

Identifikace dynamických systémů

Jak získáme diferenciální rovnici, která popisuje chování dynamického systému ?

Tato otázka je velmi důležitá pro pochopení souvislosti mezi chováním reálného systému a jeho matematickým popisem. Věnuje se jí podrobně celá oblast automatického řízení nazývaná *identifikace*. Bez matematického popisu by nebyla vůbec možná exaktní analýza jeho chování. Je odvozena řada různých (i velmi sofistikovaných) způsobů identifikace, některé z nich se mohou použít i v reálném čase v běžných provozních podmínkách. Podrobný výklad většiny z nich však poněkud přesahuje rozsah tohoto textu.

Při hledání matematického popisu můžeme postupovat v zásadě dvěma různými způsoby. Buď využijeme fyzikálních závislostí reálného systému a matematicko fyzikální analýzou odvodíme závislost vybuzečné veličiny na buzení. Nebo postupujeme experimentální cestou a vhodným vyhodnocením reálné reakce systému najdeme jeho matematický popis. Oba přístupy mají své výhody i nevýhody, nejlepších výsledků dosahujeme zpravidla kombinací obou.

Ukažme si alespoň dvě jednoduché, často používané metody experimentální identifikace, které jednoduše poskytují kvalitní výsledek.

Aproximační metoda prof. Strejce

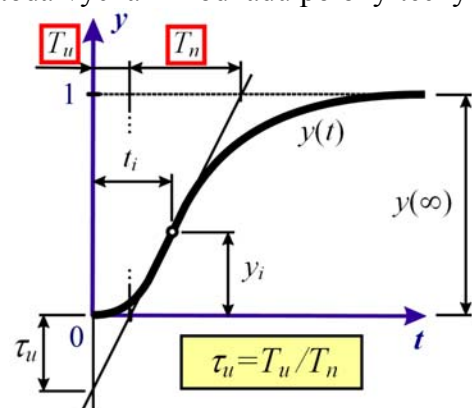


Metoda je založena na aproximaci naměřené přechodové charakteristiky reálného systému náhradním systémem předem zvolené struktury, jehož parametry přizpůsobujeme naměřené dynamice.

Použití metody je omezeno na často se vyskytující dynamické systémy s přechodovou charakteristikou „esovitého“ charakteru, viz obrázek. Metoda vychází z odhadu polohy tečny charakteristiky v jejím inflexním bodu. Normalizujeme nejprve měřítko svislé osy tak, aby ustálená hodnota charakteristiky byla rovna jedné. V tomto měřítku odečteme úsek τ_u , který vytíná tečna na svislé ose, podle jeho velikosti jsou navrženy dva typy aproximačního přenosu :

$$G_a(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} \quad \text{pro} \quad \tau_u > 0,104$$

$$G_a(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad \text{pro} \quad \tau_u < 0,104$$



Buď se jedná o systém n -tého řádu se stejnými časovými konstantami nebo o systém řádu druhého s rozdílnými časovými konstantami. Pro určení příslušných parametrů postupujeme postupně krok po kroku podle bodů metodického návodu, viz příloha. Výsledkem je obrazový

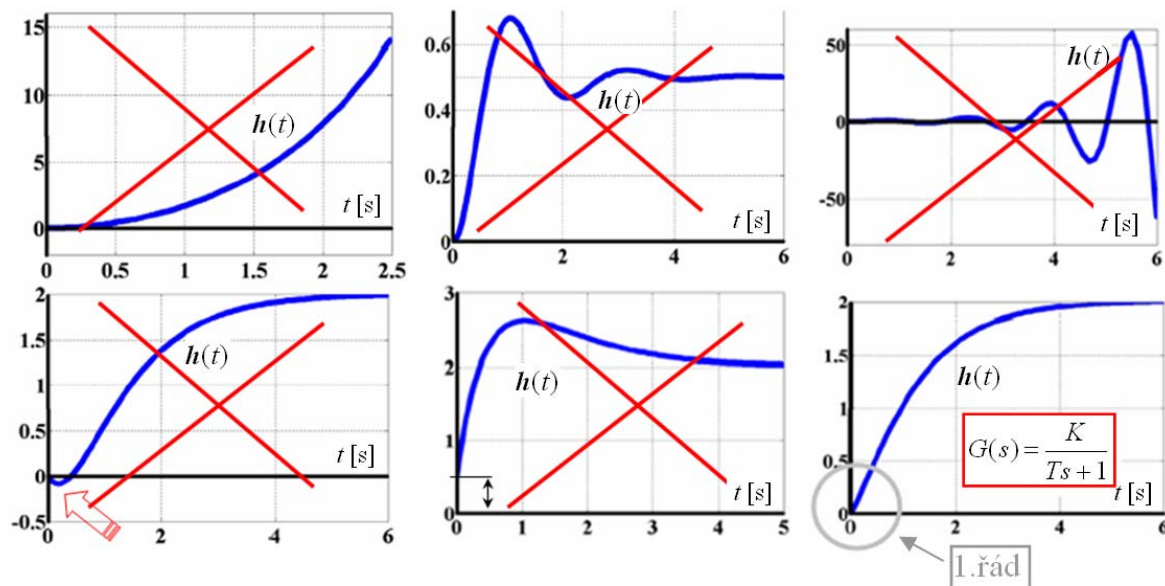
přenos aproximačního systému, případně diferenciální rovnice, která popisuje s jistou přibližností naměřenou dynamiku reálného systému.

Je důležité mít naměřenou reakci pokud možno co nejvíce vybuzeného systému z klidového stavu v okolí předpokládaného provozního režimu skokovou budicí funkcí. Její jednotková velikost není nutná, statické zesílení přenosu finálně upravíme jako podíl skutečných ustálených hodnot vybuzené a budicí funkce. Co největší vybuzení systému je žádoucí z důvodu odlišení užitečného signálu od nežádoucího parazitního šumu měření, který se vždy v reálných podmínkách, ať už chceme či ne, objevuje. Doporučuje se měření několikrát zopakovat a průměrováním vliv chyby potlačit.

Volba polohy tečny v inflexním bodu křivky a následné vyhodnocení je do značné míry subjektivní. Chyba aproximace je však jen velmi málo citlivá na nepřesnosti odhadu inflexního bodu a polohy tečny v místě s nejmenší křivostí křivky. Pro jednoduchost a technicky přijatelnou přesnost se metody relativně často používá.

Omezení:

Omezení vyplývá z volby typů aproximačních přenosů, u kterých předpokládáme pouze kladné hodnoty jejich parametrů T , n resp. T_1 , T_2 . Jsme proto omezení pouze na dynamické systémy stabilní, statické, druhého a vyšších řádů, minimálně fázové, ryze dynamické, bez kmitavých složek.



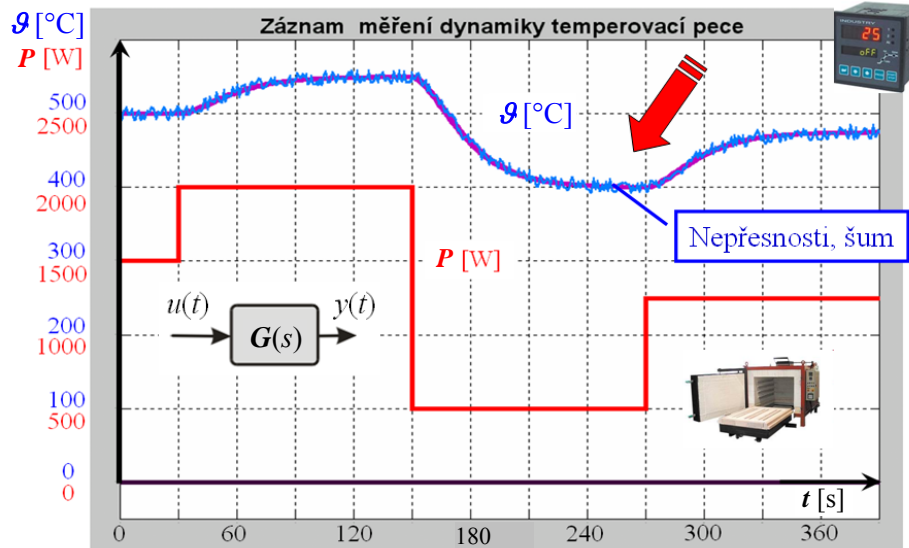
Poslední uvedená charakteristika inflexní bod vůbec nemá, aproximační metodu bychom sice mohli použít jako její krajní případ, pokud bychom volili tečnu v počátku charakteristiky, ale v tomto případě není složitá identifikace vůbec nutná. Jedná se totiž o dynamiku systému prvního řádu (poznáme podle chování na začátku přechodového děje) a v tomto případě odečteme parametry přenosu, statické zesílení K i časovou konstantu T , přímo z grafu.

Nejvíce nepříjemné je omezení pro kmitavé systémy s vlastními přirozenými kmity (v pořadí druhá uvedená charakteristika), které se vyskytují relativně často. V těchto případech musíme bohužel použít jiné metodiky.

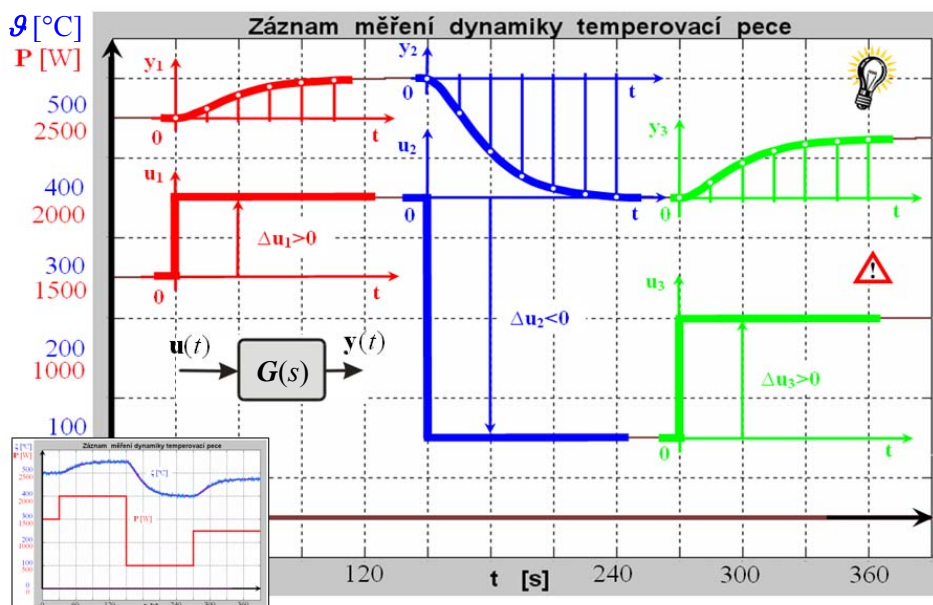
Příklad :

Nalezněme matematický model malé temperovací pece, viz obrázek. Budicím signálem je elektrický příkon topení P [W] a vybuzenou (reagující) veličinou je teplota ϑ [°C] uvnitř pece. Bylo provedeno měření podle obrázku. Systém byl vybuzen opakovně náhlou změnou příkonu vždy v ustáleném stavu a byl zaznamenán průběh měnící se teploty a buzení.

Opakované měření - minimalizace objektivních i subjektivních chyb

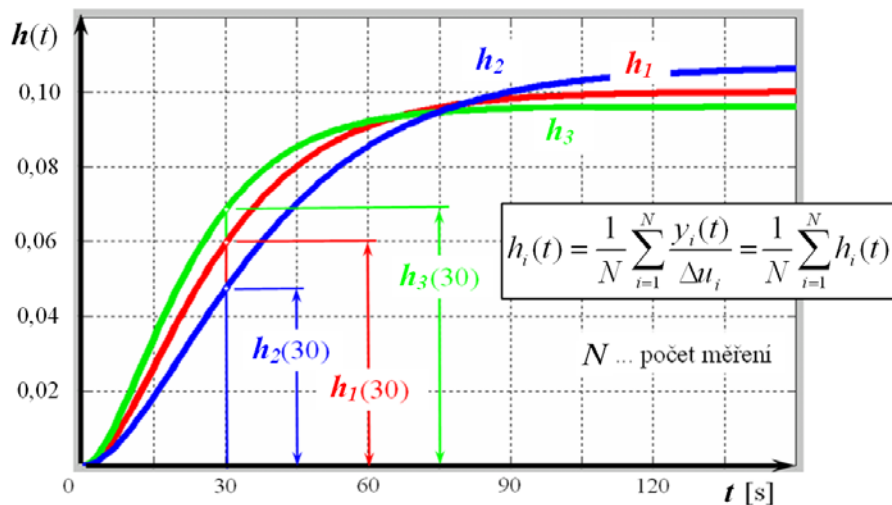


Měření rozdělíme na tři samostatné části vyjadřující vždy reakci systému vybuzeného z klidu skokovou změnou příkonu.

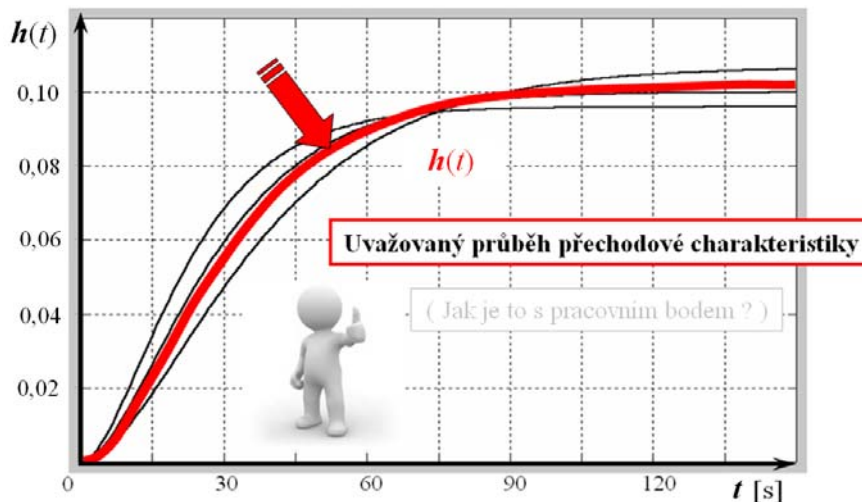


Každou část vyhodnotíme samostatně a dostáváme tři odhady průběhu přechodové charakteristiky, které bývají jen zřídka identické.

Průměrování odezvy systému

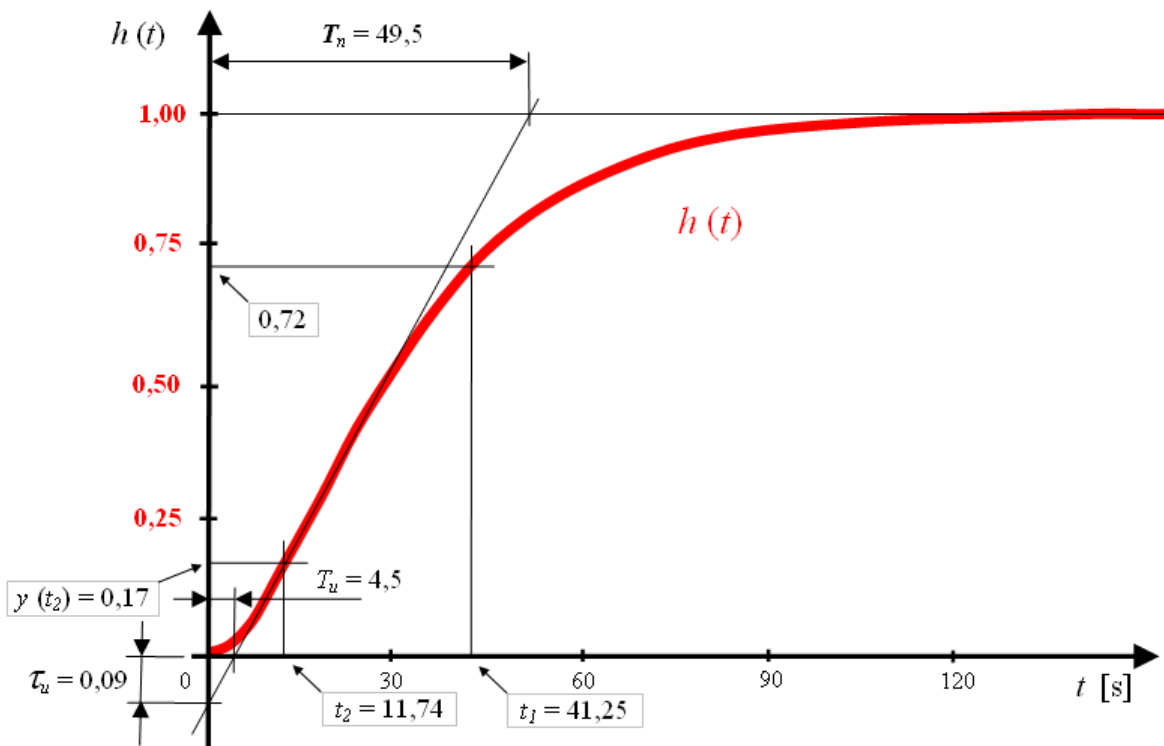


Věrohodný odhad naměřené přechodové charakteristiky získáme jako aritmetický průměr pořadnic jednotlivých měření vztažených vždy k velikosti budícího skoku.



Opakovaným měřením (zde 3x) minimalizujeme nežádoucí subjektivní i objektivní chyby měření. Povšimněme si, že získaný průběh je vyhodnocená reakce z klidového stavu systému přepočtená na jednotkovou změnu buzení (1 W), tedy přechodová charakteristika. Statické zesílení snadno odečteme $K \approx 0,102$ [°C/W] z jejího ustáleného stavu. Tedy např. při změně 500 W (první část měření) se změní teplota po odeznění přechodového děje o 51 °C.

Na takto získaný průběh aplikujeme výše popsanou aproximační metodu, viz příloha.



- Upravíme měřítko svislé osy tak, aby ustálená hodnota průběhu odpovídala jedné. V tomto měřítku dále odečítáme všechny potřebné úseky.
- Nakreslíme tečnu v odhadnutém inflexním bodu průběhu a odečteme parametr $\tau_u \approx 0,09$.
- (Tento parametr lze určit i přesněji podílem *doby průtahu* $T_u = 4,5$ s a *doby náběhu* $T_n = 49,5$ s $\tau_u = T_u / T_n \approx 0,09$.)
- Protože je v našem případě $\tau_u < 0,104$ postupujeme dále podle bodu 8 návodu. Volíme aproximační přenos druhého řádu se dvěma časovými konstantami.

$$G_a(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Pro pořadnici průběhu rovnou hodnotě 0,72 odečteme $t_1 = 41,25$ a vypočteme $T_1 + T_2 = t_1 / 1,2564 = 41,25 / 1,2564 \approx 32,83$.

- Dále podle bodu 9 návodu vypočteme $t_2 = 0,2845 t_1 = 0,2845 \cdot 41,25 \approx 11,74$ a z grafu odečteme pořadnici $y(t_2) = 0,17$. V uvedené tabulce nalezneme odpovídající hodnotu $\tau_2 = T_2 / T_1 = 0,5378 = \tau_{21}$.
- Tutěž hodnotu určíme ještě jiným způsobem podle bodu 10 návodu. Pomocí zde uvedené tabulky přiřadíme hodnotě $\tau_u = 0,09$ (viz bod b) hodnotu τ_2 . Pokud nenajdeme v tabulce přesně tuto hodnotu (jako v tomto případě), buď volíme nejbližší uvedenou nebo interpolací získáme přesnější odhad. Zde $\tau_u = 0,09$ leží mezi 0,084 ($\tau_2 = 0,30$) a 0,092 ($\tau_2 = 0,40$).

Interpolací dostaneme $\tau_2 = 0,30 + (0,40-0,30) \cdot (0,09-0,084) / (0,092-0,084) \approx 0,375 = \tau_{22}$.

Protože se však $\tau_{21} = 0,5378$ a $\tau_{22} = 0,375$ dosti liší, pro hodnotu τ_2 volíme jejich vážený průměr (τ_{22} s poloviční vahou) $\tau_2 = (2 \cdot 0,5378 + 0,375) / 3 \approx 0,48$.

- g) Určili jsme součet $T_1 + T_2 = 32,83$ (viz bod c) a podíl $\tau_2 = T_2 / T_1 = 0,48$ (viz bod e) hledaných časových konstant, můžeme jejich hodnoty vypočítat :

$$T_1 = 32,83 / (1 + 0,48) \approx 22,18 \quad , \quad T_2 = 22,18 \cdot 0,48 \approx 10,65$$

Vzhledem k tomu, že známe i statické zesílení $K = 0,102$, můžeme výsledný aproximační přenos a příslušnou diferenciální rovnici vyjádřit ve tvaru

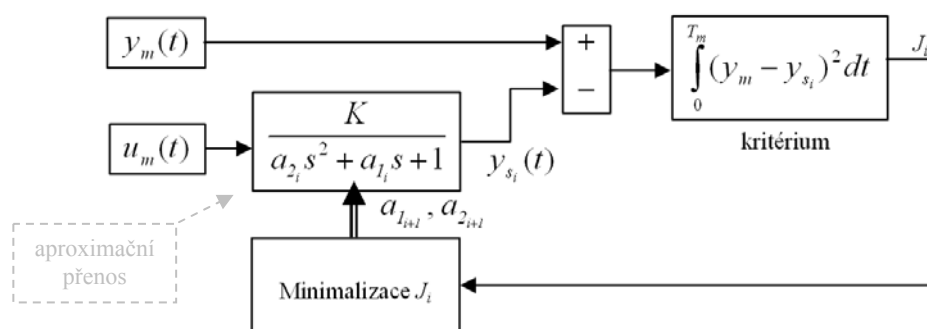
$$G_a(s) = \frac{0,102}{(22,18s + 1)(10,65s + 1)} = \frac{0,102}{236,22s^2 + 32,83s + 1}$$

$$236,22y'' + 32,83y' + y = 0,102u$$

□ Konec příkladu

Rekurzivní metoda identifikace

Obecným principem *rekurzivních* metod je opakovaný výpočet (tzv. rekurze) s postupně se měnícími parametry tak, abychom dosáhli minima *kritériální funkce*. V případě identifikační metody se jedná o postupné změny koeficientů zvoleného aproximačního přenosu s takovou strategií, abychom docílili co nejlepší shody s naměřenou reakcí reálného systému.



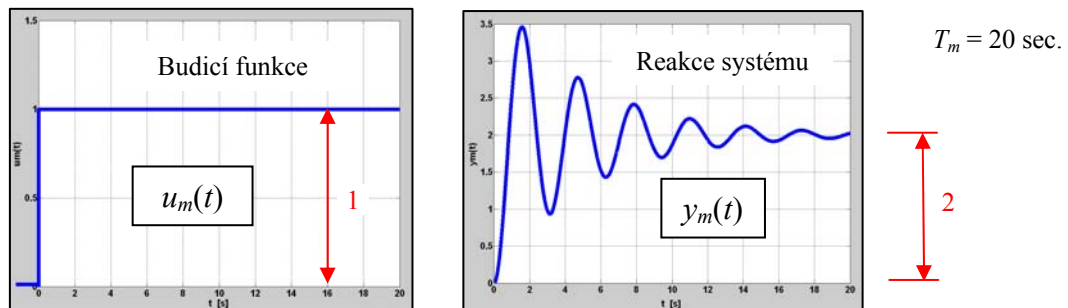
Vstupní informací metody je naměřená reakce $y_m(t)$ reálného systému na budicí signál $u_m(t)$ v provozních podmínkách. Může, ale nemusí to být přechodová funkce nebo reakce na obecné skokové buzení. Důležité však je, aby odstup užitečného signálu od parazitního šumu byl co největší, aby byl dynamický systém dostatečně vybuzen, skokový budicí signál $u_m(t)$ je pro tyto účely vhodný. Prvním krokem je odhad řádu a statického zesílení K systému (na uvedeném obrázku 2. řád). Dalším důležitým krokem je volba kritériální funkce J_i (někdy je označována jako účelová nebo penalizační funkce). V uvedeném příkladu je zvoleno často používané tzv. *kvadratické kritérium*, může však být alternativně voleno jiné, v podstatě zcela libovolné kritériální ohodnocení.

Nejdůležitější součástí celé rekurze je minimalizace účelové funkce $J_i(a_{1_i}, a_{2_i}) \rightarrow \min.$, která je realizována vhodným algoritmem numerické optimalizace. Často je používána tzv. simplexová metoda nebo některá varianta gradientních metod. Podrobný výklad těchto numerických algoritmů překračuje rozsah tohoto textu, výpočetní systémy (např. Matlab) jsou však jimi standardně vybaveny.

Výpočet probíhá tak, že na počátku odhadneme hodnoty parametrů a_{1_0}, a_{2_0} a s nimi simulujeme reakci aproximačního modelu $y_{s_0}(t)$ vybuzeného signálem $u_m(t)$ po dobu T_m (hodnotu T_m , někdy označovanou jako horizont identifikace, volíme vhodně tak, aby pokrývala alespoň dobu praktického ustálení reakce systému). Vypočteme hodnotu kriteriálního funkcionálu J_0 a na základě této hodnoty (resp. starších hodnot, které si průběžně algoritmus pamatuje) optimalizační metoda vyhodnotí novou dvojici parametrů a_{1_1}, a_{2_1} , se kterou se výpočet opakuje. Vypočteme nové kriteriální ohodnocení J_1 , nový odhad parametrů a_{1_2}, a_{2_2} , atd. Tento rekurzivní cyklus probíhá tak dlouho, až dosáhneme požadované přesnosti odhadu nebo nastaveného maximálního počtu kroků.

Výpočet můžeme opakovat s jiným odhadem řádu dynamického systému a podle výsledku usuzovat na jeho správnost. Můžeme obecně volit i jiná kritéria nebo strukturu aproximačního přenosu (příp. i nelineární) a modifikovat tak prakticky libovolně výše popsanou metodiku.

Příklad : Při skokovém zatížení převodového mechanismu s torzní tyčí byla naměřena jeho reakce.



Jedná se o buzení z klidového stavu jednotkovým budícím signálem, tedy o přechodovou charakteristiku tohoto systému. Dynamický systém je kmitavý s výraznými vlastními kmity. Jednoduchá aproximační metoda prof. Strejce se v tomto případě pro identifikaci použít nedá, rekurzivní metoda však vede i v tomto případě k dobrému výsledku.

S ohledem na jednoduchost popisu se snažíme použít přenos aproximačního modelu co nejnižšího řádu, v tomto případě druhého (1. řád nemůže mít kmitavý charakter – proč?). Statické zesílení určíme jako podíl ustálených hodnot vybuzeného a budící funkce.

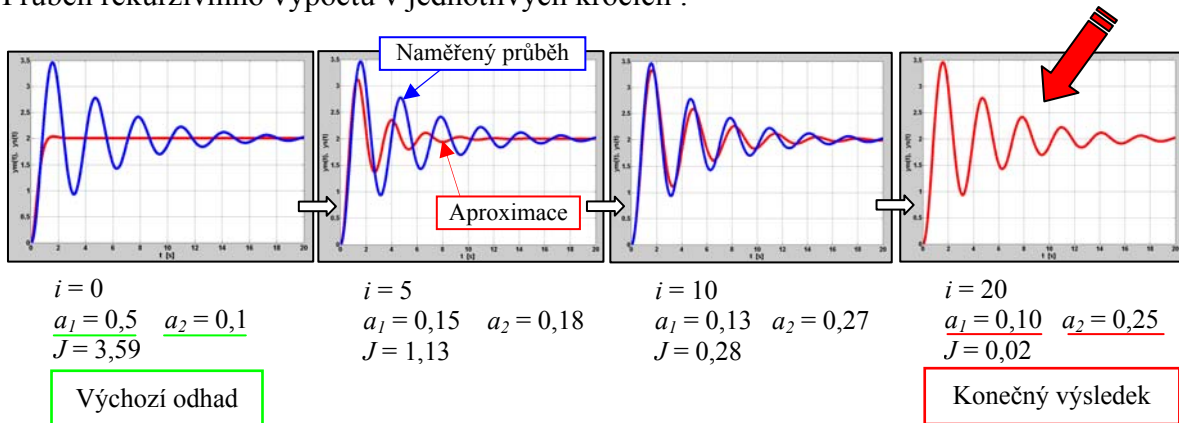
$$K = \frac{y_m(\infty)}{u_m(\infty)} = \frac{2}{1} = 2$$

Aproximační přenos volíme ve tvaru

$$G_a(s) = \frac{2}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$

a v jednotlivých krocích rekurzivně ladíme parametry a_1, a_2 .

Průběh rekurzivního výpočtu v jednotlivých krocích :



Po dvaceti iteračních krocích jsou oba průběhy prakticky totožné, našli jsme matematický model systému.

$$G_a(s) = \frac{2}{0,25 s^2 + 0,1 s + 1} \quad \rightarrow \quad \underline{0,25 y'' + 0,1 y' + y = 2 u} \quad \begin{array}{c} u(t) \rightarrow \boxed{G_a(s)} \rightarrow y(t) \end{array}$$

Konec příkladu

Příloha

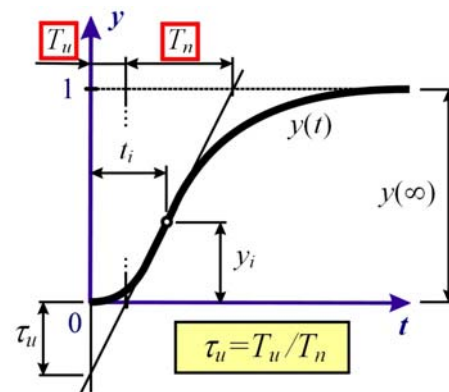
C



Aproximace přechodové
charakteristiky metodou prof.
Strejce

Zcela přesné určení dynamických vlastností reálných systémů je prakticky nemožné. Vyhodnocení přechodové charakteristiky se obvykle spojuje s *aproximací* skutečných vlastností dynamického systému vlastnostmi náhradního systému s předem zvolenou strukturou. Jedna z nejjednodušších a často používaná aproximace je v praxi dobře osvědčená metoda tečny v inflexním bodu přechodové charakteristiky $h(t)$. Touto metodou lze s dobrými výsledky aproximovat *stabilní statické* dynamické systémy s *minimální fází* druhého a vyšších řádů *bez kmitavých složek* (bez vlastních frekvencí). Je to nejčastější případ regulovaných soustav jejichž všechny póly přenosu (kořeny charakteristické rovnice) jsou *reálné záporné* a čitatelem přenosu je konstanta. Uvedená metoda se dá rozšířit i na aproximaci dynamických systémů s dopravním zpožděním, viz bod 7, resp.12 dále uvedeného postupu. Pro účely aproximace je možné pracovat s odezvou zkoumaného systému $y(t)$ vybuzeného z klidu *skokovou* změnou budicího signálu *libovolné velikosti* Δu , potom $y(t) = h(t) \Delta u$.

Navrhuje se skutečné vlastnosti systému aproximovat buď přenosem n -tého řádu s vesměs stejnými časovými konstantami T nebo přenosem druhého řádu s různě velkými časovými konstantami T_1, T_2 . Pro jeden nebo druhý způsob aproximace se rozhodneme podle úseku $\tau_u = T_u / T_n$, viz obr. 1. Vychází se ze skutečnosti, že přechodová charakteristika je v okolí inflexního bodu takřka přímková, takže lze tečnu v tomto bodě poměrně přesně určit.



obr. 1

Aproximační přenosy :

$G_a(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} \quad \text{pro } \tau_u > 0,104$	$G_a(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad \text{pro } \tau_u < 0,104$
--	--

Postup určení aproximačního přenosu $G_a(s)$:

1. Změřenou přechodovou charakteristiku, resp. odezvu $y(t)$, překreslíme v novém měřítku tak, aby se *ustálená hodnota* rovnala *jedné*.
2. Nakreslíme tečnu v odhadnutém inflexním bodu přechodové charakteristiky, určíme doby *průtahu* T_u a *náběhu* T_n a jejich poměr $\tau_u = T_u / T_n$.
3. Je-li $\tau_u > 0,104$, zvolíme pro aproximaci systém n -tého řádu se stejnými časovými konstantami T . (Pokud tato podmínka splněna není, pokračujeme podle bodu 8).
4. Podle hodnoty τ_u určíme z tab.1 nejbližší řád n aproximačního přenosu a také příslušnou pořadnici y_i inflexního bodu.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ_u	0	0,104	0,218	0,319	0,410	0,493	0,570	0,642	0,709	0,771
y_i	0	0,264	0,323	0,353	0,371	0,384	0,394	0,401	0,407	0,413
T_u / T	0	0,282	0,805	1,425	2,100	2,811	3,549	4,307	5,081	5,861
T_n / T	1,000	2,718	3,695	4,463	5,119	5,699	6,226	6,711	7,144	7,590

tab. 1

5. Z tab. 1 odečteme hodnotu podílu T_u / T , resp. T_n / T a určíme časovou konstantu T . Časovou konstantu lze určit také tak, že z tab. 1 odečteme pořadnici inflexního bodu y_i a z grafu přechodové charakteristiky určíme hodnotu t_i , potom $T = t_i / (n-1)$. Doporučuje se, zejména v případech, kdy T_u je malá (a je tedy určena s velkou relativní chybou), vyjádřit hodnotu T všemi způsoby a uvažovat *vážený aritmetický průměr* s tím, že T odvozené z T_u bereme s *poloviční vahou*.
6. Statické zesílení K určíme jako podíl ustálených hodnot vybuzeného a budícího signálu

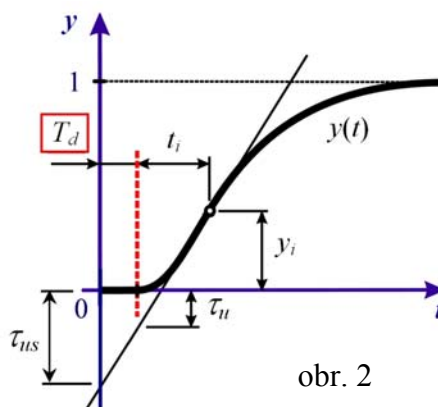
$$K = [y(\infty) - y(0)] / [u(\infty) - u(0)] = \Delta y / \Delta u$$

Δy ... skutečný rozdíl fyzikální veličiny na výstupu dynamického systému

$$\Delta y = y(\infty) - y(0)$$

Δu ... velikost realizovaného skoku skutečné fyzikální veličiny na vstupu systému, při kterém byla reakce měřena $\Delta u = u(\infty) - u(0)$.

7. Postup podle bodu 4. lze modifikovat i pro systémy s *dopravním zpožděním* T_d . Buď z konstrukce a matematicko-fyzikální analýzy systému objektu hodnotu dopravního zpoždění T_d známe a návrh modifikujeme podle obr. 2 nebo ke skutečně odečtenému τ_{us} (viz obr. 2) najdeme nejbližší nižší hodnotu τ_u uvedenou v tab. 1 a T_d určíme. Další postup je naprosto stejný jako u systémů bez dopravního zpoždění s tím, že výsledný obrazový přenos aproximačního systému bude ve tvaru

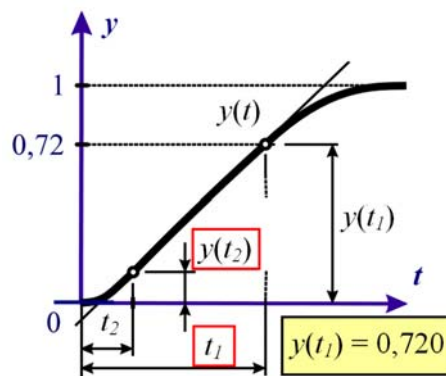


$$G_a(s) = \frac{K}{(T s + 1)^n} \cdot e^{-T_d s} \quad T_d \dots \text{dopravní zpoždění}$$

8. Je-li $\tau_u < 0,104$, zvolíme pro aproximaci systém *druhého řádu* s různě velkými časovými konstantami T_1, T_2 . Vychází se z toho, že pro hodnotu pořadnice přechodové charakteristiky $y(t_1) = 0,720$ je čas t_1 určen součtem časových konstant systému

$$T_1 + T_2 = t_1 / 1,2564$$

Z grafu přechodové charakteristiky odečteme časový úsek t_1 a součet $(T_1 + T_2)$ vypočteme.



9. Naopak pro čas

$$t_2 = 0,3574 (T_1 + T_2) = 0,2845 t_1$$

jsou pořadnice přechodové charakteristiky $y(t_2)$ nejvíce závislé na poměru časových konstant $\tau_2 = T_2 / T_1$. Závislost je uvedena v tab. 2

$y(t_2)$	0,30	0,29	0,28	0,27	0,26
τ_2	0,0000	0,0228	0,0435	0,0635	0,0837
$y(t_2)$	0,25	0,24	0,23	0,22	0,21
τ_2	0,1049	0,1280	0,1539	0,1838	0,2196
$y(t_2)$	0,20	0,19	0,18	0,17	0,1611
τ_2	0,2639	0,3216	0,4031	0,5378	1,0000

tab. 2

Vypočteme t_2 , z grafu přechodové charakteristiky odečteme $y(t_2)$ a z tab. 2 určíme $\tau_2 = T_2 / T_1$.

10. Poměr $\tau_2 = T_2 / T_1$ lze určit i jiným způsobem. V případě aproximačního přenosu uvažovaného typu nezávisejí $\tau_u = T_u / T_n$ a y_i na velikosti časových konstant T_2 a T_1 , ale pouze na jejich poměru $\tau_2 = T_2 / T_1$. Závislosti jsou uvedeny v tab. 3.

$\tau_u = T_u / T_n$	0,016	0,030	0,050	0,062	0,072	0,084	0,092
$\tau_2 = T_2 / T_1$	0,02	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40
y_i	0,058	0,104	0,148	0,177	0,197	0,224	0,240
$\tau_u = T_u / T_n$	0,097	0,100	0,102	0,103	0,103	0,104	
$\tau_2 = T_2 / T_1$	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	
y_i	0,250	0,256	0,260	0,263	0,264	0,264	

tab. 3

Z grafu přechodové charakteristiky odečteme T_u , T_n a vypočteme $\tau_u = T_u / T_n$, z tabulky tab. 3 určíme $\tau_2 = T_2 / T_1$.

Součet časových konstant lze stanovit poměrně přesně (viz bod 8), jejich poměr však pro $\tau_2 \rightarrow 1$ z tab. 2, příp. tab. 3 jen dosti nepřesně. Proto pro $\tau_2 > 0,5$ aproximujeme raději přenosem se stejnými časovými konstantami. Pokud vychází τ_2 podle bodů 9 a 10 různě, doporučuje se uvažovat jejich vážený aritmetický průměr, přičemž τ_2 určené z bodu 10 (zatíženo větší relativní chybou) s poloviční vahou.

11. Vzhledem k tomu, že jsme určili *součet a poměr* obou hledaných časových konstant T_1 a T_2 , můžeme jejich hodnoty z těchto vztahů vypočítat. Hodnotu statického zesílení K určíme stejně jako v bodu 6.
12. Můžeme zřejmě i v tomto případě volit postup podle bodu 7. a zcela analogicky určit aproximační přenos *s dopravním zpožděním* a obrazovým přenosem ve tvaru

$$G_a(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \cdot e^{-T_d s} \quad T_d \dots \text{dopravní zpoždění}$$