EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Základy Kombinatoriky

Kombinatorika je obor matematiky, zabývající se uspořádáváním prvků podle jistých pravidel do skupin a počítáním množství těchto skupin.

Zde budeme rozlišovat šest způsobů, jakým lze uspořádání prvků do skupin provést:

Permutace *n* prvků bez opakování

Máme-li k dispozici *n* různých prvků, pak libovolnou uspořádanou *n*-tici, tvořenou prvky této množiny, nazýváme permutací bez opakování.

Počet existujících permutací n různých prvků je:

$$P(n) = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)\,.\quad \dots \quad 3\,.\,2\,.\,1$$

Takovýto součin nazýváme **n-faktoriál** a označujeme ***n*!**

Lze ho definovat těmito vztahy:

$$0! = 1$$

$$n! = n\,.\,(n-1)!$$

Pozn.: Definici permutace bez opakování můžeme zjednodušit následovně. Mějme n *políček, na které musíme rozmístit stejný počet, tedy* n *různých prvků a záleží nám na jejich pořadí.*

Uveďme *příklad*:

10 různých dárků musíme rozdělit mezi 10 lidí. Kolika způsoby to lze provést?

Řešení:

$$P(10) = 10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 10! = 3628800$$

Lze si situaci představit tak, že prvnímu člověku můžeme nabídnout kterýkoliv z 10 dárků. Druhému člověku můžeme nabídnout již pouze jeden z devíti, protože jeden jsme dali tomu prvnímu. Třetímu člověku můžeme nabídnout už jen jeden z osmi zbývajících dárků. A tak dále, až k poslednímu člověku, na kterého zbyl poslední dárek. Pokud si první člověk vybere při druhém kole jiný dárek, může to mít vliv na výběr všech ostatních.

Permutace s opakováním

V případě permutací s opakováním máme stejný problém jako bez opakování, tedy potřebujeme rozdělit stejný počet prvků na stejný počet „políček“, ovšem s tím rozdílem, že některé prvky mohou být stejné, tudíž jejich vzájemná záměny nevytvoří novou permutaci.

Pokud se podíváme na předešlý příklad s deseti dárky a deseti lidmi a řekneme, že 5 z deseti dárků jsou totožné. Zjistíme, že počet permutací je výrazně nižší.

Obecně lze permutace s opakováním definovat následovně:

Nechť mezi n prvky je k_1 stejných prvků 1. druhu, k_2 stejných prvků 2. druhu, … a k_r stejných prvků r-tého druhu přičemž $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, pak počet různých permutací těchto prvků je:

$$P'_{k1,k2,\ldots kr}(n) = \frac{n!}{k_1!\,.\,k_2!\ldots k_r!}$$

Příklad:

5 dětí si rozděluje 5 hraček – 3 stejná autíčka a 2 stejné panenky.

Řešení:

Protože se jedná o stejný počet prvků jako „políček“, mezi které je rozdělujeme, použijeme permutace. Protože se mezi prvky nachází duplikáty, takže se prvky opakují, použijeme permutace s opakováním.

$$P'_{3,2}(5) = \frac{5!}{3!\,.\,2!} = 10$$

Variace *k*-té třídy z *n* prvků bez opakování

Variace k-té třídy z n prvků bez opakování jsou uspořádané k-tice tvořené z n prvků, přičemž se žádný z prvků neopakuje ale stále nám záleží na pořadí. Počet takovýchto variací je:

$$V_k(n) = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)\,. \quad \ldots \quad (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Pozn.: Příklady, ve kterých použijeme variace se od těch řešených permutací liší tím, že počet rozdělovaných prvků je nižší než počet políček, do kterých je rozřazujeme.

Příklad:

Tenisového turnaje se zúčastní 10 hráčů. Kolika způsoby se mohou umístit na prvních třech místech?

Řešení:

$$V_3(10) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10.9.8 = 720$$

Variace s opakování

Variace k-té třídy z n prvků s opakováním jsou uspořádané k-tice tvořené z n prvků, přičemž se kterýkoliv prvek v k-tici může opakovat. Počet takovýchto variací je:

$$V'_k(n) = n^k$$

Příklad:

Kolik je možných číselných hesel trezoru, pokud víme, že heslo má 4 číslice (nula je přípustná číslice)?

Řešení:

Příklad lze vyřešit i úvahou. Máme 4 pozice a na každé z nich může být 10 různých číslic (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Výsledek bude tedy:

$$V'_4(10) = 10.10.10.10 = 10^4$$

Což odpovídá předepsanému vzorci.

Kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování

Kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování jsou libovolné k-tice, vytvořené z n prvků. Na pořadí v k-tici nezáleží ale žádný z nich se neopakuje. Počet takovýchto k-tic tedy je:

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)!}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,k!}$$

Toto číslo se nazývá **kombinační číslo**, nebo **binomický koeficient** a zapisuje se $\binom{n}{k}$.

Pozn.: Kombinace se od předešlých metod liší tím, že je užíváme v případě, že nám při rozdělování nezáleží na pořadí.

Příklad:

Kolika způsoby lze vyplnit tiket Sportky pro 1 tah (Máme na výběr 49 čísel, z nichž zaškrtáváme 6)?

Řešení:

Vybíráme šestici ze 49 různých čísel ale nezáleží na pořadí, v němž je zaškrtáme.

$$C_6(49)=\binom{49}{6}=\frac{49!}{43!\,.\,6!}=\frac{49\,.\,48\,.\,47\,.\,46\,.\,45}{6!}=13983816$$

Kombinace *k*-té třídy s opakováním z prvků *p* druhů

Zde se jedná o možnosti vybírání k-tic z množiny prvků, kterých je p různých druhů (nemusí tedy být znám celkový počet prvků). Počet takových výběrů je:

$$C'_k(p)=\binom{k+p-1}{k}=\frac{(k+p-1)!}{(k+p-1-k)!\,.\,k!}=\frac{(k+p-1)!}{(p-1)!\,.\,k!}$$

Příklad:

V obchodě prodávají 3 druhy chleba. Máme za úkol koupit 4 bochníky. Kolika způsoby můžeme nákup provést?

Řešení:

$$C'_4(3)=\binom{6}{4}=\frac{6!}{2!\,.\,4!}=15$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Realizováno za finanční podpory ESF a státního rozpočtu ČR v rámci v projektu "*Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0*" *CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329* – ESF OP VVV

Použitá literatura

Pešková E., Mulačová J.: *Matematika - Přehled středoškolského učiva*. ORFEUS, Szalai & Smolan, Praha, 1992.