EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Absolutní hodnota

Definice: Absolutní hodnota reálného čísla ***x*** je reálné číslo |***x***|, pro které platí:

$$\text{je-li } x \geq 0 \rightarrow |x| = x,$$

$$\text{je-li } x < 0 \rightarrow |x| = -x.$$

Z definice vidíme, že chceme-li u výrazu odstranit absolutní hodnotu, musíme nejprve vědět, jaké je číslo uvnitř absolutní hodnoty - nezáporné, nebo záporné.

Pozn.: Termínem "nezáporný" se myslí množina kladných čísel včetně nuly.

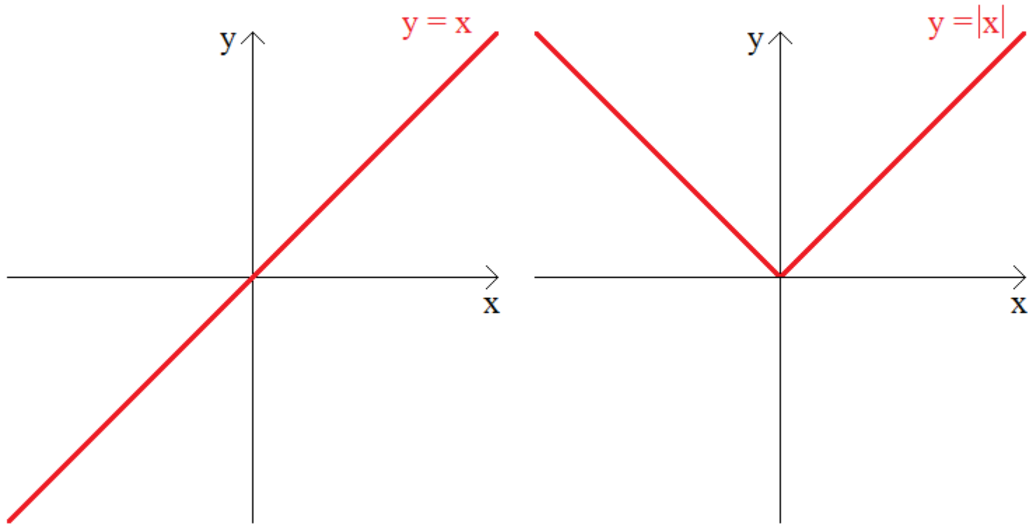
Uveďme jednoduché příklady:

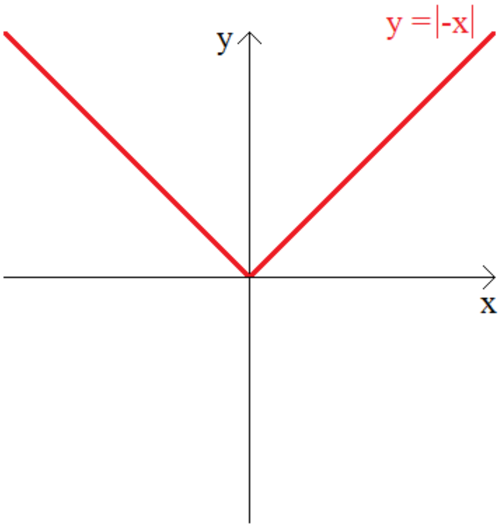
$$|2| = 2, \qquad |-5| = 5, \qquad \left|\frac{1}{7}\right| = \frac{1}{7}, \qquad \left|-\frac{53}{71}\right| = \frac{53}{71}.$$

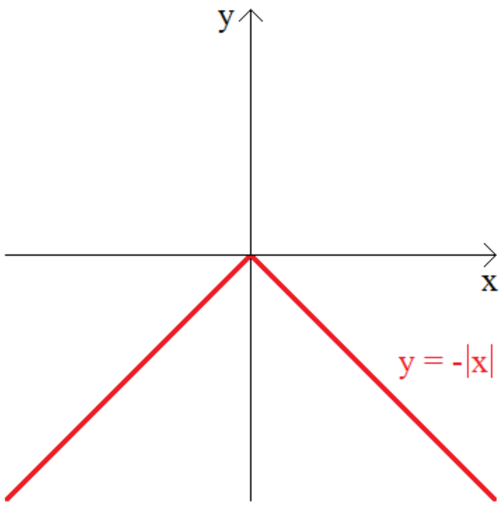
Stejně tak ale platí i následující:

$$-|4| = -4, \qquad -|-1| = -1.$$

Tuto závislost můžeme vyjádřit graficky následovně.





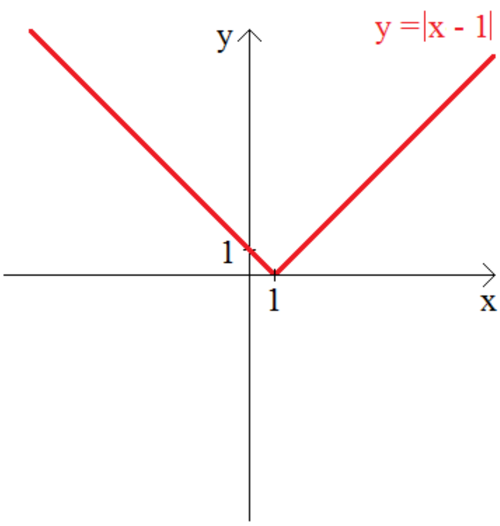


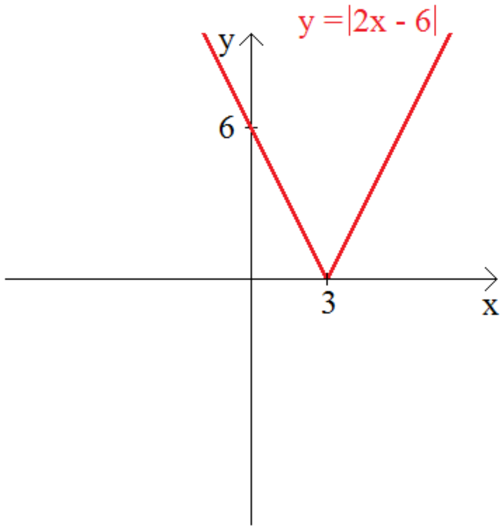
V případě složitějších výrazů funguje absolutní hodnota úplně stejně. Dle definice víme, že např. výrazu $|x - 1|$ můžou odpovídat dva výrazy bez absolutní hodnoty:

$$\text{je-li } x - 1 \geq 0 \rightarrow |x - 1| = x - 1,$$

$$\text{je-li } x - 1 < 0 \rightarrow |x - 1| = -(x - 1) = -x + 1.$$

Pro lepší pochopení můžeme opět využít grafického znázornění.





Další obecná vlastnost absolutní hodnoty, která je jistě patrná jak z uvedených příkladů i grafů je, že $|\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{0}$.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rovnice s absolutní hodnotou

Pro řešení rovnic s absolutní hodnotou je nutné si definovat tzv. "***nulový bod***" absolutní hodnoty. Rozumí se jím takové číslo x, pro něž je absolutní hodnota rovna nule. Ukažme si to na následujících příkladech:

pro výraz |x - 1| je nulový bod 1,

pro výraz |x + 4| je nulový bod -4,

pro výraz |2x - 3| je nulový bod $\frac{3}{2}$,

pro výraz |1 - x| je nulový bod stejný jako pro výraz |x - 1|. Z dříve uvedených příkladů totiž víme, že absolutní hodnota čísla se rovná absolutní hodnotě stejného čísla s opačným znaménkem tj. |x| = |- x|. Musí tedy platit také následující úprava:

$$|1-x| = |-(-1+x)| = |-1+x| = |x-1|.$$

Nulový bod rozdělí množinu všech reálných čísel *R* na dvě podmnožiny: R_1, pro jejíž prvky je výraz uvnitř absolutní hodnoty záporný a R_2, pro jejíž prvky je výraz uvnitř absolutní hodnoty nezáporný. Pak můžeme říct, že $R_1 \cup R_2 = R$.

Ukažme si to na příkladu:

Výraz |2x - 6| má nulový bod v x = 3. Definiční obor tedy můžeme rozdělit na $R_1 = (-\infty\ ; 3)$ a $R_2 = \langle 3\ ; \infty)$. Můžeme tedy výraz rozdělit na dvě samostatné rovnice:

$$x \in (-\infty\,; 3) \Rightarrow |2x-6| = -2x+6$$

$$x \in \langle 3\,; \infty) \Rightarrow |2x-6| = 2x-6$$

Příklad:

Řešte v *R* rovnici |2x - 6| = 10

Řešení:

Nulový bod absolutní hodnoty je v x = 3. Rozdělíme tedy úlohu na dvě rovnice a řešíme samostatně:

1) $$x \in (-\infty\,; 3) \Rightarrow 2x - 6 < 0 \Rightarrow |2x-6| = -2x+6$$

rovnice má tedy tvar:

$$-2x+6=10$$

$$-2x=4$$

$$\underline{x=-2}$$

Číslo -2 náleží množině (-∞ ; 3) a rovnici splňuje (ověříme dosazením), takže -2 je kořenem rovnice.

2) $$x \in \langle 3\,; \infty) \Rightarrow 2x - 6 > 0 \Rightarrow |2x-6| = 2x-6$$

rovnice má tedy tvar:

$$2x-6=10$$

$$2x=16$$

$$\underline{x=8}$$

Číslo 8 náleží množině <3 ; ∞) a rovnici splňuje (ověříme dosazením), takže 8 je taktéž kořenem řešené rovnice. Množina kořenů rovnice je tedy ***K* = {-2, 8}**.

Příklad:

Řešte v *R* rovnici |1 - x| - |2x + 6| = 1

Řešení:

Jak jsme si již ukázali, rovnici můžeme upravit do tvaru |x - 1| - |2x + 6| = 1

Nulové body absolutních hodnot jsou 1 a -3. Úlohu si tedy musíme rozdělit na tři samostatné rovnice pro tři podmnožiny R_1 = (-∞ ; -3), R_2 = <-3 ; 1> a R_3 = (1 ; ∞).

1) Uvažujme nejprve x ∈ (-∞ ; -3). Zvolíme si libovolné číslo z intervalu, např. -10. Dosadíme ho do prvního výrazu x - 1 a zjistíme, zda je výsledek záporný, nebo kladný. Po dosazení vidíme, že je výraz záporný (-10 - 1 = -11). Pro tento interval budeme tedy měnit u tohoto výrazu znaménko na opačné:

$$x \in (-\infty\,; -3) \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -x+1$$

Totéž provedeme i s druhým výrazem v rovnici 2x + 6 a zjistíme, že je rovněž záporný. I zde budeme obracet znaménko:

$$x \in (-\infty; -3) \Rightarrow 2x + 6 < 0 \Rightarrow |2x + 6| = -2x - 6$$

Celá rovnice pro tento interval tedy bude mít tvar:

$$-x + 1 - (-2x - 6) = 1$$

$$-x + 1 + 2x + 6 = 1$$

$$x + 7 = 1$$

$$\underline{x = -6}$$

Jelikož je -6 $\in$ (-∞ ; -3) a zároveň rovnice vychází po zpětném dosazení, můžeme prohlásit -6 za jeden z kořenů rovnice.

2) Stejně pokračujeme pro druhý interval <-3 ; 1> a zvolíme si z něj libovolné číslo, samozřejmě kromě nulových bodů, např. x = 0. Po dosazení zjistíme, že výraz x - 1 je záporný (0 - 1 = -1) a výraz 2x + 6 je kladný (0 + 6 = 6). Znaménko tedy změníme pouze u prvního výrazu |x - 1| = -x + 1, zatímco druhý zůstane stejný |2x + 6| = 2x + 6. Rovnice tedy bude pro druhý interval vypadat následovně:

$$-x + 1 - (2x + 6) = 1$$

$$-x + 1 - 2x - 6 = 1$$

$$-3x - 5 = 1$$

$$-3x = 6$$

$$\underline{x = -2}$$

Číslo -2 $\in$ <-3 ; 1> a při zpětném dosazení zjistíme, že i -2 je kořenem rovnice.

3) Z posledního intervalu (1 ; ∞) opět vybereme náhodné číslo, např. 10 a zjistíme, že oba výrazy jsou kladné, takže |x - 1| = x - 1 a |2x + 6| = 2x + 6.

$$x - 1 - (2x + 6) = 1$$

$$x - 1 - 2x - 6 = 1$$

$$-x - 7 = 1$$

$$\underline{x = -8}$$

Číslo -8 rozhodně nenáleží intervalu (1 ; ∞), pro který jsme rovnici řešili, takže nemůže být jejím kořenem. Kořeny jsou tedy pouze dva $x_1 = -6$ a $x_2 = -2$, tedy ***K* = {-6, -2}**.

Příklad:

Řešte v *R* rovnici |2x +4| + |x| - 2 = x + 8

Řešení:

Rovnice má opět dvě absolutní hodnoty, tedy i dva nulové body: -2 a 0. Díky nim získáme tři intervaly (-∞ ; -2), <-2 ; 0> a (0 ; ∞). Zjistíme znaménka výrazů pro jednotlivé intervaly a pro přehlednost zaneseme do tabulky:

	2x + 4	x	rovnice
(-∞ ; -2)	-	-	-2x - 4 - x - 2 = x + 8
<-2 ; 0>	+	-	2x + 4 - x - 2 = x + 8
(0 ; ∞)	+	+	2x + 4 + x - 2 = x + 8

1) $x \in (-\infty ; -2)$

$$-2x-4-x-2=x+8$$

$$-3x-6=x+8$$

$$-4x=14$$

$$x=-\frac{7}{2}\in(-\infty;-2)$$

Po provedení zkoušky zjistíme, že $-\frac{7}{2}$ je prvním kořenem rovnice.

2) $x \in \langle -2 ; 0 \rangle$

$$2x+4-x-2=x+8$$

$$x+2=x+8$$

$$2=8$$

Rovnice v tomto intervalu nemá řešení.

3) $x \in (0\,;\infty)$

$$2x+4+x-2=x+8$$

$$3x+2=x+8$$

$$2x=6$$

$$x=3\in(0\,;\infty)$$

Po provedení zkoušky zjistíme, že 3 je také kořenem rovnice.

Rovnice má tedy dva kořeny $x_1 = -\frac{7}{2}$ a $x_2 = 3$, tedy ***K* = {$-\frac{7}{2}$, -2}**.

Nerovnice s absolutní hodnotou

Postup řešení nerovnic s absolutní hodnotou je obdobný jako u rovnic. Jediným rozdílem je, že výsledkem nejsou body ale intervaly.

Příklad:

Řešte v *R* rovnici $|x+1| > 5$

Řešení:

Řešíme stejně jako u rovnic, tedy pro absolutní hodnotu najdeme nulový bod a rozdělíme jím definiční obor. Pro výraz x + 1 je nulový bod -1. Získáme dva intervaly (-∞ ; -1), <-1 ; ∞), pro které opět řešíme zvlášť:

1) $x\in(-\infty\,;-1)\Rightarrow|x+1|=-x-1$

Nerovnice má tedy v prvním intervalu tvar:

$$-x-1>5$$

$$-x>6$$

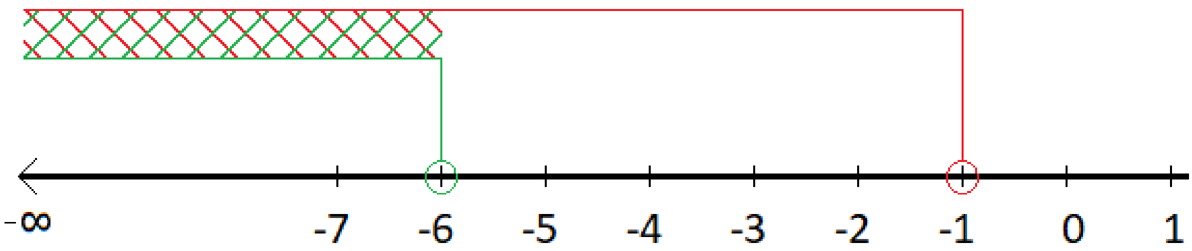
Při násobení -1 nesmíme zapomenout obrátit znaménko > stejně jako u klasických nerovnic.

$$\underline{x<-6}$$

Pokud má být x ostře menší než -6, vychází nám interval (-∞ ; -6). Protože se ale ze zadání pro tuto nerovnici pohybujeme v intervalu (-∞ ; -1), abychom našli opravdový výsledek, musíme najít ***průnik*** těchto dvou intervalů. Bude se jednat o takový interval, který je společný oběma původním intervalům. V tomto případě dostaneme následující:

$$(-\infty;-6)\cap(-\infty;-1)=\underline{(-\infty;-6)}$$

Graficky lze tuto operaci reprezentovat následovně:



2) $x\in\langle -1;\infty)\Rightarrow|x+1|=x+1$

Nerovnice má tedy v druhém intervalu tvar:

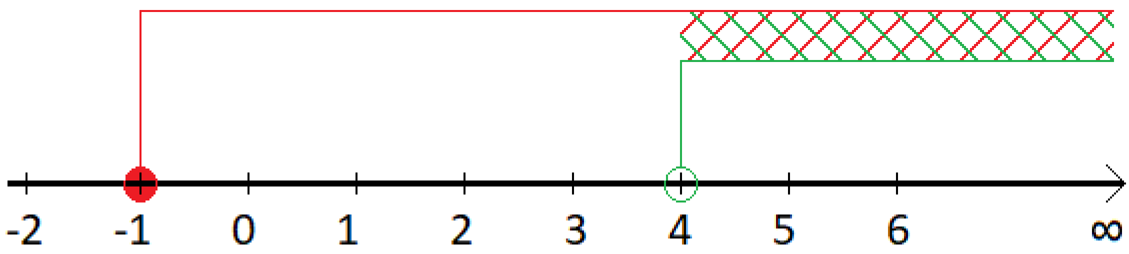
$$x+1>5$$

$$\underline{x>4}$$

Na zadaném intervalu <-1 ; ∞) nám vyšel interval (4 ; ∞). Stejným způsobem provedeme jejich průnik a získáme výsledek:

$$(4;\infty)\cap\langle -1;\infty)=\underline{(4;\infty)}$$

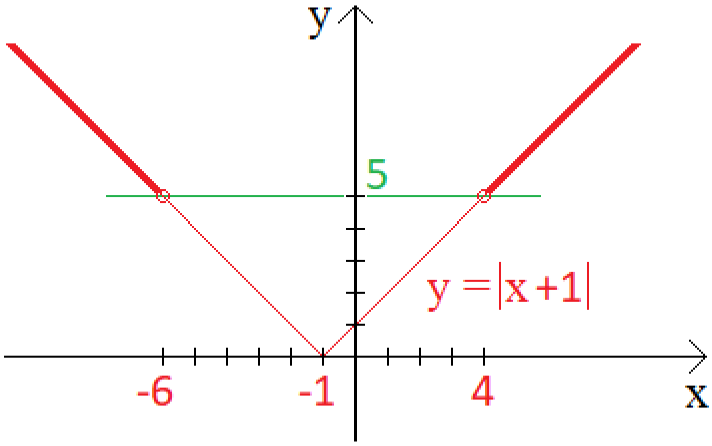
Obdobně můžeme graficky reprezentovat:



Výsledkem nerovnice |x +1| > 5 je ***sjednocení*** výsledných intervalů:

$$\underline{\underline{x\in(-\infty;-6)\cup(4;\infty)}}$$

Tento výsledek jde opět reprezentovat graficky jako červeně zvýrazněná část následujícího grafu:



Realizováno za finanční podpory ESF a státního rozpočtu ČR v rámci v projektu "*Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0*" *CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329* – ESF OP VVV

Použitá literatura

Pešková E., Mulačová J.: *Matematika - Přehled středoškolského učiva*. ORFEUS, Szalai & Smolan, Praha, 1992.