EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Definiční obor - příklady

Příklad 1:

Jaký je definiční obor funkce: $f(x) = -2x^2 + 40x$?

Řešení:

Funkci můžeme rozdělit na součet dvou funkcí $-2x^2$ a $40x$. Definiční obor obou funkcí je celý obor reálných čísel, jelikož do nich můžeme dosadit jakékoliv reálné číslo od záporného nekonečna až po kladné nekonečno. Operace součtu na tomto faktu nic nemění. Můžeme tedy napsat:

$$\underline{\underline{D(f) = R}}.$$

Příklad 2:

Jaký je definiční obor funkce: $f(x) = \sin(x+1)$?

Řešení:

Funkce $x + 1$ je definovaná na celém R a stejně tak funkce sinus. Výsledek je tedy opět:

$$\underline{\underline{D(f) = R}}.$$

Příklad 3:

Je funkce $f(x) = tg(x)$ definována pro $x = -\frac{105\pi}{14}$?

Řešení:

Z definice funkce tangens víme, že jediné body, ve kterých není definována, jsou $x = \frac{\pi}{2} + k.\pi$. Potřebujeme tedy zjistit, zda hodnota ze zadání není lichý násobek $\frac{\pi}{2}$. Pokud si čitatel a jmenovatel rozložíme na součin prvočísel, můžeme se pokusit zlomek zjednodušit zkrácením.

$$x = -\frac{105\pi}{14} = -\frac{5.3.7\pi}{2.7} = -\frac{5.3\pi}{2} = -\frac{15\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 8\pi$$

Vidíme, že se nám problém zjednodušil. $-\frac{15\pi}{2}$ rozhodně je lichý násobek $\frac{\pi}{2}$. Odpovědí tedy je, že bod $x=-\frac{105\pi}{14}$ nepatří do definičního oboru zadané funkce.

$$\underline{\underline{-\frac{105\pi}{14}\notin D(f)}}$$

Příklad 4:

Jaký je definiční obor funkce: $f(x)=\log_{237}\left(\frac{x}{2}-1\right)$?

Řešení:

Z definice funkce logaritmus víme, že její definiční obor nezávisí na jejím základu (v našem případě 237). Jediné co tuto funkci omezuje je, že její argument musí být větší než nula:

$$\frac{x}{2}-1>0$$

$$\frac{x}{2}>1$$

$$\underline{x>2}$$

Definiční obor funkce je tedy:

$$\underline{\underline{D(f)=(2\,;\infty)}}.$$

Příklad 5:

Jaký je definiční obor funkce: $f(x)=\sqrt{3-x}$?

Řešení:

Aby byla funkce odmocnina definována, musí být její argument kladný (na rozdíl od minulého příkladu je nula přípustná).

$$3-x\geq 0$$

$$3\geq x$$

$$\underline{x\leq 3}$$

Můžeme tedy zapsat definiční obor funkce jako:

$$\underline{\underline{D(f) = (-\infty\,; 3\rangle}}\,.$$

Příklad 6:

Jaký je definiční obor funkce: $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + x}$?

Řešení:

U této lomené vidíme, že výraz v čitateli nám definiční obor nijak neomezí. Zajímá nás pouze podmínka, že nesmíme dělit nulou. Musíme tedy zajistit, aby se jmenovatel nerovnal nule.

$$x^2 + x \neq 0$$

Mohly bychom tuto rovnici řešit jako kvadratickou, ale můžeme použít jednodušší způsob:

$$x.(x+1) \neq 0$$

Protože víme, že násobíme-li nulou cokoliv, výsledkem je nula, nule se můžou rovnat oba násobené členy x a $(x + 1)$. Musíme tedy zohlednit oba případy.

$$\underline{x \neq 0} \qquad\qquad\qquad x + 1 \neq 0$$

$$\underline{x \neq -1}$$

Definiční obor zadané funkce tedy je:

$$\underline{\underline{D(f) = R - \{-1, 0\}}}$$

Příklad 7:

Jaký je definiční obor funkce: $f(x) = \sqrt{-x^2}$?

Řešení:

Pod odmocninou nesmí být záporné číslo. Přepíšeme si tuto podmínku:

$$-x^2 \geq 0$$

Víme, že funkce x^2 je vždy kladná $\langle 0\,;\infty)$, to znamená, že funkce $-x^2$ bude vždy záporná $(-\infty\,;0\rangle$. Ale zadaná funkce je definovaná pouze pokud výraz pod odmocninou bude z množiny $\langle 0\,;\infty)$. Najdeme tedy jejich průnik:

$$(-\infty\,;0\rangle \cap \langle 0\,;\infty) = \{0\}$$

Průnikem množin a zároveň definičním oborem je množina s jediným prvkem. Funkce je tedy definována jen v nule.

$$\underline{\underline{D(f) = \{0\}}}$$

Příklad 8:

Jaký je definiční obor funkce: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(x) - 1}}$?

Řešení:

Ve funkci máme hned dvě funkce, s omezeným definičním oborem, odmocninu a lomenou funkci. Postupujeme vždy od nejvnitřnější funkce ven. Samotná funkce kosinus definiční obor nijak neovlivní, ale pod odmocninou nesmí být záporné číslo.

$$\cos(x) - 1 \geq 0$$

$$\cos(x) \geq 1$$

Maximální hodnota, které funkce kosinus může dosáhnout je 1. To znamená, že výraz pod odmocninou bude nezáporný, pokud bude *cos* (x) = 1. To bude splněno, pokud x bude sudým násobkem π.

Pokud dosadíme do původní rovnice, dostaneme následující:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-1}} = \frac{1}{\sqrt{0}}.$$

Zatímco pro odmocninu je nula přípustná hodnota, lomenou funkce v nule není definována. Můžeme tedy říct, že **v oboru reálných čísel nemá zadaná funkce řešení**.

Příklad 9:

Jaký je definiční obor funkce: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+2}$?

Řešení:

Z této funkce vyplývají dvě podmínky omezující její definiční obor. První je dána lomenou funkcí, jmenovatel se nesmí rovnat nule:

$$x+2\neq 0$$

$$\underline{x\neq -2}$$

Druhá podmínka vychází z odmocniny. Víme, že její argument nesmí být záporný:

$$x+3\geq 0$$

$$\underline{x\geq -3}$$

Vychází nám tedy definiční obor:

$$D(f)=\langle -3\,;\infty)-\{-2\}$$

Alternativně můžeme definiční obor zadané funkce napsat jako sjednocení dvou intervalů.

$$\underline{\underline{D(f)=\langle -3\,;-2)\cup(-2\,;\infty)}}$$

Příklad 10:

Jaký je definiční obor funkce: $f(x)=\sqrt{x+8}-\dfrac{2}{\sqrt{3-x}}$?

Řešení:

Tentokrát má zadaná funkce tři podmínky omezující její definiční obor.

1. Argument první odmocniny nesmí být záporný.

$$x+8\geq 0$$

$$\underline{x\geq -8}$$

2. Argument druhé odmocniny nesmí být záporný.

$$3-x\geq 0$$

$$\underline{x\leq 3}$$

3. Zároveň jmenovatel zlomku nesmí být nulový.

$$\sqrt{3-x} \neq 0$$

$$3-x \neq 0$$

$$\underline{x \neq 3}$$

Z těchto tří podmínek můžeme opět složit definiční obor.

$$D(f) = \langle -8\,;3\rangle - \{3\}$$

Což můžeme přepsat následovně:

$$\underline{\underline{D(f) = \langle -8\,;3)}}$$

Příklad 11:

Jaký je definiční obor funkce: $f(x) = \frac{x-\log(x+2)}{x^2-1} - \frac{4x^2-1}{x} + \frac{\sin(x)}{2x-4}$?

Řešení:

V zadané funkci můžeme tentokrát nalézt celkem čtyři funkce, které nám omezí definiční obor.

1. Argument logaritmu musí být větší než nula.

$$x+2>0$$

$$\underline{x>-2}$$

2. Jmenovatel prvního zlomku se nesmí rovnat nule.

$$x^2-1 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1$$

Zde nesmíme zapomenout, že po odmocnění dostaneme dva výsledky:

$$\underline{x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq -1}$$

3. Jmenovatel druhého zlomku se nesmí rovnat nule.

$$\underline{x \neq 0}$$

4. Jmenovatel třetího zlomku se nesmí rovnat nule.

$$2x-4 \neq 0$$

$$2x \neq 4$$

$$\underline{x \neq 2}$$

Pokud všechny tyto podmínky spojíme dohromady, získáme definiční obor zadané funkce.

$$D(f) = (-2\,;\infty) - \{-1, 0, 1, 2\}$$

I zde jde definiční obor přepsat jako sjednocení intervalů:

$$\underline{\underline{D(f) = (-2\,;-1) \cup (-1\,;0) \cup (0\,;1) \cup (1\,;2) \cup (2\,;\infty)}}$$

Realizováno za finanční podpory ESF a státního rozpočtu ČR v rámci v projektu "*Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0*" *CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329* – ESF OP VVV

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY