PARCIÁLNÍ DERIVACE A DIFERENCIÁLY VYŠŠÍCH ŘÁDŮ, TAYLORŮV POLYNOM

Parciální derivace vyšších řádů

Formálně lze vyšší parciální derivace funkce získat opakovaným využitím definice $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c_1, c_2, ..., c_j + h, ..., c_n) - f(c_1, c_2, ..., c_j, ..., c_n)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(C)$, kde za funkci f dosadíme nižší parciální derivaci podle příslušné proměnné v obecném bodě $[x_1, ..., x_n]$ – obdobně jako u obyčejné derivace. Zde však v závislosti na tom, podle které proměnné derivujeme, vzniká více možností; ukážeme na příkladu funkce dvou proměnných:

$f : z = f(x, y)$ – v obecném bodě $[x, y]$ mohou nastat dva případy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Každá z těchto parciálních derivací je v obecném bodě $[x, y]$ funkcí dvou proměnných x, y; tuto funkci je možné opět derivovat podle x i y (získáme tak derivace druhého řádu):

$\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$;

$\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial y}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (zápis pomocí limity z definice si rozmyslete!).

Pokud derivujeme podle týchž proměnných, nehraje pořadí, v němž se derivuje, ani v zápise žádnou roli. Je pořadí, v němž podle jednotlivých proměnných derivujeme, důležité u tzv. smíšených derivací $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial x}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$?

Záměnnost smíšených parciálních derivací

Pozn. 56 - Tvrzení

Jsou-li parciální derivace až do řádu k spojité, jsou *záměnné*, tj. nezáleží na pořadí derivování, ale pouze na tom, kolikrát se podle každé z proměnných derivovalo.

Pozn. 57

V našem případě funkce dvou proměnných to znamená u derivací 2. řádu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Obdobně pro vyšší derivace.

Diferenciály vyšších řádů

k-tý diferenciál funkce n proměnných definujme rekurentně předpisem $\boxed{d^k f = d(d^{k-1} f)}$
(Opakování postupu diferencování.)

$d^2 f = d(df) = dg$, kde jsme označili $g = df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$.

Tedy $dg = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot dy =$

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot dy) \cdot dx + (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot dy) \cdot dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot dy^2$$

Výsledek

$$\boxed{d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot dy^2}$$

můžeme zapsat symbolicky : $\boxed{d^2 f = (\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy)^{(2)}}$

($^{(2)}$ značí tzv. symbolickou druhou mocninu – pozor, není druhou mocninou uvedeného výrazu, porovnejte sami.)

Zobecněním získáme: $\boxed{d^k f = (\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy)^{(k)} = (df)^{(k)}}$

Věta 12 (Taylorův polynom)

Nechť funkce f proměnných $x_1, ..., x_n$ má na nějakém okolí bodu $C\ [c_1, ..., c_n]$ diferenciály až do řádu k+1. Pak pro každý vektor $h = (h_1, ..., h_n)$, pro který bod $C + h$ leží v daném okolí bodu C, platí: $f(C+h) = f(C) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(C)}{j!} + \frac{d^{k+1} f(\Omega)}{(k+1)!}$, kde výraz $\frac{d^{k+1} f(\Omega)}{(k+1)!}$ je tzv. zbytkem (k+1) - ního řádu ve vnitřním bodě Ω okolí bodu C.
Označíme-li $C + h$ proměnným bodem X, je možné přibližně vyjádřit funkční hodnotu v tomto bodě pomocí Taylorova polynomu stupně k:

$$\boxed{f(X) = f(C) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(C)}{j!} = T_k(X)}.$$

Pozn. 58

Pro funkci f jedné proměnné x v okolí bodu c máme: $f(x) = f(c) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(c)}{j!}$, což po přepisu $d^j f(c) = f^{(j)}(c) \cdot h^j$ dává polynom stupně k

$$\boxed{f(x) = f(c) + \sum_{j=1}^{k} \frac{f^{(j)}(c)}{j!} \cdot h^j = T_k(x)}$$