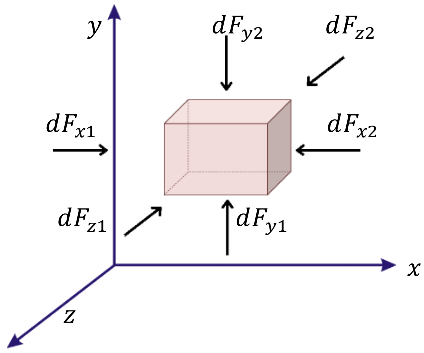
- obecná podmínka rovnováhy sil působících na kapalinu v klidu,

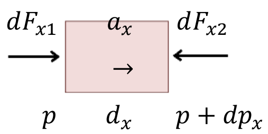
kde působí obecně hmotnostní síla F_o a výslednice tlakových sil F_p

$F_o + F_p = 0 \qquad \rightarrow \qquad$ rovnováha sil za klidu

$\frac{F_o}{m} = a \;\sim> \; a = ia_x + ja_y + ka_z \qquad \rightarrow \qquad$ zrychlení rozepsané pomocí složek

- zvolíme elementární objem V kapaliny ve tvaru hranolu o stranách (dx, dy, dz)





$dF_{x1} = p.dy.dz$

$dF_{x2} = (p + dp_x).dy.dz$

$dF_{px} = dF_{x1} - dF_{x2}$

$dF_{ox} = dm.a_x$

- F_p působí na povrch hranolku ve 3 kolmých směrech;

- plošky jsou nekonečně malé ($p = konstantě$)

- podmínka rovnováhy vyplývá z obecných podmínek statické rovnováhy sil

- všechny síly působící na hranolek procházejí těžištěm hranolku (splňují momentové podmínky)

$dF_{x1} = p.dy.dz$

$dF_{x2} = (p + dp_x).dy.dz$

$dF_{px} = dF_{x1} - dF_{x2}$ → výsledná tlaková síla (ostatní tlakové síly jsou kolmé na x a tudíž =0)

$dF_{ox} = dm.a_x$ → hmotnostní síla (dm → hmotnost hranolu)

$dm = \rho.dV = \rho.dx.dy.dz \quad \rightarrow \quad dF_{ox} = \rho.a_x.dx.dy.dz$

- pro rovnováhu sil ve směru osy x musí platit:

$dF_{px} + dF_{ox} = 0 \quad neboli \quad dF_{x1} - dF_{x2} + dF_{ox} = 0$

- po dosazení a úpravě:

$\rho.a_x dx - dp_x = 0$ → pro osu x; ($\rho.a_y dy - dp_y = 0$ → pro osu y); ($\rho.a_z dz - dp_z = 0$ → pro osu z)

- tlak kapaliny je obecně funkcí polohy, platí $p = p(x, y, z)$

a přírůstek je $dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$

výsledný vzorec pro všechny směry:

$$\boldsymbol{a - \frac{1}{\rho}.grad\, p = 0} \tag{3}$$

3.3. Pascalův zákon a hydraulický lis

- pokud hmotnostní síly F_o jsou mnohem menší než tlakové síly F_p, zjednoduší se dosazením $a \rightarrow 0 \quad (F_o \ll F_p)$;

Eulerova rovnice hydrostatiky se upraví takto:

$$a - \frac{1}{\rho}.grad\, p = 0 \quad \sim> \quad grad\, p = 0 \tag{4}$$

- dále pokud $\rho \neq 0$, tak platí podmínka: $p = konstantě$

→ tlak je konstantní ve všech místech kapaliny → Pascalův zákon

tento zákon platí pouze tehdy, jsou-li hmotnostní síly zanedbatelně malé proti plošným (tlakovým) silám.

- např. u hydraulických (lisů, akumulátorů, multiplikátorů, pohonů)

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = konstantě \;\rightarrow\; \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \tag{5}$$

3.4. Tlakové hladiny (hladinové plochy, hladiny)

- je geometrické místo bodů stejných tlaků ($p = konst.$) nebo v diferenciálním tvaru $dp = 0$

- vychází se opět z Eulerovy rovnice: $\boldsymbol{a} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}.\boldsymbol{grad\,p} = \mathbf{0}$

- úprava do diferenciálního tvaru: $grad\,p = a.\rho \;\rightarrow\; dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz)$

$dp = \rho\big(a_x dx + a_y dy + a_z dz\big) = 0 \quad \sim > \;$ závorka se musí $= 0$

$\boldsymbol{a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0} \;\rightarrow\;$ což je obecná diferenciální rovnice hladinových ploch.

- tlakové plochy jsou kolmé na výsledné zrychlení

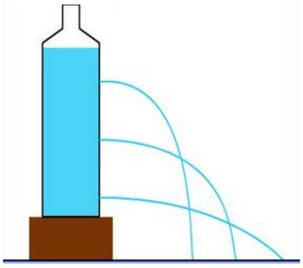
3.5. Kapalina za působení zemské tíže

$$a_y = -g; \;\; a_x = a_z = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{dp = -\rho g dy}$$

$\boldsymbol{-gdy = 0}$

$p = p_0 + h\rho g$

$p_a = p_0 + p_r$ (absolutní tlak = tlak ovzduší (10^5Pa) + relativní tlak)



3.6. Tlakové síly kapaliny na plochy

1) úloha hydrostatiky se zabývá tlakovou funkcí, známe-li účinek vnějších sil na kapalinu

2) úloha hydrostatiky řeší silový účinek kapaliny na plochy

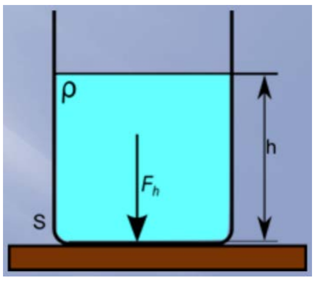
- výsledná tlaková síla se určí vektorovým součtem elementárních tlakových sil působících na elementární plošky

- tlaková síla na plochu je vektor (určen velikostí, směrem, smyslem a působištěm)

- rovinné plochy; křivé plochy

<u>Tlakové síly na rovinné plochy</u>

- směr tlakové síly je dán směrem normály k ploše



Vodorovné rovinné plochy ($h \perp S$)

$F = p.S = \rho g h S; \;\; h.S = V$

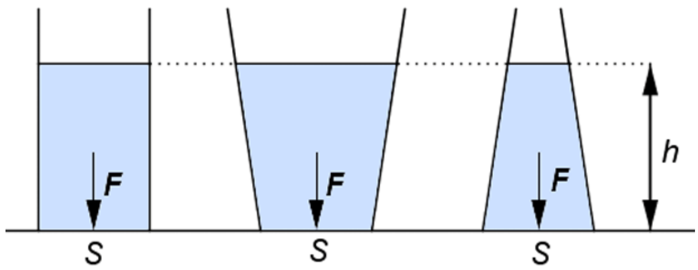
$\boldsymbol{F = \rho g V}$

Omezení podmínkami:

1) plochou S na níž počítáme tlakovou sílu F

2) tlakovou hladinou tlaku ovzduší $p_0 = konst.$

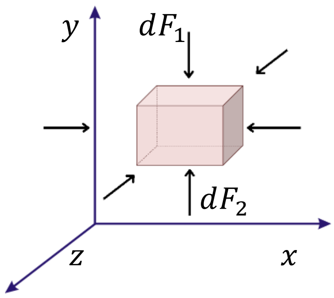
3) pláštěm (válcem, hranolem) vzniklým opsáním přímky rovnoběžné s výslednicí tlaku p nad obrysem plochy S



- nezávisí na tvaru bočních stěn: **hydrostatické paradoxon**
- tlak p na dně nádoby je $p = \rho g h = konst.$; podobně objem V zatěžovacího obrazce podle definice bude ve všech případech stejný, takže výsledná tlaková síla je rovněž stejná a nezávisí na tvaru bočních stěn nádob

Vztlak a plavání těles

- na těleso ponořené do kapaliny působí síly ve 3 směrech (x,y,z)



$dF_1 = \rho g h_1 dS_y$

$dF_2 = \rho g h_2 dS_y$

$dF_y = dF_2 - dF_1 = \rho g(h_2 - h_1)dS_y = \rho g h dS_y = \rho g dV = dG_k$

$\boldsymbol{F_V = \rho g V} = G_k \rightarrow$ výsledek je znám jako **Archimedův zákon**

$F_V \rightarrow$ vztlaková síla působící v těžišti objemu vytlačené kapaliny

$G \rightarrow$ tíha tělesa působící v těžišti tělesa

- podle výslednice: $F = F_V - G$, která působí na těleso ponořené v kapalině, mohou nastat obecně 3 případy:

$G > F_V \rightarrow$ tíha tělesa je větší než vztlaková síla, takže výslednice působí ve směru svislém dolů a těleso klesá ke dnu.

$G = F_V \rightarrow$ tíha tělesa je v rovnováze se vztlakovou silou, výslednice je nulová a těleso setrvává v libovolné poloze – vznáší se v kapalině.

$G < F_V \rightarrow$ vlastní tíha tělesa je menší než vztlaková síla, takže výslednice působí svisle nahoru a těleso se vznáší k hladině.

Slovník pojmů:

Označení	Jednotka	Význam
G	N	tíha tělesa
F	$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$	síla
F_g	N	tíha
F_o	N	objemová síla (= Fm)
F_p	N	tlaková síla – plošná síla
F_v	N	vztlaková síla
S	m^2	plocha
V	m^3	objem
a	$m \cdot s^{-2}$	zrychlení
g	$m \cdot s^{-2}$	tíhové zrychlení
h	m	výška
m	kg	hmotnost
p	$Pa = N \cdot m^{-2}$	tlak, hydrostatický tlak
p_a	Pa	absolutní tlak
p_o	Pa	tlak ovzduší (10^5Pa)
p_r	Pa	relativní tlak
v	$m \cdot s^{-1}$	rychlost
η	Pa . s	dynamická viskozita
ρ	$kg \cdot m^{-3}$	hustota (měrná hmotnost)
υ	$m^2 \cdot s^{-1}$	kinematická viskozita

Použitá literatura:

[1] – NOSKIEVIČ J. a kol.: Mechanika tekutin. Praha: SNTL, 1987.

[2] – JANALÍK J., ŠŤÁVA P.: Mechanika tekutin. Ostrava: VŠB TU, 2002.

[3] – WALKER, Jearl. Halliday & Resnick fundamentals of physics. Tenth edition, extended. Hoboken: Wiley, 2014. ISBN 978-1-118-23061-9.