

5. přednáška

Interakce mezi kapalinou a vlákněným materiálem

Lucas – Washburnův vztah – dynamika průniku kapalin do kruhové kapiláry

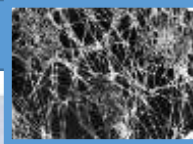
Doc. Ing . Eva Kuželová Košťáková, Ph.D.

Katedra chemie, FP, TUL

Eva.kostakova@tul.cz

Tel.: 48 535 3489

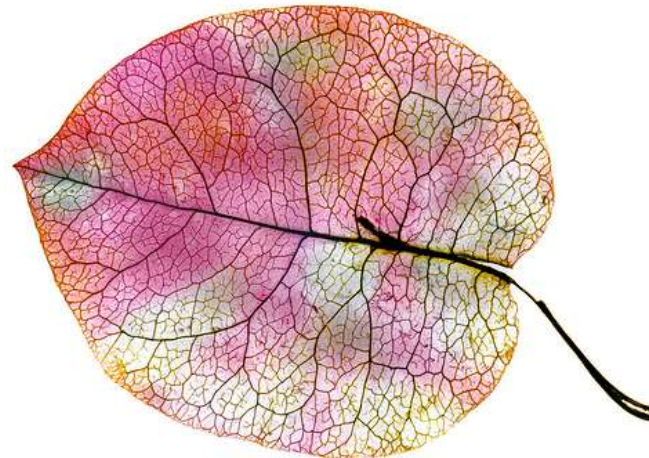
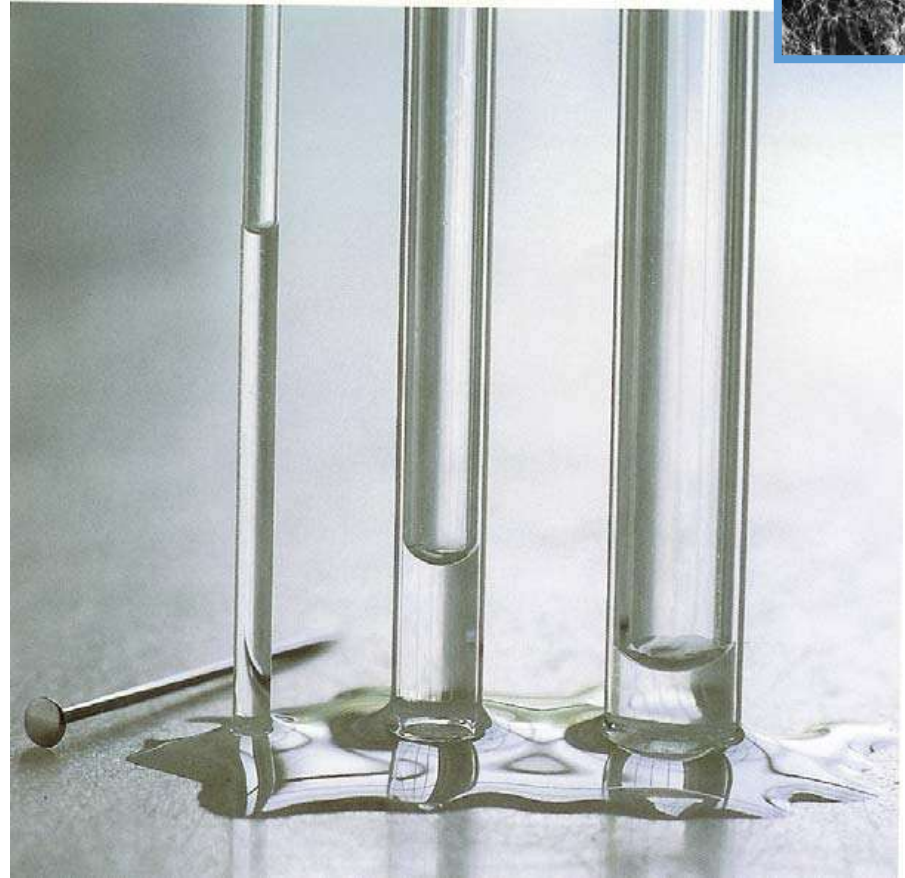
Budova C, 3. patro

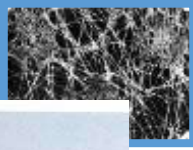


Kapilarita

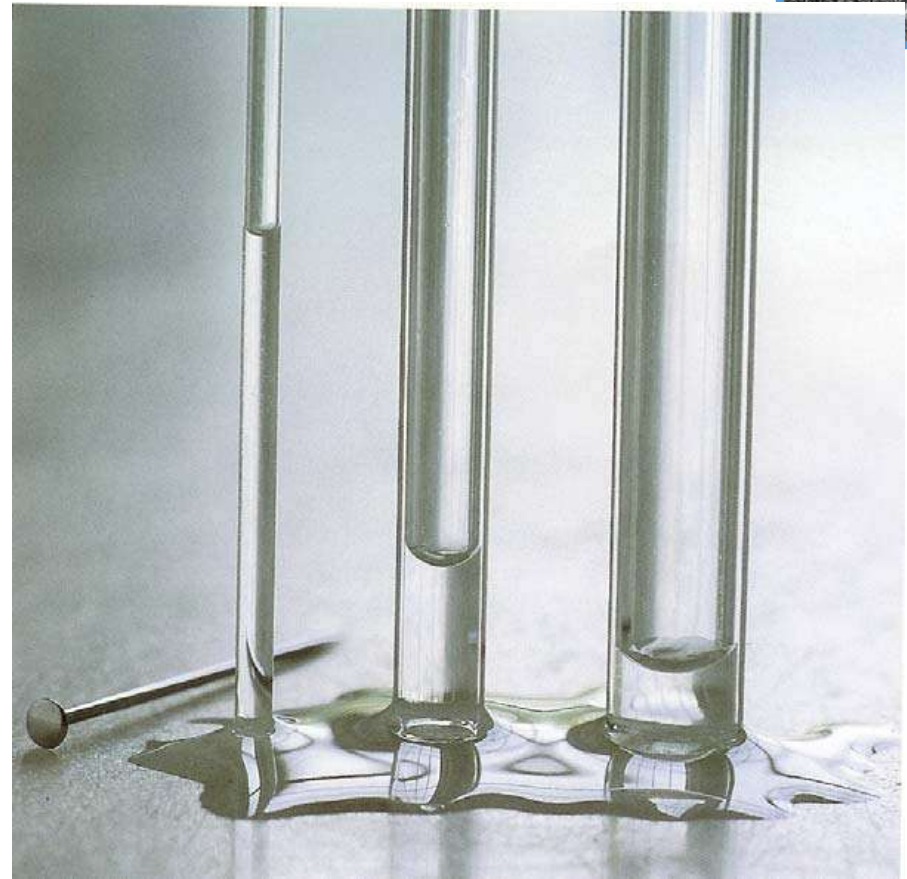
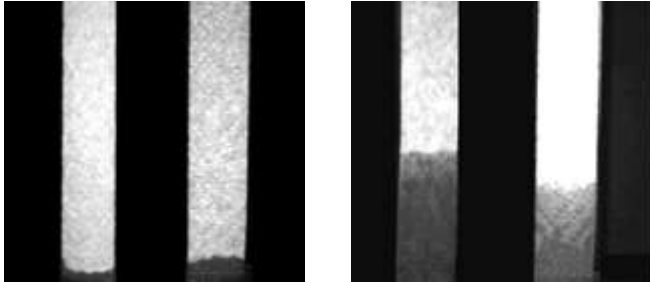
Rostliny transportují vodu z kořenů do listů, houby se dají používat na úklid, textilie sají kapalinu, chromatografie tenké vrstvy – separace substancí atd.

Dynamika



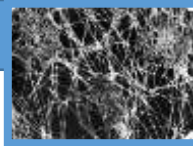


Lucas – Washburnův vztah

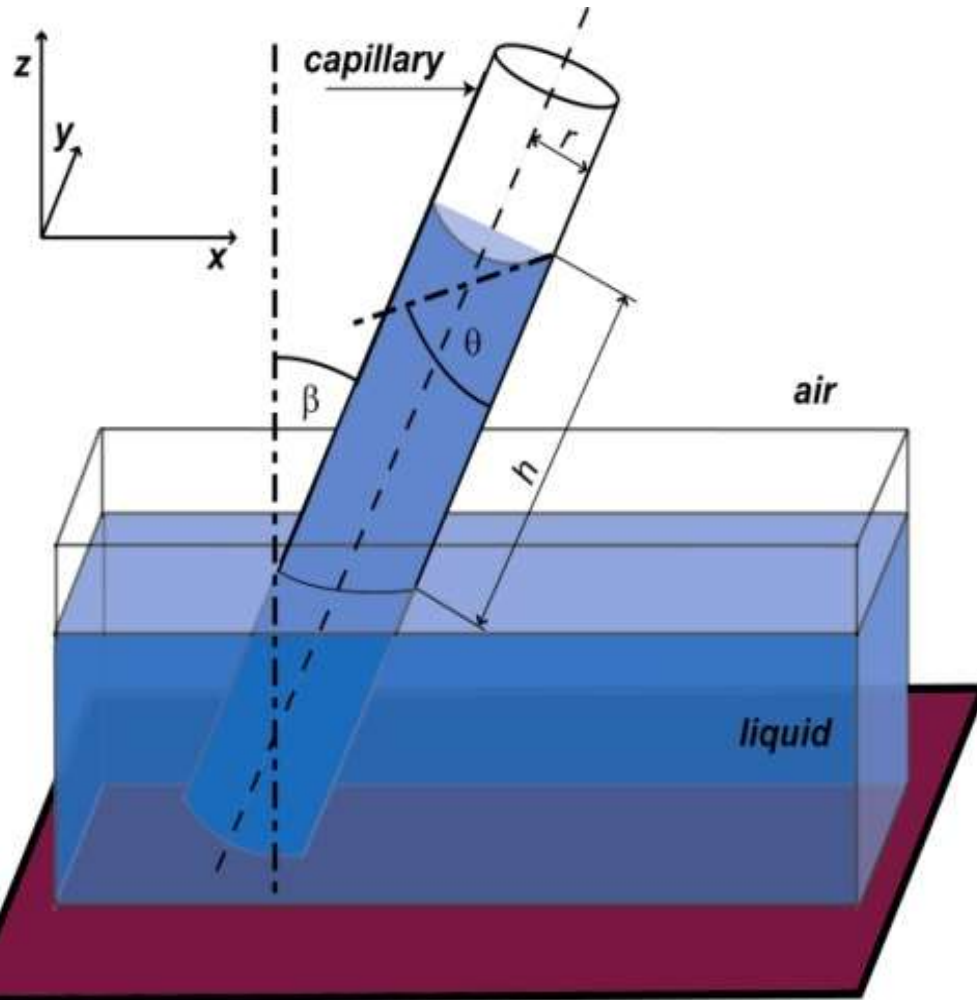


**Lucas, R.: Kolloid Zeitschrift, Vol.23, pp.15-22
(1918)**

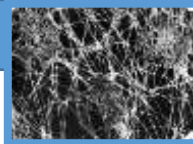
**Washburn, E., W.:Physical Review, Vol. 17,
p.273-283 (1921)**



Lucas – Washburnův vztah



Uvnitř kapiláry je kapalina transportována díky povrchovému napětí.



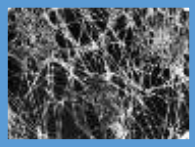
Washburn, E., W.:Physical Review, Vol. 17, p.273-283 (1921)

Edward Wight Washburn

Edward Wight Washburn was born at Beatrice, Nebraska, on May 10, 1881. He died, suddenly, of heart failure February 6, 1934. In spite of his all too short life, he has left a record of varied and valuable work which has given him a place of high rank among the **chemists of his time.**

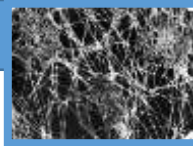


A handwritten signature in cursive script, which reads "E. W. Washburn". The signature is written in dark ink on a light background.

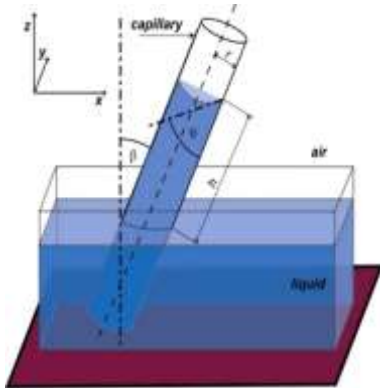


**Lucas, R.: Kolloid Zeitschrift, Vol.23,
pp.15-22 (1918)**

**O tři roky dříve napsal stejnou rovnici Richard
Lucas.**



Lucas – Washburnův vztah



Jejich přístup je založen na silném **zjednodušení** mnohotvárné struktury vlákně hmoty **do podoby jediné kapiláry**.

Uvnitř kapiláry je kapalina transportována díky povrchovému napětí.

Lucasův - Washburnův vztah odvodíme ze vztahů pro objem **V newtonovské viskózní kapaliny** o viskozitě η , který proteče za čas t trubicí o poloměru r a délce h , mezi jejímiž konci je rozdíl tlaků $(p_1 - p_2)$.

newtonovské viskózní kapaliny

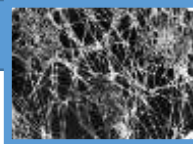
Newtonovská kapalina – model viskózní látky, který se řídí tzv. Newtonovým zákonem viskozity.

Reologická rovnice newtonovské kapaliny je tedy dána přímou úměrností rychlosti deformace a napětí.

$$\tau = \eta \frac{du}{dx},$$

kde τ je tečné napětí v tekutině, u je rychlost toku, x je souřadnice ve směru kolmém na směr proudění a η je dynamická viskozita, která je pro danou teplotu konstantní.

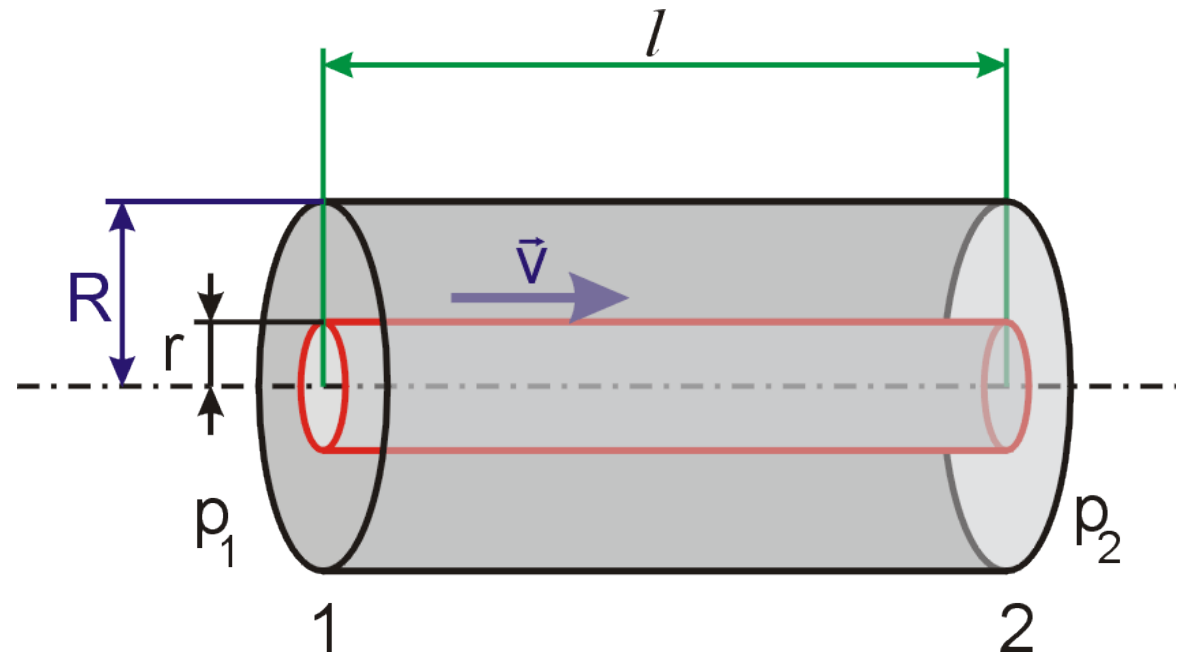
Kapaliny, jejichž chování nelze popsat Newtonovým zákonem viskozity, se označují jako nenewtonské.



Lucas – Washburnův vztah

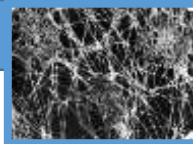
Tok dV/dt trubicí je dán vztahem odvozovaným v teorii kontinua, označovaným jako **Hagenův - Poiseuilleův zákon**

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi(p_1 - p_2)r^4}{8h\eta}$$



Zmenšením poloměru trubice na polovinu při zachování stejných tlaků sníží průtok na šestnáctinu.

Příklad krevní oběh: Z hlediska krevního oběhu je proto lepší oběh centralizovat, protože při použití tenkých kapilár je nutná velká práce k pohonu krve v oběhu.



Lucas – Washburnův vztah

Tok dV/dt trubicí je dán vztahem odvozovaným v teorii kontinua, označovaným jako *Hagenův - Poiseuilleův zákon*.

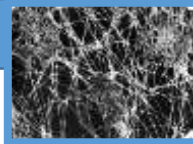
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi(p_1 - p_2)r^4}{8h\eta}.$$

V kapiláře vzniká tlak p_1 díky zakřivenému povrchu kapaliny s povrchovým napětím γ . V případě, že meniskus kapaliny svírá se stěnou kapiláry úhel θ je p_1 dán výrazem

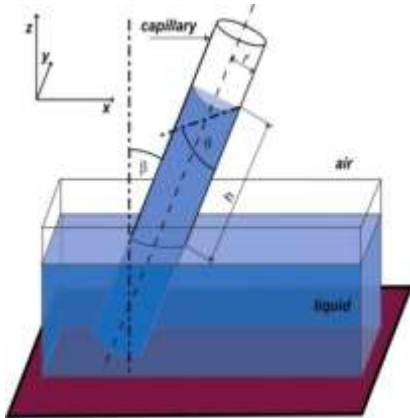
$$p_1 = \frac{2\pi r \gamma \cos \theta}{\pi r^2} = \frac{2\gamma \cos \theta}{r}.$$

Za *meniskus kapaliny* označujeme její tvar v blízkosti styku se smáčeným objektem. Tlak p_2 v kapiláře ve výšce odpovídající okolní hladině kapaliny je hydrostatickým tlakem

$$p_2 = \rho g h \cos \beta.$$



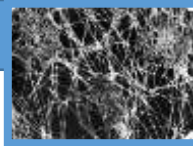
Lucas – Washburnův vztah



$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi(p_1 - p_2)r^4}{8h\eta}.$$

$$p_1 = \frac{2\gamma \cos \theta}{r}, \quad p_2 = \rho g h \cos \beta.$$

$$\frac{\pi r^2 dh}{dt} = \frac{\pi r^4}{8\eta h} \left(\frac{2\gamma \cos \theta}{r} - \rho g h \cos \beta \right).$$



Lucas – Washburnův vztah

Rychlost postupu tekutiny při vzlínání v kapiláře odhadneme veličinou dh/dt , kterou vyjádříme z předchozí rovnice jako

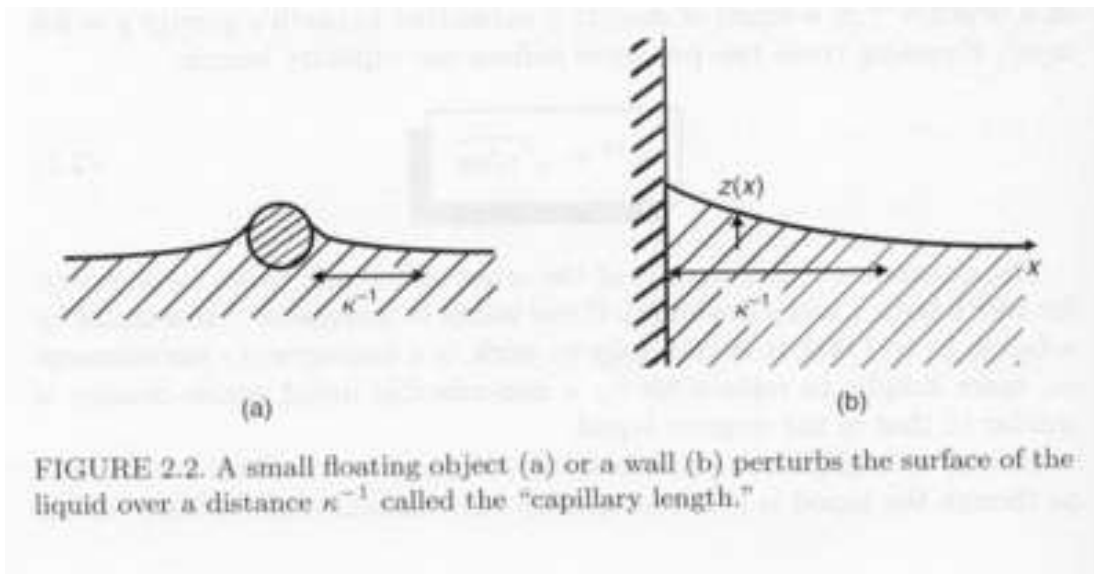
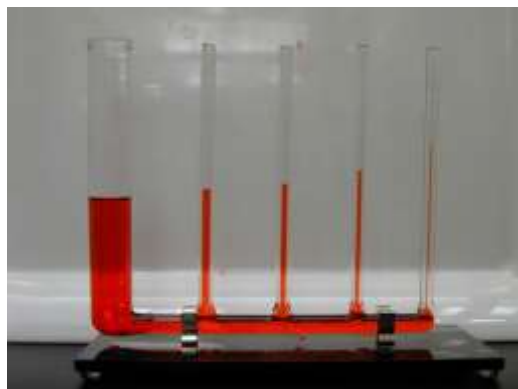
$$\frac{dh}{dt} = \frac{r\gamma \cos \theta}{4\eta h} - \frac{r^2 \rho g \cos \beta}{8\eta}.$$

V relaci se předpokládá, že je kapilára dostatečně malá pro to, aby si postupující kapalinový meniskus zachoval tvar kulového vrchlíku **neporušeného gravitací**. Toho je zpravidla dosaženo za podmínky

$$r \leq 0,1\sqrt{\gamma / \rho g}$$

Podmínka vychází z **kapilární délky**.

Kapilární délka – dosah kapilárních sil - κ^{-1}



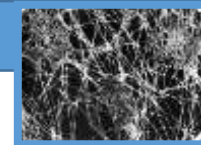
$$\rho g h = \frac{2\gamma}{r}.$$

$$\left(\kappa^{-1}\right)^2 = \frac{2\gamma}{\rho g} = r h.$$

Někteří autoři neuvádějí 2. Různý výklad dle odvození z válcového tělesa nebo z kulovitého

$$\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}}$$

$$\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$



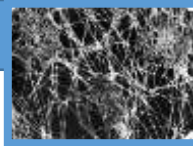
Následující tabulka udává povrchová napětí γ vybraných kapalin, jejich hustotu ρ , viskozitu η a maximální průměry kapilár

$$r_{\max} = 0,1 \sqrt{\gamma / \rho g}$$

které ještě dovolí menisku postupující kapaliny zaujmout tvar kulového vrchlíku.

Kapalina	γ [N / m.10 ⁻³]	ρ [kg / m ³ .10 ³]	r_{\max} [mm]
Voda H ₂ O	72,75	1,0	0,27
Lih C ₂ H ₅ OH	22,32	0,791	0,17
Glycerín	64	1,26	0,23
Koncentrovaná H ₂ SO ₄	55	1,030	0,23
Koncentrovaná HNO ₃	41	1,032	0,20
Olej olivový	33	0,92	0,19
Petrolej	26	0,8	0,18
Terpentýn	27	0,87	0,18

Povrchové napětí γ , hustota ρ kapalin a jim odpovídající maximální poloměry kapilár r_{\max} , ve kterých se ještě vytvoří kapalinový meniskus ve tvaru kulového vrchlíku. Uvedené hodnoty odpovídají teplotě $T = 20$ °C.



Model **válcovité kapiláry** vnořený do reservoáru s kapalinou

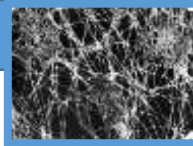
Řešení Lucas-Washburnovy rovnice při různých orientacích kapiláry vůči reservoáru s kapalinou (různé β)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{r\gamma \cos \theta}{4\eta h} - \frac{r^2 \rho g \cos \beta}{8\eta} .$$

$$a = \frac{r\gamma \cos \theta}{4\eta}$$

$$b = \frac{r^2 \rho g \cos \beta}{8\eta}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{h} - b$$



Model **válcovité kapiláry** vnořený do reservoáru s kapalinou

Řešení *Lucas-Washburnovy rovnice* při různých orientacích kapiláry vůči reservoáru s kapalinou (různé β)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{h} - b$$

Úhel $\beta = 90^\circ$.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{h}$$

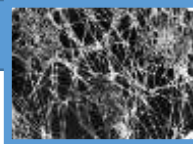
Řešení – separace proměnných

$$hdh = adt, \quad \frac{1}{2}h^2 = at + C,$$

$$\int hdh = a \int dt.$$

Pro $t=0$, $h=0$ je $C=0$ (integrační konstanta)

$$h = \sqrt{2at} = \sqrt{\frac{r\gamma \cos\theta}{2\eta} t}.$$



Model **válcovité kapiláry** vnořený do reservoáru s kapalinou

Řešení *Lucas-Washburnovy rovnice* při různých orientacích kapiláry vůči reservoáru s kapalinou (různé β)

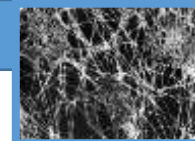
$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{h} - b$$

Úhel $\beta = 90^\circ$.

$$h = \sqrt{\frac{r\gamma \cos\theta}{2\eta} t} = Kt^{\frac{1}{2}}$$

Toto řešení platí i pro obecné β tehdy, když je možné zanedbat gravitaci ($g=0$)

nebo je výška h velmi malá $h \rightarrow 0$.



Model **válcovité kapiláry** vnořený do reservoáru s kapalinou

Řešení Lucas-Washburnovy rovnice při různých orientacích kapiláry vůči reservoáru s kapalinou (různé β)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{h} - b$$

$\beta \in (0^\circ, 90^\circ)$ b je kladné číslo

Jedná se o tzv. vzlínání kapaliny směrem vzhůru od hladiny kapaliny v rezervoáru

Řešení nelineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty může být řešeno separací proměnných

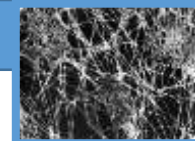
$$\frac{hdh}{a-bh} = dt; \quad \int \frac{hdh}{a-bh} = \int dt = t + C$$

$$\frac{h}{a-bh} \left(\frac{b}{b} \right) + a - a = -\frac{1}{b} + \frac{a}{b(a-bh)}$$

$$y = a - bh$$

$$t = -\frac{h}{b} + \frac{a}{b} \int \frac{dy}{y}; \quad t = -\frac{b}{h} + \frac{a}{b} \ln(a - bh) \left(-\frac{1}{b} \right)$$

$$t = -\frac{h}{b} - \frac{a}{b^2} \ln(a - bh)$$



Model **válcovité kapiláry** vnořený do reservoáru s kapalinou

Řešení Lucas-Washburnovy rovnice při různých orientacích kapiláry vůči reservoáru s kapalinou (různé β)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{h} - b$$

$$\beta \in (0^\circ, 90^\circ)$$

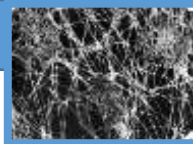
$$t = -\frac{h}{b} - \frac{a}{b^2} \ln(a - bh)$$

Když $t \rightarrow \infty$ pak $\ln(a - bh) \rightarrow -\infty$ a tudíž $a - bh = 0$.

Maximální hodnota h tedy je $h_{\max} = \frac{a}{b}$.

Vzlínání kapaliny do plošných textilií má limitu = h_{\max}





Model **válcovité kapiláry** vnořený do reservoáru s kapalinou

Řešení Lucas-Washburnovy rovnice při různých orientacích kapiláry vůči reservoáru s kapalinou (různé β)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{h} - b$$

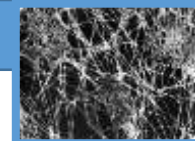
$$\beta \in (0^\circ, 90^\circ) \quad t = -\frac{h}{b} - \frac{a}{b^2} \ln(a - bh)$$

Když $t \rightarrow \infty$ pak $\ln(a - bh) \rightarrow -\infty$ a tudíž $a - bh = 0$.

Maximální hodnota h tedy je $h_{\max} = \frac{a}{b}$.

Vztah může být řešen i několika jinými cestami za předpokladu, že druhý člen rovnice na pravé straně bude zanedbán z důvodů : (i) zanedbání vlivu gravitace; nebo (ii) velmi malé výšky kdy ($h \rightarrow 0$) == viz řešení pro $\beta = 90^\circ$

$$h = \sqrt{\frac{r\gamma \cos\theta}{2\eta}} t = Kt^{\frac{1}{2}}$$



Model **válcovité kapiláry** vnořený do reservoáru s kapalinou

Řešení Lucas-Washburnovy rovnice při různých orientacích kapiláry vůči reservoáru s kapalinou (různé β)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{h} - b$$

$\beta \in (90^\circ, 180^\circ)$ **b je záporné číslo**
 $b = -B$

$$\int \frac{h dh}{a - bh} = \int dt = t + C$$

$$t = -\frac{h}{b} - \frac{a}{b^2} \ln(a - bh)$$

$$t = -\frac{h}{(-B)} - \frac{a}{(-B)^2} \ln\left(1 - \frac{(-B)}{a} h\right) = \frac{h}{B} - \frac{a}{B^2} \ln\left(1 + \frac{B}{a} h\right)$$

Pro **velké hodnoty h** je možné zapsat

$$\left(h \gg \ln\left(1 + \frac{B}{a} h\right)\right)$$



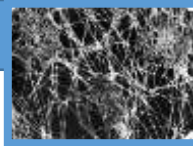
$$t = \frac{h}{B}$$

$$h = -\frac{r^2 \rho g \cos \beta}{8\eta} t$$

$$h = Kt$$

<https://www.youtube.com/watch?v=yxMuCgCHR9c>





Vztah $h=Kt^{1/2}$ se používá k popisu pronikání kapalin do porézních prostředí. Prostor se přitom modeluje jako soustava paralelních válcových kapilár.

Při kontaktu s kapalinou vlákna porézního textilního prostředí mohou **botnat** a tím se zmenšuje poloměr pórů myšlených kapilár.

Chatterjee v pracích [8,10] navrhl nahradit poloměr kapiláry r výrazem

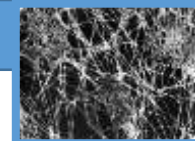
$$r_w^2 / r.$$

Veličina r_w je **redukováný poloměr póru** za postupujícím kapalinovým meniskem. Rozměry postupujícího kapalinového menisku jsou však stále určovány rozměry suché kapiláry r .

- [8] CHATTERJEE, P. K.: Svensk Papperstidning, 74, 503 (1971).
 [10] CHATTERJEE, P. K.: Ed., Absorbency, Textile Science and Tech. Ser., Vol. 7, Elsevier, Amsterdam, 1985.



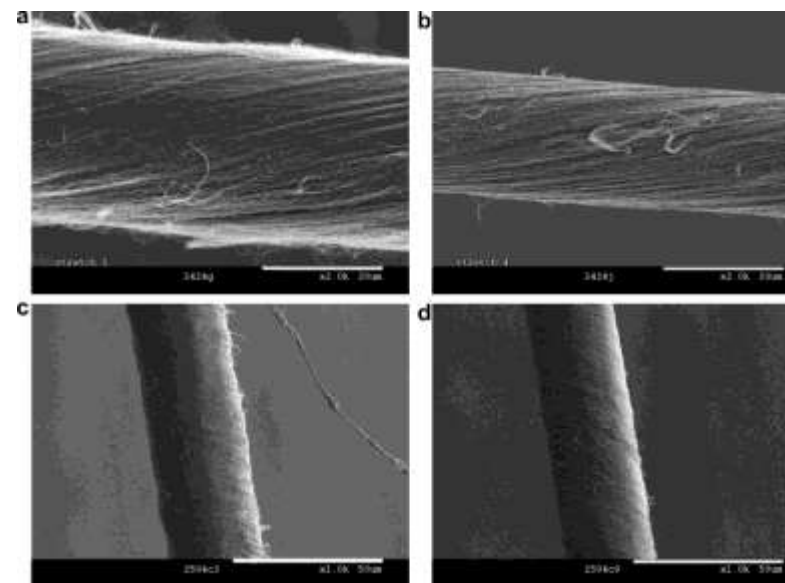
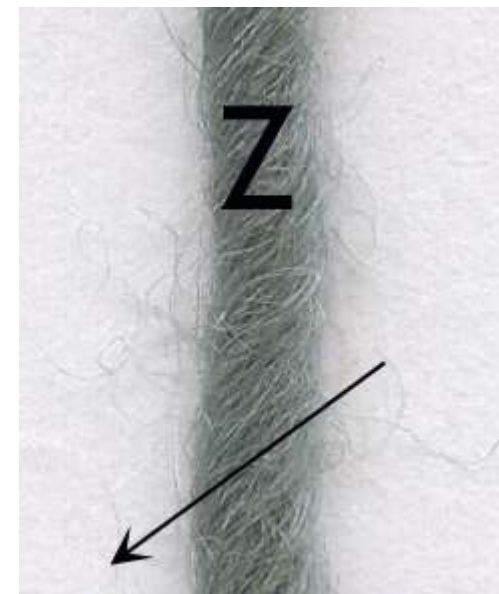
Effect of swelling on the cross-section of cotton fibers. Parts (a), (b), and (c) are photos of a native fiber, and that swelled by 1-butanol (b), and water (c), respectively

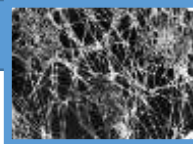


Další korekce vztahu $h=Kt^{1/2}$ se týká zakřivené dráhy, kterou se kapalina v reálném porézním prostředí šíří. Definujeme za tímto účelem faktor T jako poměr skutečné délky kapalinového proudu h ku přímé dráze proudu kapaliny h_p ($h_p = h/T$). Tyto korekce upravují konstantu K na tvar K' , pro který platí $h_p = K't^{1/2}$.

$$K' = \left[\frac{r_w^2 \gamma \cos \theta}{2rT^2 \mu} \right]^{1/2} = \left[\frac{r_e \gamma \cos \theta}{2\mu} \right]^{1/2},$$

$$r_e = \frac{r_w^2}{rT^2} \quad \text{je tak zvaný *efektivní poloměr póru*.}$$





[microfluidics] Thread wetting



geaofp · 13 videí



1

174 zhlédnutí

0 0

Líbí se

Informace o videu

Sdílet

Přidat do



Nahráno 22. 07. 2010

Wetting of a 250-micron thick cotton thread by dyed water.

What is shown in this movie is 4x faster than the actual dynamics.

<https://www.youtube.com/watch?v=1549MG2qkNE>