**Bohuslav Neckář**

# MORFOLOGIE A STRUKTURNÍ MECHANIKA OBECNÝCH VLÁKENNÝCH ÚTVARŮ

Technická univerzita v Liberci
Fakulta textilní

# Obsah

THE IMAGINATION
IS MORE IMPORTANT
THAN KNOWLEDGE
*Albert Einstein*

# *Předmluva*

*Nejprve budiž řečeno:* **CO JE UVEDENO V TÉTO PRÁCI SE NAUČIT NEDÁ!** *Strukturní teorie textilií je totiž součástí vědy a žádnou vědu se nelze "naučit". Vědu definují autoři různě, leč v jednom se všichni shodují - je to tvůrčí činnost, která usiluje o* ***lepší porozumění světu kolem nás****. Vše ostatní, např. jazyk, matematické obraty, grafická schémata či terminologie, jsou jenom nástroje našeho přemýšlení, zaznamenávání myšlenek a posléze porozumění.*

*Něčemu porozumět však znamená vytvořit si svou vlastní* ***představu,*** *vnímat či přímo "cítit" jak věci jsou a jak "fungují". To je cílem jak vlastní vědecké práce, tak i studia kterékoliv vědy.*

*Věda není nic mimořádně vznešeného, tajemného ani nepochopitelného. Je to svým způsobem obyčejné řemeslo, jenomže se dělá "přímo hlavou". Jako každé řemeslo vyžaduje i vědecká činnost jistou zručnost. Je to především schopnost* ***myslet*** *- myslet přesně, myslet v souvislostech a s představivostí.*

*Vědecký poznatek si musí každý* ***sám*** *pro sebe* ***znovu objevit****; právě proto se nedá mechanicky "naučit" ani ve škole, ani z literatury. Takové informace jsou jen cosi jako turistický průvodce a mapa vědní krajiny. Doporučují schůdné trasy a zajímavé cíle, varují před slepými cestami, vymezují místa dosud neznámá. Svou cestu si však musí každý pro sebe objevit a "projít" zcela sám.*

*Studium vědecké problematiky je docela obtížná práce, při které vznikají neviditelné mozoly kdesi v mozku. Je to soustavné vytváření individuálně nových představ a soustavný vnitřní dialog, v němž si klademe nové a nové otázky* ***jak*** *a* ***proč*** *a promýšlíme na ně odpovědi.*

*Horolezec na konci úspěšné cesty shlédne ze strmého štítu jedinečné obzory a tento individuální zážitek je nesdělitelný a nedá se nahradit pouhým čtením knih o horách. Také člověk, který úspěšně prošel nějakou myšlenkovou cestu stane nakonec na vrcholu, z něhož přehlédne ono nesdělitelné individuální porozumění nějaké části světa kolem nás. Emocionální zážitek je přitom podobný; říkává se mu* ***radost z poznání****. Až k ní dospějete budete vědět, že jste šli správnou cestou. Pak budete schopni přesně, věcně a správně* ***vysvětlit*** *poznanou problematiku ostatním - kolegům, jiným odborníkům i svým pedagogům. Budete schopni ne jen otrocky memorovat to co jste přečetli, ale skutečně vysvětlit jak danému jevu právě vy osobně rozumíte, jak si jej přesně představujete. A to, jak říká Albert Einstein v úvodním citátu, je konec konců na vědě to nejdůležitější.*

*Liberec, září 1998* *Autor*

# Úvod

**Vlákenné útvary** jsou ve své stavbě a ve svém chování plně podřízeny obecným přírodním zákonům - těmže zákonům, které zkoumají přírodní vědy. Klasická **přírodní věda** se zaměřovala především na **nejobecnější zákony určitého typu** (např. fyzikální, chemické, biologické a j.) a jako objektům svého zájmu dávala přednost spíše původním, záměrnou lidskou činností nemodifikovaným materiálům. Moderní přírodní věda tato omezení respektuje stále méně. Svědčí o tom růst hraničních oborů (biofyzika, fyzikální chemie, ekologie a j.) i zájem o studium struktury a chování některých speciálních, člověkem vytvořených materiálů. Nicméně osobité zvláštnosti určitého technického produktu, zejména nemají-li poznatky o něm příliš velkou naději na širší a obecnější vědecký dosah, nebývají v centru pozornosti soudobého přírodovědce.

Výroba užitečných předmětů z výchozích přírodních materiálů se dlouho vyvíjela empiricky (příze a tkaniny byly vyráběny již před 27 tisíci lety). Mnohem později, snad kolem 18. století, začaly vznikat nauky o zákonech, které platí v jednotlivých výrobních činnostech a nauky o chování produktů výroby. Podle J. BECKMANA se nauky o přeměně suroviny v "užitečné" předměty začaly nazývat **technologiemi**. Příkladem je technologie textilní či oděvní. Součástí každé technologie jsou poznatky přírodovědného typu, ale i znalosti jiné (výrobně technické, ekonomické, sociologické, estetické a pod.).

Jádro většiny technologií tvoří - v dnešním pojetí - tři části. *1)* **Teorie**[1] technologických **procesů** a *2)* **teorie**[1] **materiálů** mají přírodovědný charakter. *3)* **Nauka o materiálech, výrobních postupech a zařízeních** nemá vědní charakter, ale s přírodovědnými poznatky úzce souvisí - vypracovává totiž postupy jejich praktické aplikace (např. "konstrukce" výrobků, "projektování" výrobních procesů, "technologie" výroby v užším smyslu slova, "zkoušení" a "hodnocení kvality" výrobků a pod.)

Teorie procesů a teorie materiálů jsou exaktní **technické vědní obory** přírodovědného typu. Používají stejné typy myšlenkových obratů, stejné typy experimentálních i teoretických metod, stejné typy nástrojů i postupů jako přírodní vědy. Od klasických přírodních věd se odlišují tím, že **v centru pozornosti** je buď **určitý technologický proces** (např. tkaní), nebo **určitý materiálový objekt** (např. příze). Typ studované zákonitosti (fyzikální, chemická či jiná) a míra její obecnosti nejsou podstatné. Poznatky technických věd lze současně zařadit i do přírodních věd a naopak, zákony přírodovědy jsou součástí teorie procesů i teorie materiálů v jednotlivých technologiích.

**Teorie**[1] **textilních**[2] (vlákenných) **materiálů**[3] je obvykle dělena do tří částí: *1)* **teorie**[1] **textilních vláken** se zabývá vnitřní stavbou a vlastnostmi vláken samotných, *2)* **teorie**[1] **textilních** (vlákenných) **útvarů**[4] či prostě **textilií** studuje objekty z vláken vytvořené (rouna, příze, tkaniny, pleteniny, textilie netkané, vrstvené a j.) a *3)* **teorie**[1] **experimentálních metod a zkušebnictví** studuje metody, kterými je možné skutečné chování textilií sledovat.

Textilie bývala dříve chápána jednoduše, jako vnitřně nediferencovaný nebo jen málo diferencovaný objekt. Dnes se k ní naopak přistupuje jako k systému se složitou **vnitřní strukturou**, která je výsledkem její **tvorby** a spolu s vlastnostmi vláken příčinou osobitého **chování** textilie.

---

[1] Pojem "teorie" není zcela výstižný. Je zde míněn v nejširším slova smyslu, ve významu "věda o ...". V cizích jazycích existují pojmy výstižnější - např. "material science", tedy "věda o materiálech" pro teorii materiálů. Čeština ovšem tvoří názvy vědních oblastí nejčastěji příponami a "materialologie" či "materialistika" se nevžily. Čeština zná také pojem "nauka o ...", ale zejména v technických oborech jsou "nauky" spíše soubory předpisů, postupů a faktů, určené jako "recepty" k praktickému používání.

[2] Pojmy "textil", "textilní" vznikly historickým vývojem, nemají exaktní definici a je třeba je chápat jako pojmy empirické (založené na zkušenosti).

[3] Postupy praktického využívání poznatků z teorie textilních (vlákenných) materiálů jsou součástí nauky o materiálech, výrobních postupech a zařízeních a označují se někdy názvem **textilní materiálové inženýrství**.

[4] Místo "textilní vlákenný útvar" či "textilní útvar" se často užívá krátký tradiční název **textilie**.

Proto se mluví o **strukturní teorii** různých vlákenných útvarů, např. přízí, tkanin, pletenin atp. Současně se rozšiřuje okruh poznatků, které jsou mnoha vlákenným útvarům společné. Postupně se tak vytváří **společný základ strukturní teorie textilií**.

Tato publikace je prvním dílem zamýšlené řady monografií, které by ve svém souhrnu měly představit strukturní teorii vlákenných útvarů jako svébytnou vědeckou oblast. Obsahuje, vedle základních pojmů a souvislostí, vybrané partie již zmíněného společného základu strukturní teorie textilií. **Část A** se zabývá matematickým popisem **morfologie** vlákenných útvarů a rozsáhlejší **část B**, zpracovaná s podporou grantu GAČR č. 106/97/0372, je věnována některým modelům **strukturní mechaniky** vlákenných útvarů.

Publikace je určena **studentům** inženýrského studia a studia doktorského a **specialistům** z výzkumné a výrobní praxe. Aby bylo možné studované partie promýšlet samostatně, a to přesně a důkladně, jsou použitá matematická odvození uvedena podrobněji, než bývá zvykem v knižních publikacích. Také odkazy na používané předchozí rovnice jsou důsledné a úplné. (Na první pohled je rozsah matematických vztahů pro čtenáře nejspíš poněkud "odpudivý". Bližším studiem však sezná, že podrobná odvození jsou pro něj výhodnější, než formulace typu "...z posledních deseti rovnic snadno odvodíme, že platí...", kde hledáním "snadného odvození" stráví čtenář řadu týdnů.) Úsporně psaná textová část objasňuje převážně jen nejnutnější logickou linii problematiky.

Monografie zpracovává řadu témat. Čtenář sám si jistě vybere právě ty kapitoly, které ke svému studiu či práci potřebuje.

*Část A:*

# MORFOLOGIE VLÁKENNÝCH ÚTVARŮ

# 1. VLÁKNA

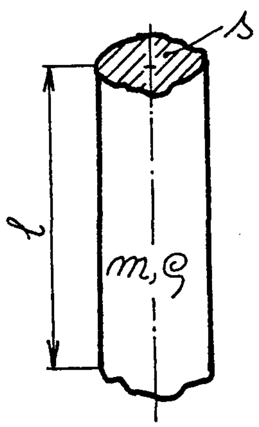
Vlákna jsou **základní stavební jednotky** všech textilií. Pojem **vlákno** je chápán víceméně intuitivně; míní se jím obvykle nějaký dostatečně dlouhý a tenký útvar. Etymologicky vychází slovo vlákno ze staroindického kořene *valká*.

V textilní praxi se někdy používá pojem **textilní vlákno**. Má se tím na mysli vlákno, které se používá v textilních technologiích. Protože však samotný pojem "textilní" je vymezen jen intuitivně na základě historické tradice, je i textilní vlákno třeba chápat intuitivně.

U textilních vláken se dle potřeby stanovuje mnoho různých charakteristik, jako např. jejich délka, jemnost, průměr, tvar příčného řezu, měrný povrch, štíhlost, zobloučkování, pevnost a tažnost a pod. Některé základní souvislosti takových charakteristik vláken jsou uvedeny v následujícím textu.

**Délka vláken.** V textilní praxi se používají vlákna buď velmi dlouhá, nebo naopak poměrně velmi krátká. Vlákna, která jsou ve skutečnosti dlouhá mnoho metrů označujeme jako **vlákna nekonečná**. Krátké typy textilních vláken, t.j. vlákna dlouhá jen několik centimetrů či decimetrů nazýváme **vlákna staplová**. Jednotlivá staplová vlákna ve vlákenné surovině bývají různě dlouhá. Samotné **rozložení délek** staplových vláken, nebo jenom jeho vhodné charakteristiky se běžně zjišťují standartními metodami. Vyhodnocuje se buď tzv. **kladený stapl**, nebo **váhový stapl.** V této práci bude značena **střední délka vláken** symbolem $l$.

**Jemnost vláken.** Na obr.1 je znázorněno vlákno délky $l$; jeho **plocha příčného řezu** je $s$, jeho **hmotnost** je $m$ a **měrná hmotnost (hustota)** je $\rho$.




obr. 1

| Druh vláken | Měrná hmotnost $\rho\ [\mathrm{kg\cdot m^{-3}}]$ |
|---|---|
| bavlna | 1520 |
| vlna | 1310 |
| přírodní hedvábí | 1340 |
| viskózová vlákna | 1500 |
| polyesterová vlákna | 1360 |
| polyamidová vlákna | 1140 |
| polypropylenová vlákna | 910 |

Laboratorní stanovení měrné hmotnosti vláken není snadné. Pro běžné účely však postačí hodnoty z tabulky.

Vlastní **jemnost vlákna** se vyjadřuje jeho **délkovou hmotností**, t.j. podílem hmotnosti vlákna ku jeho délce.

$$t = \frac{m}{l} = \frac{sl\rho}{l} = s\rho \qquad s = \frac{t}{\rho} \tag{1}$$

V mezinárodní soustavě fyzikálních jednotek je jednotkou jemnosti 1 Mtex = 1 kg m$^{-1}$. V praxi se ovšem nejčastěji používá jednotky milionkrát menší a platí 1 tex = $10^{-6}$ Mtex = 1 g km$^{-1}$.

U bavlněné suroviny se často udává jemnost v hodnotách "**micronaire**" (tzv. metoda air flow). Mezi jemností vláken v hodnotách $t_{mic}$ a jemností dle definice $t_{[\mathrm{tex}]}$ platí přibližně vztah

$$t_{[\mathrm{tex}]} = t_{mic}/25{,}4 \qquad (2)$$

**Ekvivalentní průměr vlákna.** Pokud by vlákno mělo kruhový průřez s **průměrem vlákna** $d$, platilo by

$$s = \frac{\pi d^2}{4} \qquad d = \sqrt{\frac{4s}{\pi}} = \sqrt{\frac{4t}{\pi\rho}} \qquad (3)$$

| $B_{\mathrm{Brad}}$ | Střední $d$ [μm] | Max. $d$ [μm] | Min. $d$ [μm] |
|---|---|---|---|
| 80's | 18,8 | - | 19,25 |
| 70's | 19,7 | 19,25 | 20,20 |
| 64's | 20,7 | 20,20 | 22,00 |
| 60's | 23,3 | 22,00 | 24,12 |
| 58's | 24,9 | 24,12 | 25,65 |
| 56's | 26,4 | 25,65 | 28,45 |
| 50's | 30,5 | 28,45 | 31,55 |
| 48's | 32,6 | 31,55 | 33,30 |
| 46's | 34,0 | 33,30 | 35,10 |
| 44's | 36,2 | 35,10 | 37,45 |
| 40's | 38,7 | 37,45 | 39,20 |
| 36's | 39,7 | 39,20 | - |

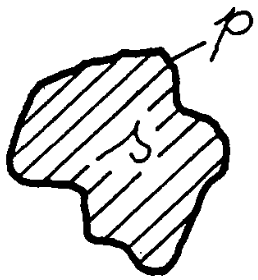
Veličina $d$ však může být vypočtena z rovnice (3) i pro vlákno s nekruhovým průřezem. Potom ji nazýváme **ekvivalentním průměrem** vlákna.

U vlněných vláken se jejich jemnost často udává v **Bradfordské stupnici**. (Např. 60's atp.) Veličina jemnosti $B_{\mathrm{Brad}}$ souvisí s ekvivalent-ním průměrem vlněných vláken $d$. V.HLADÍK [1] publikoval uvedenou tabulku vzájemného přiřazení. Vztah lze vyjádřit také empirickou rovnicí, odvozenou z této tabulky

$$d_{[\mu\mathrm{m}]} = \frac{\left(18{,}8 - \frac{1{,}544u}{1-\mathrm{e}^{u}}\right)\cdot\left(39{,}86 - \frac{0{,}772v}{1-\mathrm{e}^{v}}\right)}{69{,}66 - 0{,}772\cdot B_{\mathrm{Brad}}} \qquad (4)$$

$$u = \frac{1}{2}\left(B_{\mathrm{Brad}} - 65{,}88\right) \qquad v = B_{\mathrm{Brad}} - 38{,}6 \qquad (5)$$

Po výpočtu $d$ z rovnice (4) se určí jemnost $t$ vlněných vláken (např. v tex) z rovnice (3).



obr. 2

**Tvar příčného řezu** vláknem je znázorněn na obr. 2. Jeho plocha $s$ je uzavřena obvodem $p$. Kdyby průřez vlákna byl kruhový, platilo by $p/(\pi d)=1$. Ve všech ostatních případech je hodnota výrazu $p/(\pi d) > 1$. K. MALINOWSKÁ [2] proto definovala **tvarový faktor** průřezu vztahem

$$q = \frac{p}{\pi d} - 1 \qquad (6)$$

| Tvar příčného řezu vláken | Tvarový faktor $q$ |
|---|---|
| "kruhový" | 0 až 0,07 |
| "trojúhelníkový" | 0,09 až 0,12 (ideálně 0,29) |
| bavlna střední zralosti | 0,45 až 0,50 |
| nepravidelný pilovitý | 0,50 až 0,60 |

Odtud plyne pro výpočet **obvodu příčného řezu vlákna** výraz

$$p = \pi d(1+q) \qquad (7)$$

Nejběžnější hodnoty tvarového faktoru $q$ dle K. MALINOWSKÉ [2] jsou uvedeny v tabulce.

**Měrný** (makro)**povrch vláken.** Různě velký povrch vláken často významně ovlivňuje různé vlastnosti (sorbci, omak a j.) textilie. U oděvů se výsledný efekt projeví v míře fyziologického a hygienického komfortu, v příjemnosti nošení. **Měrný povrch vláken** vyjadřuje plochu povrchu vláken ve hmotnostní jednotce materiálu. Platí

$$a = \frac{pl}{\frac{\pi d^2}{4} l\rho} = \frac{\pi d(1+q)}{\frac{\pi d^2}{4}\rho} = \frac{4(1+q)}{\rho d} \tag{8}$$

$$a = \frac{4(1+q)}{\rho d} = \frac{4(1+q)}{\rho}\sqrt{\frac{\pi\rho}{4t}} = 2\sqrt{\pi}\frac{1+q}{\sqrt{\rho t}} \tag{9}$$

Podle výpočtu se měrný povrch u běžných vláken pohybuje řádově v $10^2$ $m^2kg^{-1}$. Pokud se měrný povrch zjišťuje laboratorně metodou B.E.T., jsou naměřené hodnoty podstatně větší. (Např. pro bílenou bavlnu je to asi 6000 až 8000 $m^2kg^{-1}$.) Metoda B.E.T. je založena na adsorbci plynu na povrch vláken a do velikosti plochy zahrnuje i mikrotrhliny a štěrbiny ve vlastním tělese vlákna. Naproti tomu měrný povrch stanovený z rovnice (8) či (9) vychází pouze z tvarového faktoru průřezu vlákna. Je proto vhodnější nazývat tuto veličinu *a* **měrný makropovrch vláken**.

**Štíhlost vlákna.** V textilii se často společně uplatňují dvě veličiny - délka vlákna *l* a jeho ekvivalentní průměr *d*. Má proto smysl zavést **štíhlost vlákna** $\Lambda$ vztahem

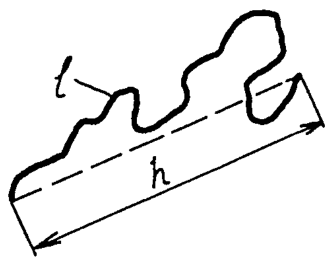
$$\Lambda = l/d \tag{10}$$

U běžných vláken je hodnota štíhlosti kolem několika tisíc, jak ukazuje tabulka.

| Druh vláken | Štíhlost $\Lambda$ |
|---|---|
| bavlna | 1500 |
| vlna | 3000 |
| len (elementární vlákna) | 1250 |
| juta (elementární vlákna) | 170 |
| ramie | 3000 |

**Zobloučkování či navlnění vláken**. Na obr.3 je znázorněno vlákno, nebo úsek vlákna délky *l*, jehož koncové body leží ve vzdálenosti *h*. Míru zobloučkování či navlnění lze popsat veličinou

$$\lambda = \frac{l-h}{h} = \frac{l}{h} - 1 \tag{11}$$



obr. 3

Bude-li taková veličina popisovat celé vlákno, budeme ji nazývat **zobloučkování**. Pokud tato veličina popisuje jen část (úsek) vlák-na, bude nazývána **navlněním** této části vlákna.

**Tahové napětí ve vlákně**. Ve fyzice je definováno **mechanické napětí** $\tau$ jako poměr síly ku ploše na kterou působí. Jednotkou tohoto napětí v mezinárodní soustavě jednotek SI je $1N/1m^2 = 1Pa$. (V praxi bývá nejčastěji užívána jednotka milionkrát větší, totiž 1MPa.) Naproti tomu v textilních technologiích se tradičně používá **textilní napětí** $\sigma$ jako poměr síly ku jemnosti (délkové hmotnosti) textilního útvaru. Jednotkou tohoto napětí v mezinárodní soustavě jednotek SI je 1N/1Mtex. (Nejčastěji se užívá $10^6$ krát větší jednotka $N/tex$, nebo $10^8$ krát větší jednotka

$\mathrm{cN/tex} \equiv \mathrm{mN/dtex}$. Platí $1\,\mathrm{cN/tex} = 0{,}98$ "km tržné délky", což je starší způsob vyjadřování napětí v textiliích.) Je-li vlákno napínáno silou *F*, potom platí s užitím (1)

$$\sigma = \frac{F}{t} = \frac{F}{s\rho} = \frac{\tau}{\rho} \tag{12}$$

# 2. VÍCEKOMPONENTNÍ TEXTILNÍ VLÁKENNÉ ÚTVARY

Nejobecnějším typem množiny vláken je **vlákenná soustava**. Je určena 1) druhem, 2) uspořádáním a 3) spojením vláken. Jsou-li vlákna v soustavě navzájem v kontaktu, mluvíme o **vlákenném útvaru**. Je-li vlákenný útvar připraven **textilní technologií**, je to **textilní vlákenný útvar**. (Pojem "textilní" je tradičním označením, exaktní definice neexistuje.) Je-li vlákenný útvar složen z více druhů vláken, mluvíme o **vícekomponentním vlákenném útvaru.** U takového útvaru se obvykle definují některé **střední charakteristiky** jeho vláken.

**Výchozí veličiny.** Uvažujme vlákenný útvar, složený z *n* komponent. Každou komponentu označme indexem $i = 1,2,...,n$. Veličiny, které se týkají jedné komponenty budou mít index *i*, veličiny celého vlákenného útvaru budou bez indexu. Vycházejme z **jednotky hmotnosti** (např. **1 kg**) vícekomponentního vlákenného útvaru a označme:

$g_i$......... **hmotnostní podíly jednotlivých komponent**, které chápeme jako bezrozměrná čísla (nikoliv v %; např. $g_1 = 0{,}6$, nikoliv 60%). Platí $\sum_{i=1}^{n} g_i = 1$. V útvaru jednotkové hmotnosti (v 1 kg směsi) je $g_i$ současně **hmotností *i*-té komponenty**,

$\rho_i$.......... **měrné hmotnosti vláken jednotlivých komponent**,

$t_i$........... **jemnosti vláken jednotlivých komponent,**

$l_i$........... **střední délka vláken jednotlivých komponent,**

$a_i$......... **měrný** (makro)**povrch jednotlivých komponent.**

**Objem *i*-té komponenty** v jednotce hmotnosti textilního vlákenného útvaru je

$$V_i = \frac{g_i}{\rho_i} \tag{13}$$

**Střední měrná hmotnost** vláken v textilním vlákenném útvaru je

$$\rho = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} V_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{g_i}{\rho_i}\right)} \qquad \left[\frac{1}{\rho} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{g_i}{\rho_i}\right)\right] \tag{14}$$

Střední měrná hmotnost vláken je váženým **harmonickým** průměrem komponent.

**Objemové podíly komponent** můžeme vyjádřit rovnicí

$$v_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} = \frac{\frac{g_i}{\rho_i}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{g_i}{\rho_i}\right)} = \frac{g_i}{\rho_i}\rho = g_i\frac{\rho}{\rho_i} \tag{15}$$

**Souhrnná délka vláken *i*-té komponenty** v hmotnostní jednotce směsi je přímo z definice jemnosti (1) dána vztahem

$$L_i = g_i / t_i \tag{16}$$

**Střední jemnost vláken** je popsána rovnicí (hmotnost směsi je jednotková)

$$t = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} L_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{g_i}{t_i}\right)} \tag{17}$$

což je opět vážený **harmonický** průměr.

**Délkové podíly komponent** lze vyjádřit výrazem

$$\lambda_i = \frac{L_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i} = \frac{\frac{g_i}{t_i}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{g_i}{t_i}\right)} = \frac{g_i}{t_i}t = g_i\frac{t}{t_i} \tag{18}$$

Z poslední rovnice nalezneme pro $L_i$ tvar

$$L_i = \lambda_i \sum_{i=1}^{n} L_i \tag{18a}$$

**Počet vláken *i*-té komponenty** v hmotnostní jednotce směsi je

$$n_i = \frac{L_i}{l_i} = \frac{\lambda_i \sum_{i=1}^{n} L_i}{l_i} = \frac{\lambda_i}{l_i}\sum_{i=1}^{n} L_i \tag{19}$$

**Celkový počet vláken** v hmotnostní jednotce směsi je

$$n = \sum_{i=1}^{n} n_i = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\lambda_i}{l_i}\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)\right] = \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{l_i}\right) \tag{20}$$

**Střední délka vláken** ve směsi vede k rovnici pro vážený **harmonický průměr**

$$l = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{l_i}\right)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{l_i}\right)} \tag{21}$$

**Četnostní podíly komponent** je možné definovat vztahem

$$\upsilon_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\frac{\lambda_i}{l_i}\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{l_i}\right)} = \frac{\frac{\lambda_i}{l_i}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{l_i}\right)} \tag{22}$$

**Povrch vláken *i*-té komponenty** plyne z rovnic (16), (7), (1) a (3)

$$A_i = L_i p_i = \frac{g_i}{t_i}\left[\pi d_i\left(1+q_i\right)\right] = \frac{g_i \pi d_i\left(1+q_i\right)}{s_i \rho_i} = \frac{g_i \pi d_i\left(1+q_i\right)}{\frac{\pi d_i^2}{4}\rho_i} = g_i \frac{4\left(1+q_i\right)}{d_i \rho_i} = g_i a_i \tag{23}$$

Použitá veličina $a_i = 4\left(1+q_i\right)/\left(d_i \rho_i\right)$ je v souladu s (8) měrným povrchem *i*-té komponenty.

**Střední měrný povrch** vláken vede k rovnici pro vážený **aritmetický průměr**

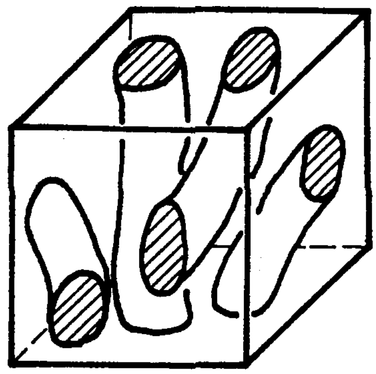
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{1} = \sum_{i=1}^{n}\left(g_i a_i\right) \tag{24}$$

**Podíly povrchů komponent** ve směsi je pak možno vyjádřit vztahem

$$\alpha_i = \frac{A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{g_i a_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(g_i a_i\right)} = \frac{g_i a_i}{a} = g_i \frac{a_i}{a} \tag{25}$$

# 3. ZAPLNĚNÍ A PÓROVITOST TEXTILNÍCH VLÁKENNÝCH ÚTVARU

## 3.1 Zaplnění textilních vlákenných útvarů

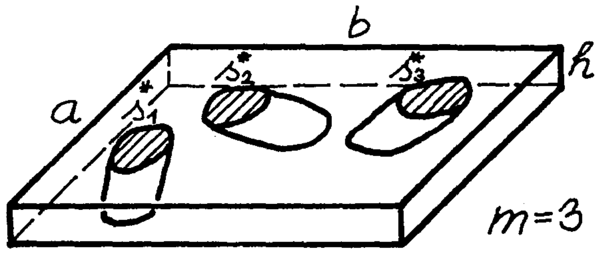


obr. 4

Na obr. 4 je znázorněna část textilního vlákenného útvaru ve tvaru hranolu s **celkovým objemem** $V_c$. Uvnitř tohoto tělesa jsou úseky vláken s úhrnným **objemem vláken** $V$ a platí $V \leq V_c$. Rozdíl $V_c$-$V$ vyjadřuje **objem vzduchu** mezi vlákny.

**Objemová definice zaplnění** (fibre packing density, Packungsdichte, koeficient plotnosti) je dána výrazem

$$\mu = \frac{V}{V_c} \qquad \mu \in \langle 0,1 \rangle \tag{26}$$




obr. 5

## Plošná interpretace zaplnění.

Na obr. 5 je znázorněn plochý hranol o rozměrech *a, b, h*, kde *h* je velmi malé. Horní rovinou *ab* je protínáno *m* vláken ve vyšrafovaných řezných ploškách $s_j^*$, kde $j = 1, 2, \cdots, m$. Objem jednoho vlákna je $s_j^* h$, objem všech vláken je $V = \sum_{j=1}^{m} (s_j^* h) = h \cdot \sum_{j=1}^{m} s_j^* = h \cdot S$.

Veličina $S = \sum_{j=1}^{m} s_j^*$ je souhrnná **plocha řezů vláken**. Celkový objem hranolu je $V_c = abh = h \cdot S_c$,, kde $S_c$=*ab* je **celková řezná plocha** vlákenným útvarem. Pro **plošnou interpretaci zaplnění** plyne z (26) rovnice

$$\mu = \frac{V}{V_c} = \frac{hS}{hS_c} = \frac{S}{S_c} \tag{27}$$

**Hmotnostní interpretace zaplnění.** Uvažujme, že vlákenný útvar má celkový objemem $V_c$, objem vláken *V* a hmotnost *M*. Měrná hmotnost vláken je $\rho = M/V$. **Měrnou hmotnost vlákenného útvaru** lze definovat vztahem $\gamma = M/V_c$. Odtud plyne $M = V\rho = V_c\gamma$ a vzhledem k definici (26) platí

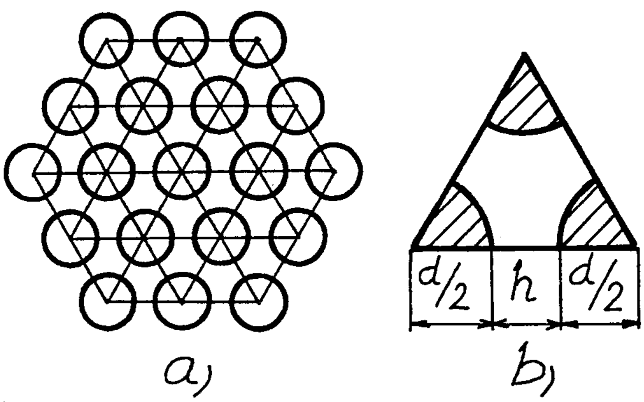
$$\mu = \frac{V}{V_c} = \frac{(V_c\gamma)/\rho}{V_c} = \frac{\gamma}{\rho} \tag{28}$$

Rovnice je **hmotnostní interpretací zaplnění**. (Pojetí užívané např. v modelech kontinua.)

## 3.2 Typy struktur podle zaplnění

Souvislosti některých vlastností se zaplněním nalezneme z modelu **hexagonální vlákenné struktury.** Ten popisuje řez paralelním svazkem válcových vláken - obr. 6a). Osy vláken jsou ve vrcholech pravidelné šestiúhelníkové sítě. Jednotkou struktury je **rovnostranný trojúhelník**, zvětšený na obr. 6b). Válcová vlákna mají průměrem *d* a jsou od sebe vzdálena *h*. Plocha trojúhelníku je

$$S_c = (d+h) \cdot (d+h)\cos 30^\circ / 2 = (d+h)^2 \sqrt{3}/4.$$




obr. 6

Vyšrafovaná plocha vlákenných řezů tvoří dohromady polovinu kruhu s průměrem *d*. Její velikost je $S = \pi d^2/8$. Zaplnění této struktury je zaplněním analyzovaného trojúhelníku.

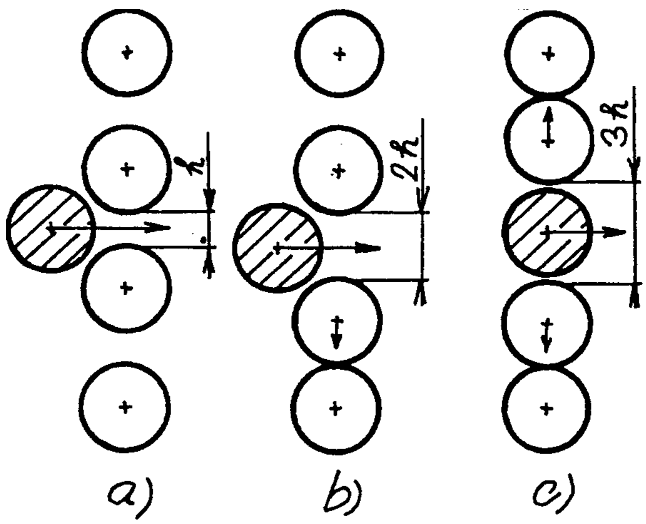
$$\mu = \frac{S}{S_c} = \frac{\pi d^2}{8} \frac{4}{(d+h)^2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{d}\right)^2} \tag{29}$$

**Limitní struktura** má vzdálenost $h$ = 0. Vlákna se vzájemně dotýkají. Zaplnění této struktury je podle rovnice (29)

$$\mu = \mu_{\text{lim}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cong 0{,}907 \tag{30}$$

**Kompaktní struktura** má vzdálenost $h < d/2$. Její zaplnění je dle (29)

$$\mu > \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{d/2}{d}\right)^2} \cong 0{,}403 \tag{31}$$



obr. 7

Vlastnosti této struktury plynou z obr. 7. Vyšrafované vlákno se působením síly snaží projít řadou vláken s $h<d/2$ - obr. 7a). Nestačí však odsunout jen jedno vlákno z řady - obr. 7b), ale dvě nebo více vláken - obr. 7c). Tato "přesila" (2 či více vláken) průchodu vlákna patrně zabrání. Kompaktní struktura je typem struktury s **omezeným individuálním pohybem vláken**. Bude proto poměrně **pevná**, **tvrdá** a **tuhá**.

**Volná struktura** má vzdálenost $h > d$. Její zaplnění je dle (29)

$$\mu < \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{d}\right)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{1}{(1+1)^2} \cong 0{,}227 \tag{32}$$

Ve volné struktuře může vlákno projít mezerou v řadě, aniž dojde k posuvům ostatních vláken. Struktura bude proto **měkká**, **splývavá**, **porézní**, ale současně **málo mechanicky odolná**.

**Přechodová struktura** má vzdálenost $h \in \langle d/2;\ d \rangle$. Zaplnění $\mu \in \langle 0{,}227;\ 0{,}403 \rangle$, jak plyne z (31) a (32). Její vlastnosti budou mezi vlastnostmi struktury kompaktní a volné.

## 3.3 Porezita a průměr mezivlákenného póru

**Porezita** vyjadřuje podíl objemu vlákenného útvaru vyplněného vzduchem. Vlákenný útvar má celkový objem $V_c$, vlákna v něm mají objem $V$. **Objem vzduchu** (přesněji objem mezivlákenných prostorů) je $V_c$-$V$. **Porezita** je pak definována vztahem

$$\psi = \frac{V_c - V}{V_c} = 1 - \frac{V}{V_c} = 1 - \mu \tag{33}$$

Stejný objem vzduchu však může být v několika málo velkých pórech, nebo v množství malých pórů. Proto je třeba stanovit střední velikost mezivlákenných pórů.

## Obecná geometrická charakteristika

$$\xi = \frac{\text{objem tělesa}}{\text{povrch tělesa}} \tag{34}$$

má **rozměr délky**, takže popisuje **velikost** uvažovaného **tělesa**. Např. krychle o straně $a$ má objem $a^3$, povrch $6a^2$ a charakteristiku $\xi = a^3/(6a^2) = a/6$. Podobně válec o průměru $d$ a délce $l$ má objem $l \cdot \pi d^2/4$, povrch $l \cdot \pi d$ a charakteristiku $\xi = \left[l(\pi d^2/4)\right]/(l\pi d) = d/4$. Charakteristika $\xi$ závisí také na **tvaru** tělesa. (Pro krychli a válec jsme nalezli jiný vztah k rozměru $a$ nebo $d$.) Veličinou $\xi$ lze proto porovnávat jen velikosti **tvarově podobných těles**.

**Objem pórů** (t.j. objem vzduchu) ve vlákenném útvaru je za užití (26) a (33)

$$V_{\mathrm{p}} = V_{\mathrm{c}} - V = V_{\mathrm{c}}\,\psi = \frac{V}{\mu}(1-\mu) = V\frac{1-\mu}{\mu} \tag{35}$$

**Úhrnná délka všech vláken** ve vlákenném útvaru je $L$. Pro objem vláken platí $V = (\pi d^2/4)L$ a objem pórů je dle (35)

$$V_{\mathrm{p}} = \frac{\pi d^2}{4} L \frac{1-\mu}{\mu} \tag{36}$$

**Povrch vláken** ve vlákenném útvaru je při užití (7)

$$A = Lp = L\pi d(1+q) \tag{37}$$

**Povrch pórů** lze odvodit z *předpokladu*, že tam, kde končí vlákno, začíná vzduch kolem něj. **Povrch pórů je současně povrchem vláken**. (Uvažujeme styk vláken v bodech či v křivkách. Pokud by byly v kontaktech mezi vlákny styčné plochy, nemohly by být do povrchu pórů zahrnovány.) Předpoklad lze užitím (37) zapsat ve tvaru

$$A_{\mathrm{p}} = A = L\pi d(1+q) \tag{38}$$

**Geometrická charakteristika $\xi$ pórů** má za užití (34), (36) a (38) tvar

$$\xi = \frac{V_{\mathrm{p}}}{A_{\mathrm{p}}} = \frac{\frac{\pi d^2}{4} L \frac{1-\mu}{\mu}}{L\pi d(1+q)} = \frac{1-\mu}{\mu}\,\frac{d}{4(1+q)} \tag{39}$$

**Tvar mezivlákenných pórů** je ve skutečnosti značně složitý. Pro snazší řešení proto zavedeme nejprve modelový *předpoklad*, že **mezivlákenné póry mají tvar kapilár**. (Kapiláry nemusí mít kruhový průřez, ale i tak je zavedený předpoklad značným zjednodušením skutečnosti.)

Póry si lze nyní představit jako "vzduchová vlákna", pro která jsou definované podobné veličiny, jako u vláken. Bude používáno značení:

$L_\mathrm{p}$ … délka pórových kapilár ve vlákenném útvaru (analogie úhrnné délky vláken),

$d_\mathrm{p}$ … ekvivalentní průměr póru (analogie ekvivalentního průměru vláken),

$q_\mathrm{p}$ … tvarový faktor póru (analogie tvarového faktoru vláken).

**Obvod příčného řezu pórem** můžeme vyjádřit v analogii k (7) rovnicí

$$p_\mathrm{p} = \pi d_\mathrm{p}\left(1 + q_\mathrm{p}\right) \tag{40}$$

**Povrch pórů** je v analogii k (37) vyjádřen vztahem

$$A_\mathrm{p} = L_\mathrm{p} p_\mathrm{p} = L_\mathrm{p} \pi d_\mathrm{p}\left(1 + q_\mathrm{p}\right) \tag{41}$$

**Objem pórů** je

$$V_\mathrm{p} = \frac{\pi d_\mathrm{p}^2}{4} L_\mathrm{p} \tag{42}$$

**Geometrická charakteristika $\xi$ pórů** je užitím (34), (41) a (42)

$$\xi = \frac{V_\mathrm{p}}{A_\mathrm{p}} = \frac{\frac{\pi d_\mathrm{p}^2}{4} L_\mathrm{p}}{L_\mathrm{p} \pi d_\mathrm{p}\left(1 + q_\mathrm{p}\right)} = \frac{d_\mathrm{p}}{4\left(1 + q_\mathrm{p}\right)} \tag{43}$$

**Ekvivalentní průměr póru** plyne z porovnání pravých stran vztahů (39) a (43)

$$\frac{1-\mu}{\mu} \frac{d}{4(1+q)} = \frac{d_\mathrm{p}}{4\left(1+q_\mathrm{p}\right)} \qquad d_\mathrm{p} = \frac{1+q_\mathrm{p}}{1+q} \frac{1-\mu}{\mu} d \tag{44}$$

**Poměr délek vláken a pórů** je možno určit ze vztahů (38), (41) a (44).

$$L\pi d(1+q) = L_\mathrm{p} \pi d_\mathrm{p}\left(1+q_\mathrm{p}\right) \qquad \frac{L}{L_\mathrm{p}} = \frac{d_\mathrm{p}}{d} \cdot \frac{1+q_\mathrm{p}}{1+q} = \left(\frac{1+q_\mathrm{p}}{1+q}\right)^2 \frac{1-\mu}{\mu} \tag{45}$$

**Tvarový předpoklad - varianta I.** Protože geometrická charakteristika $\xi$ závisí na tvaru pórů, zavádíme zjednodušující *předpoklad*, že **póry mají nezávisle na zaplnění textilního vlákenného útvaru stále stejný tvar**. Pro tvarový faktor póru pak platí $q_\mathrm{p}$ = konst., tvarový faktor vlákna $q$ = konst. a tedy

$$\frac{1+q_\mathrm{p}}{1+q} = k \quad \mathrm{K}\ \text{konst.} \tag{46}$$

Pro **ekvivalentní průměr póru** nyní z rovnice (44) plyne

$$d_\mathrm{p} = k \frac{1-\mu}{\mu} d \tag{47}$$

a pro **poměr délek vláken a pórů**, či **délku pórových kapilár** platí z (45)

$$\frac{L}{L_p} = k^2 \frac{1-\mu}{\mu} \qquad L_p = \frac{L}{k^2} \frac{\mu}{1-\mu} \tag{48}$$

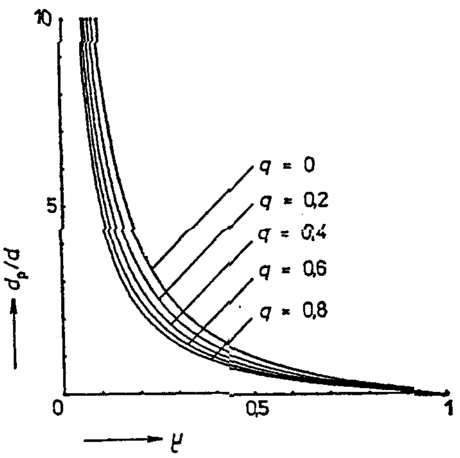
Je důležité si povšimnout, že nejen průměr póru, ale i délka pórů závisí na zaplnění; čím **větší zaplnění**, tím **menší průměr póru** a tím **větší délka pórových kapilár**. (Ve více stlačeném materiálu se vzduchové mezery rozdrobí do malých dlouhých pórů.)

**Idea válcových pórů** je zvláštním případem varianty I, v níž je $q_p = 0$. Pak platí

$$\frac{1}{1+q} = k \tag{49}$$

$$d_p = \frac{1}{1+q} \frac{1-\mu}{\mu} d \tag{50}$$

$$L_p = L(1+q)^2 \frac{\mu}{1-\mu} \tag{51}$$




obr. 8

Např. savost textilií můžeme při použití výrazů (50), (51) modelovat prostřednictvím tradičních fyzikálních vzorců pro vzlínavost ve válcových kapilárách. (Skutečné póry jistě nejsou válcové. Povrchy vláken, které jsou zdrojem elevačních sil, jsou však odvozeny správně.) Vztah (50) charakterizuje graf na obr. 8

.

**Tvarový předpoklad - varianta II**. Podle alternativního *předpokladu* **póry mají nezávisle na zaplnění textilního vlákenného útvaru stále stejnou délku.** Protože také úhrnná délka vláken ve vlákenném útvaru je konstantní, lze užitím (45) psát $\frac{L}{L_p} = \left(\frac{1+q_p}{1+q}\right)^2 \frac{1-\mu}{\mu} = c$, kde $c$ = konst. Odtud

$$\frac{1+q_p}{1+q} = \sqrt{\frac{c\mu}{1-\mu}} \tag{52}$$

**Tvarový faktor póru** podle tohoto vztahu **roste s rostoucím zaplněním**. Jemné póry jsou tvarově členitější, než póry velké. Pro velmi malá $\mu$ vychází dle (52) dokonce hodnota $q_p < 0$, a v limitním případě $\mu \to 0$ a $q_p \to (-1)$. To je zdánlivě paradox, neboť dle zavedené definice (6) musí být tvarový faktor vždy $\geq 0$. Vysvětlení plyne z užitého předpokladu, že póry mají tvar kapilár. Uvažujme např. paralelní svazek vláken se strukturou dle obr. 6a). Pak pod pojmem "kapilára" mezivlákenného póru můžeme chápat vzduchový prostor mezi výsečemi vláken na obr. 6b). Vztahem (38) byl zaveden předpoklad, že povrch vláken (totiž **pouze** povrch vláken) je povrchem pórů. **Do povrchu pórů se** tedy **nezahrnuje styk pórů v linii vzduch-vzduch**.

To však je styk dvou pórů v úsečce délky $h$ na obr. 6b). Takto zobecněný tvarový faktor póru pak umožňuje nalézat hodnoty $q_\mathrm{p} \geq -1$.

Z rovnic (44) a (52) lze vyjádřit **ekvivalentní průměr póru**

$$d_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{c\mu}{1-\mu}\,\frac{1-\mu}{\mu}}\,d = \sqrt{c}\,\sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}}\,d \qquad (53)$$

Varianta II výpočtu ekvivalentního průměru póru odpovídá spíše svazkům přibližně paralelních vláken, které se používají např. v procesech přádelnických.

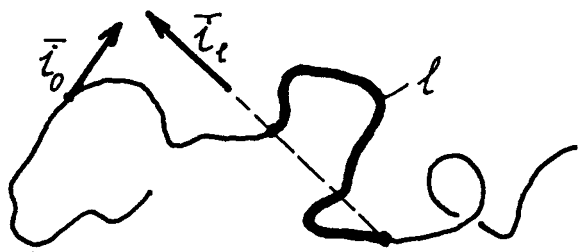
Je-li speciálně délka pórů je shodná s délkou vláken (ke každému vláknu v přibližně paralelním svazku vláken přísluší právě jedna kapilára), pak je $L/L_\mathrm{p} = c = 1$ a z (53) platí

$$d_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\mu}{1-\mu}\,\frac{1-\mu}{\mu}}\,d = \sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}}\,d \qquad (54)$$

# 4. SMĚROVÉ USPOŘÁDÁNÍ VLÁKEN

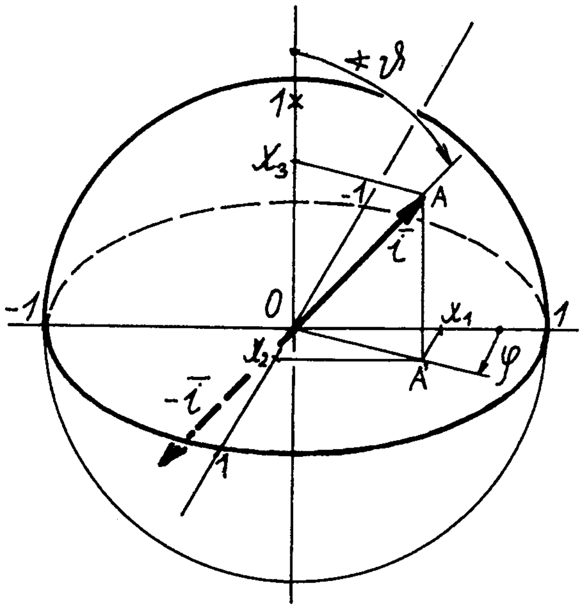
## 4.1 Popis uspořádání

Na obr. 9 je znázorněno vlákno z vlákenného útvaru. Je zřejmé, že intuitivní chápání jeho *směru* není jednoznačné. Pojem směru je proto třeba nějak exaktně definovat.




obr. 9

**Vektor orientace** popisuje směr úseku vlákna. Osa vlákna je hladká křivka. **Směr elementárního úseku** vlákna v okolí daného bodu popisujeme **tečným jednotkovým vektorem i**$_0$. Pro **úsek konečné délky** $l$ se obvykle přijímá *konvence*, že jeho směr je popsán **jednotkovým vektorem i**$_l$, který leží na **spojnici koncových bodů**.




obr. 10

Směrové uspořádání popisujeme **rozložením** těchto vektorů v prostoru. Je proto vhodné připomenout některé souvislosti plynoucí z **diferenciální geometrie**.

Na obr. 10 je v jednotkové kouli znázorněn obecný jednotkový vektor **i**. Jeho pravoúhlé **kartézské souřadnice** jsou $x_1$, $x_2$, $x_3$, jeho **sférické** (kulové) **souřadnice** jsou $r$, $\vartheta$, $\varphi$. Je znázorněn také vektor opačného smyslu **-i**. Oba vektory přitom vyjadřují týž směr. Proto zavedeme *konvenci:* **Směr je popsán jednotkovým vektorem, jehož složka $x_3 > 0$**. (Koncové body směrových vektorů leží v obr. 10 jen na horní polokouli.)

**Pravoúhlé kartézské souřadnice**. Z definice délky vektoru plyne

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \qquad x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \tag{55}$$

Souřadnice $x_3$ je funkcí souřadnic $x_1$ , $x_2$ a směrový vektor má souřadnice

$$\mathbf{i} \equiv (x_1,\, x_2,\, x_3) \equiv \left(x_1,\, x_2,\, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right) \tag{56}$$

Souřadnice $x_1 \in (-1,\ 1)$, t.j. $x_1^2 \in (0,\ 1)$*). Z odmocniny ve výrazu (55) pak vyplývá $x_2^2 \le 1 - x_1^2$, takže $x_2 \in \left(-\sqrt{1 - x_1^2},\ \sqrt{1 - x_1^2}\right)$*). **Oblast ω všech možných směrů** je tedy

$$\omega \equiv \begin{cases} x_1 \in (-1,\ 1) \\ x_2 \in \left(-\sqrt{1 - x_1^2},\ \sqrt{1 - x_1^2}\right) \\ x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \end{cases} \tag{57}$$

Nějakou funkci $u^*(x_1,\, x_2,\, x_3)$ lze vzhledem k (57) zapsat tvarem

$$u^*(x_1,\, x_2,\, x_3) = u^*\left(x_1,\, x_2,\, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right) = u(x_1,\, x_2)$$

**Určitý integrál** této funkce přes všechny směry je vzhledem k (57)

$$I = \iint_\omega u^*(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \iint_\omega u(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} u(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2\right]\mathrm{d}x_1 \tag{58}$$

**Sférické souřadnice**. Jednotkový směrový vektor **i**, $r = |\mathbf{i}| = \mathrm{OA} = 1$, svírá s osou $x_3$ úhel $\vartheta$. Průmět OA' svírá s osou $x_1$ úhel $\varphi$. Z obr. 10 plyne $\mathrm{OA}' = \mathrm{OA}\sin\vartheta = \sin\vartheta$ a můžeme psát

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(\vartheta, \varphi) = \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ x_2 &= x_2(\vartheta, \varphi) = \sin\vartheta\,\sin\varphi \\ x_3 &= x_3(\vartheta) = \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

(Lze se snadno přesvědčit, že $|\mathbf{i}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\sin^2\vartheta\,\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\,\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta} = 1$.) Vektor **i** je definován pouze pro $x_3 > 0$, t.j. dle třetí rovnice v (59) pro $\vartheta \in (0, \pi/2)$. V tomto případě je $\sin\vartheta > 0$, $\cos\vartheta > 0$ a ze vztahů (59) lze nalézt

$$x_1^2 + x_2^2 = \sin^2\vartheta\,\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\,\sin^2\varphi \qquad \sin\vartheta = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1}{\sin\vartheta} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

---

*) Pro zjednodušení **přípustné intervaly souřadnic jsou zapisovány vždy jako otevřené**. Uvažujeme totiž "rozumné" spojité rozložení směrů, takže v jednom jediném směru (např. ve směru osy $x_3$.) je jen nekonečně málo vlákenných úseků. Proto i když je mez intervalu přípustná (uzavřený interval), nevzniká žádná konečně velká chyba.

Souhrnně platí **transformační vztahy**

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta = \vartheta(x_1, x_2) = \arcsin\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\\&\varphi = \varphi(x_1, x_2) = \begin{cases}\arccos\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2 > 0\\[2ex] 2\pi - \arccos\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \ldots\ldots\; x_2 < 0\end{cases}\\&r = 1\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Ve sférických souřadnicích lze vymezit **oblast** $\omega$ **všech možných směrů** přímo z obr. 10. Platí

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta \in (0, \pi/2)\\&\varphi \in (0, 2\pi)\\&r = 1\end{aligned}\right\} \equiv \omega \tag{61}$$

(Směr je ve sférických souřadnicích popsán dvojicí souřadnic $\vartheta, \varphi$ podobně, jako byl v kartézských souřadnicích popsán dvojicí souřadnic $x_1, x_2$.)

Nějakou funkci $v^*(\vartheta, \varphi, r)$ lze užitím (61) zapsat ve tvaru $v^*(r, \vartheta, \varphi) = v^*(1, \vartheta, \varphi) = v(\vartheta, \varphi)$. **Určitý integrál** této funkce přes všechny směry je vzhledem k (61)

$$I = \iint\limits_{\omega} v^*(r, \vartheta, \varphi)\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi = \iint\limits_{\omega} v(\vartheta, \varphi)\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \left[\int\limits_0^{2\pi} v(\vartheta, \varphi)\, \mathrm{d}\varphi\right] \mathrm{d}\vartheta \tag{62}$$

**Transformace kartézských a sférických souřadnic**. Pro **Jakobián** transformace souřadnic $\{x_1, x_2\}$ do $\{\vartheta, \varphi\}$ nalezneme užitím vztahů (59)

$$\begin{aligned}J_\mathrm{K} &= \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varphi}\\[2ex] \dfrac{\partial x_2}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \varphi}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos\vartheta\,\cos\varphi & -\sin\vartheta\,\sin\varphi\\ \cos\vartheta\,\sin\varphi & \sin\vartheta\,\cos\varphi\end{vmatrix} =\\&= \cos^2\varphi\,(\sin\vartheta\,\cos\vartheta) + \sin^2\varphi\,(\sin\vartheta\,\cos\vartheta) = \sin\vartheta\,\cos\vartheta\end{aligned} \tag{63}$$

Užijí-li se transformační vztahy (59) jako substituce v integrálu (58), potom při respektování (63)

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_{\omega} u(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \iint\limits_{\omega} u[x_1(\vartheta, \varphi), x_2(\vartheta, \varphi)]\, J_\mathrm{K}\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi =\\&= \iint\limits_{\omega} u[x_1(\vartheta, \varphi), x_2(\vartheta, \varphi)] \sin\vartheta\,\cos\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{64}$$

Nechť nějaký problém, řešený v souřadnicích $\{x_1, x_2\}$ vede k funkci $u(x_1, x_2)$ a k integrálu $I$ dle (58). Týž problém v souřadnicích $\{\vartheta, \varphi\}$ vede k funkci $v(\vartheta, \varphi)$ a k integrálu $I$ dle (62). Protože hodnota integrálu $I$ musí být v obou případech stejná, platí

$$I = \iint\limits_{\omega} u(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \iint\limits_{\omega} v(\vartheta, \varphi)\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \tag{65}$$

Z porovnání (65) s (64) pak plyne

$$v(\vartheta, \varphi) = u[x_1(\vartheta, \varphi), x_2(\vartheta, \varphi)] \sin\vartheta\,\cos\vartheta \tag{66}$$

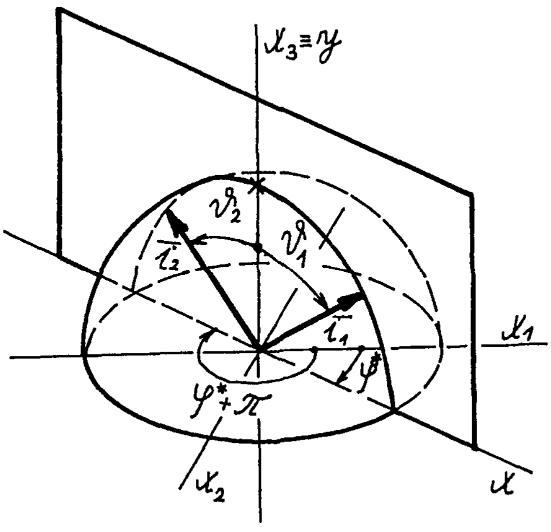
což je vztah, umožňující nalézt funkci $v$ při znalosti funkce $u$.

Pro obrácený výpočet plyne z (60) $\sin\vartheta = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\cos\vartheta = \sqrt{1-\sin^2\vartheta} = \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ a z (66)

$$u(x_1,x_2) = \frac{v\left[\vartheta(x_1,x_2),\varphi(x_1,x_2)\right]}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \tag{67}$$

## 4.2 Model orientace vláken v rovině

**Uspořádání vláken v rovině** (např. v pavučince z mykacího stroje). Nechť vlákna leží v rovině obsahující osu $x_3$ - viz obr. 11. Do této roviny patří body, jejichž úhel $\varphi$ nabývá jenom dvou hodnot: $\varphi^*$ nebo $\varphi^* + \pi$. (Parametr $\varphi^*$ vlastně rovinu definuje; uvažujeme $\varphi^* \in (0, \pi)$. )




obr. 11

Dva směrové vektory $\mathbf{i}_1$ a $\mathbf{i}_2$ svírají s osou $x_3$ úhly $\vartheta_1$ a $\vartheta_2$, vektor $\mathbf{i}_1$ má $\varphi = \varphi^*$, vektor $i_2$ má $\varphi = \varphi^* + \pi$. Popis vektoru tedy vyžaduje informace o **obou** souřadnicích. Proto je výhodnější zavést úhel $\psi$, definovaný vztahem

$$\left.\begin{array}{l} \psi = \begin{cases} \vartheta \,\ldots\ldots\ldots \text{je-li } \varphi = \varphi^* \\ -\vartheta \,\ldots\ldots\ldots \text{je-li } \varphi = \varphi^* + \pi \end{cases} \\ \psi \in (-\pi/2, \pi/2) \end{array}\right\} \tag{68}$$

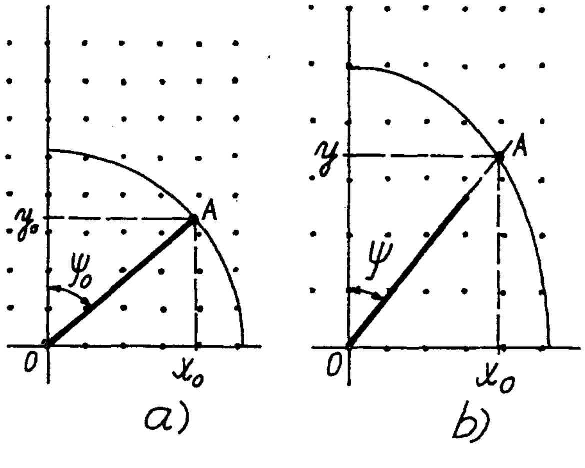
Pak je **směr popsán jedinou veličinou** $\psi$.

V **rovině vláken** označíme osu $x_3$ jednodušeji jako $y$. Průsečnici roviny vláken s podstavou $x_1\,x_2$ (t.j. přímku $x_1 \operatorname{tg}\varphi^* - x_2 = 0$) označíme $x$. Tak jsme zavedli **kartézské pravoúhlé souřadnice** $\{x, y\}$ a v nich směr vláken popsaný (orientovaným) úhlem $\psi$.

**Vlivy působící na vlákna.** Na vlákno a na jeho části působí různým způsobem jak součásti textilních strojů, tak i ostatní vlákna v okolí. Směrové uspořádání vláken je obvykle **náhodné** a je popisováno **hustotou pravděpodobnosti směrového uspořádání** $f(\psi)$.

Na vlákna obvykle působí dva vlivy. Prvým je **ryze náhodný** charakter ukládání vláken. (Sám o sobě by způsobil stejnou četnost ve všech směrech.) Textilní technologické procesy ovšem současně **preferují jeden směr** uspořádání vláken. (Podélný při česání, protahování, mykání; naopak příčný např. při pneumatické tvorbě rouna).

**Náhradní modelová představa.** Uvažujme idealizovaná vlákna ve tvaru **úsečky**. Skutečná vlákna, různě zohýbaná, si představujeme myšleně rozřezaná na velmi krátké úseky. Každý takový úsek má přibližně tvar úsečky. Naše modelová představa popisuje **směrové rozložení** těchto **krátkých úseků** a nepřihlíží přitom k jejich vzájemnému ovlivňování.



obr. 12

Představa dále zobrazuje reálný technologický proces modelem **ohroceného pružného pásu**. (Představa je **myšlenkovou abstrakcí**, není totožná s reálným procesem či strojem!)

Z pružného ("gumového") pásu vyčnívá mnoho jehliček, které nahrazují působení okolních vláken - obr. 12. Jedno idealizované vlákno (krátký úsek) je na obr. 12a). Počátek souřadnic O je v počátečním bodu vlákna. Koncový bod vlákna má souřadnice $(x_0, y_0)$. Směr popisuje orientovaný úhel $\psi_0$; platí $\mathrm{tg}\psi_0 = x_0/y_0$. Místo koncového bodu vlákna, je označeno na pružném pásu jako bod A. Pro názornost je také vyznačena čtvrtkružnice s poloměrem OA.

**Preference jednoho směru** se modeluje **protažením** pružného pásu ve směru osu $y$. Z uspořádání dle obr. 12a) vznikne uspořádání dle obr. 12b). Oblouk kružnice se stane eliptickým, bod A na pásu má nové souřadnice $(x_0, y)$, které již nejsou totožné s koncem vlákna. Vlákno mezi jehličkami proklouzne, ale zůstane na přímce OA. Nový směr vlákna je popsán úhlem $\psi$. Pro užitý **průtah** pružného pásu platí

$$C = \frac{y}{y_0} \qquad y = Cy_0 \tag{69}$$

Nový směrový úhel lze z obr. 12b) a vztahu (69) vyjádřit rovnicí

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{x_0}{y} = \frac{x_0}{Cy_0} = \frac{\mathrm{tg}\psi_0}{C} \tag{70}$$

Diferencováním se získá

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\cos^2\psi} = \frac{\mathrm{d}\psi_0}{C\cos^2\psi_0} = \mathrm{d}\psi_0 \frac{1+\mathrm{tg}^2\psi_0}{C} = \mathrm{d}\psi_0 \frac{1+C^2\mathrm{tg}^2\psi}{C}$$

$$\mathrm{d}\psi_0 = \mathrm{d}\psi \frac{C}{\cos^2\psi\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\psi\right)} = \mathrm{d}\psi \frac{C}{\cos^2\psi + C^2\sin^2\psi} = \mathrm{d}\psi \frac{C}{\cos^2\psi + C^2 - C^2\cos^2\psi} =$$

$$= \mathrm{d}\psi \frac{C}{C^2 - \left(C^2-1\right)\cos^2\psi} \tag{71}$$

**Ryze náhodnou stránku** uspořádání vyjádříme představou, že **ve výchozím stavu** dle obr. 12a) **jsou vlákna ve všech směrech stejně četná**. Hustota pravděpodobnosti výchozího rozložení $f_0(\psi_0)$ je pak konstantní. Podle statistiky $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_0(\psi_0)\,\mathrm{d}\psi_0 = 1$ a proto platí

$$f_0(\psi_0) = \frac{1}{\pi} \ldots \text{konst.} \left(\text{potom} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_0(\psi_0)\,\mathrm{d}\psi_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\pi}\mathrm{d}\psi_0 = 1\right) \tag{72}$$

**Elementární interval úhlů** $(\psi_0,\ \psi_0+\mathrm{d}\psi_0)$ **před protažením** obsahuje vlákna, jejichž **poměrná četnost** je vyjádřena elementární plochou $f_0(\psi_0)\mathrm{d}\psi_0$ pod křivkou výchozí hustoty pravděpodobnosti $f_0(\psi_0)$.

Protažením se elementární interval úhlů $(\psi_0,\ \psi_0+\mathrm{d}\psi_0)$ přesune z úhlu $\psi_0$ na nový úhel $\psi$ a jeho velikost se změní z $\mathrm{d}\psi_0$ na $\mathrm{d}\psi$. Hustotu pravděpodobnosti směrového rozložení vláken **po protažení** (obr. 12b) značíme $f(\psi)$ a odpovídající **poměrná četnost** je $f(\psi)\mathrm{d}\psi$. Avšak všechna vlákna, která v elementární úhlové výseči ležela před protažením, v ní zůstávají i po protažení. Proto platí rovnice

$$f_0(\psi_0)\mathrm{d}\psi_0 = f(\psi)\mathrm{d}\psi \tag{73}$$

**Hustota pravděpodobnosti směrového uspořádání** vláken po pro-tažení je při použití vztahů (71) až (73) vyjádřena rovnicí

$$f(\psi)\mathrm{d}\psi = f_0(\psi_0)\mathrm{d}\psi_0 = \frac{1}{\pi}\mathrm{d}\psi\,\frac{C}{C^2-(C^2-1)\cos^2\psi}$$

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi}\,\frac{C}{C^2-(C^2-1)\cos^2\psi} \tag{74}$$

Vzhledem k úpravám uvedeným ve vztahu (63) je možno též psát

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi}\,\frac{C}{\cos^2\psi\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\psi\right)} \tag{74a}$$

Pro maximum a minimum této hustoty pravděpodobnosti plynou ze (74) vztahy

$$f_{\max} = f(0) = C/\pi \qquad f_{\min} = f(\pi/2) = 1/(\pi C) \qquad f_{\max}/f_{\min} = C^2 \tag{75}$$

Význam parametru $C$ (modelově "průtah" pružného pásu) můžeme vzhledem k rovnici (75) chápat obecněji. Je to **míra preference** (podélného) **směru**, vyjádřená poměrem $\sqrt{f_{\max}/f_{\min}}$.

**Distribuční funkce směrového uspořádání** vláken je definovaná rovnicí $F(\psi) = \int_{-\pi/2}^{\psi} f(\psi)\,d\psi$. Užitím (74a) nalezneme výraz

$$F(\psi) = \int_{-\pi/2}^{\psi} f(\psi)\mathrm{d}\psi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\psi}\frac{C}{\cos^2\psi\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\psi\right)}\mathrm{d}\psi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{C\mathrm{tg}\psi}\frac{C}{\cos^2\psi\left(1+x^2\right)}\,\frac{\cos^2\psi}{C}\mathrm{d}x$$

$$x = C\,\mathrm{tg}\psi;\quad \mathrm{d}x = \left(C/\cos^2\psi\right)\mathrm{d}\psi;\quad \mathrm{d}\psi = \left(\cos^2\psi/C\right)\mathrm{d}x$$

$$F(\psi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{C\mathrm{tg}\psi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{arctg}x\right]_{-\infty}^{C\mathrm{tg}\psi} = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(C\,\mathrm{tg}\psi\right)+\frac{1}{2} \qquad \psi\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right) \tag{76}$$

**Hustota pravděpodobnosti rozložení tangent směrových úhlů.**

S ohledem na definiční obor proměnné $\psi$ dle (68) se zavádí veličina

$$t = \mathrm{tg}\psi \qquad t\in(-\infty,\ \infty) \tag{77}$$

Diferencováním nalézáme

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2\psi}\mathrm{d}\psi \tag{78}$$

Pro **hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné** $t$ platí

$$\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(\psi)\,\mathrm{d}\psi \tag{79}$$

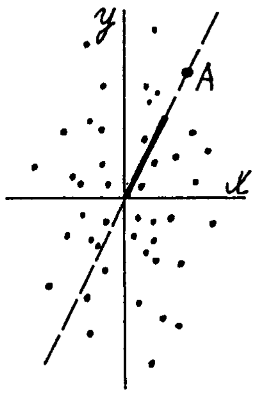
(Obě strany rovnice vyjadřují totéž - poměrnou četnost vláken v elementárním intervalu směrů.) Užitím vztahů (74a) a (78) v (79) nalezneme

$$\varphi(t)\frac{1}{\cos^2\psi}\mathrm{d}\psi = \frac{1}{\pi}\frac{C}{\cos^2\psi\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\psi\right)}\mathrm{d}\psi$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\frac{C}{\left(1+C^2t^2\right)} \tag{80}$$

Uvažujme nyní dvě **nezávislé, náhodné proměnné** $x$ a $y$, které mají Gaussovo normální rozložení se středními hodnotami $\overline{x}=0, \overline{y}=0$ a směrodatnými odchylkami $\sigma_x, \sigma_y$. Podle matematické statistiky pak náhodná proměnná $t$ vytvořená předpisem $t = x/y$ má zobecněné **Cauchyho rozložení** s hustotou pravděpodobnosti

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)}{1+\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)^2 t^2} \tag{81}$$



obr. 13

Rozložení náhodné proměnné $t$ ve výrazech (80) a (81) je totožné, platí-li

$$C = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tag{82}$$

Tangenty směrových úhlů vláken mají tedy Cauchyho rozložení. To nabízí **alternativní modelovou představu** o vzniku směrového uspořádání. Uvažujme "terč" na obr. 13. "Průstřely" mají souřadnice $x, y$ a splňují požadavky uvedené před rovnicí (81). Kdybychom vlákna kladli do spojnic "průstřelů" s počátkem, nalezli bychom odvozené směrové rozložení. (Znázorněné vlákno má směr spojnice počátku souřadnic s "průstřelem" A.)

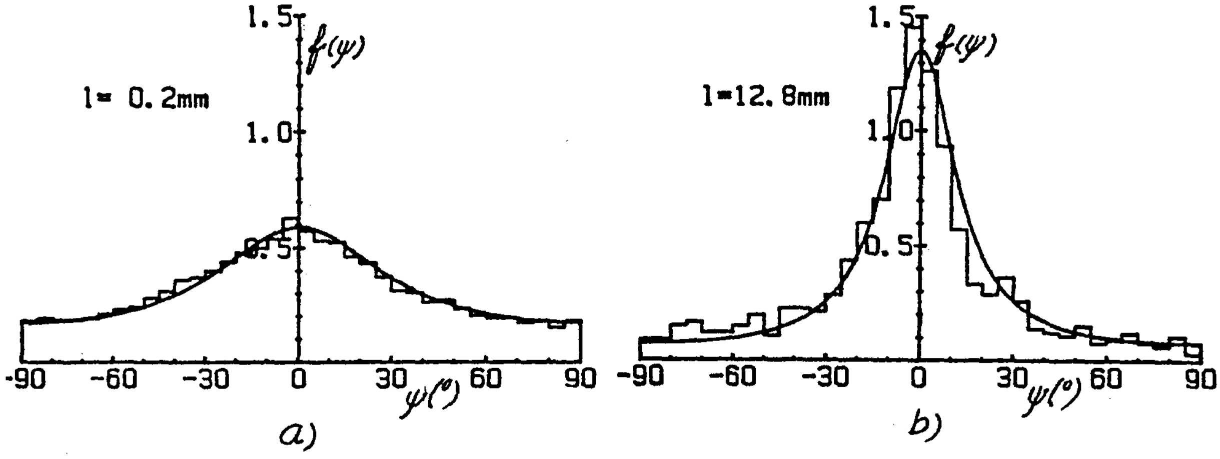
**Hustota pravděpodobnosti rozložení neorientovaných úhlů.** Protože $f(\psi)$ dle (74) je funkce sudá, je výhodné charakterizovat rozložení prostřednictvím absolutních hodnot úhlu $\psi$. Zavedeme $\vartheta \equiv |\psi|$ a dle (68) $\vartheta \in (0, \pi/2)$. **Hustota pravděpodobnosti** $u(\vartheta)$ této náhodné proměnné je v analogii k (74) a (74a)

$$u(\vartheta) = \frac{2}{\pi}\frac{C}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\vartheta} = \frac{2}{\pi}\frac{C}{\cos^2\vartheta\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)} \tag{83}$$

(Platí $u(\vartheta) = u(|\psi|) = f(\psi) + f(-\psi)$. Vzhledem k symetrii $f(\psi) = f(-\psi)$ je $u(\vartheta) = 2f(\psi)$.)

**Příklad.** Na válcovém mykacím stroji byla vyrobená pavučinka z bílých viskózových vláken s malou příměsí vláken černě obarvených. Potom byla pavučinka zprůhledněna ponořením do imersní kapaliny (metylsalicilátu) a vyhodnocovalo se směrové rozložení úseků černě obarvených vláken.

Na obr. 14 jsou experimentální výsledky zakresleny histogramy a funkce $f(\psi)$ dle (74) jsou zobrazeny hladkou křivkou.




obr. 14

Pro velmi krátké délky vlákenných úseků ($l$ = 0,2 mm) je výsledek znázorněn na obr. 14a); bylo použito $C$ = 1,85. Rovnici (74) jsme použili jako empirickou i pro velké délky. (Model byl odvozen jen pro velmi krátké úseky.) Pro délku $l$ = 12,8 mm je výsledek ze stejné pavučinky znázorněn na obr. 14b); bylo použito $C$ = 4,28. Příklad ilustruje poměrně dobrou shodu experimentálních výsledků s teorií.

Je zajímavé, že s rostoucí délkou $l$ vyhodnocovaných vlákenných úseků roste hodnota parametru $C$. To znamená, že preference podélného uspořádání vláken v pavučině je větší u delších úseků. Na krátkých úsecích se zřejmě projevuje zobloučkování, které dominantní charakter podélného uspořádání potlačuje. V tomto příkladě bylo nalezeno přibližné empirické přiřazení

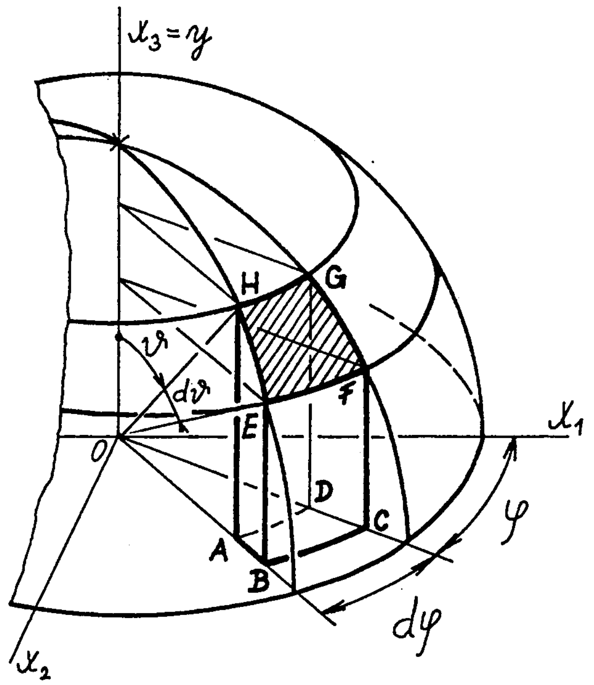
$$C = 0{,}235\, l_{[\mathrm{mm}]}^{0{,}924} + 1{,}8 \tag{84}$$

## 4.3 Model orientace vláken v prostoru

**Zobecnění modelové představy.** Směry vláken v prostoru je nejvhodnější popisovat sférickými souřadnicemi $\{\vartheta, \varphi\}$ - viz kap. 4.1. Vyjdeme z analogických úvah jako v rovinné variantě. Předpokládáme tedy, že na výchozí ryze náhodnou orientaci vláken v prostoru se aplikuje průtah, který způsobí preferenci směru osy $y \equiv x_3$ (značení dle obr. 11).

Sférické souřadnice $\{\vartheta, \varphi\}$ definují na povrchu **jednotkové koule** preferenční křivky, které připomínají "rovnoběžky" ($\vartheta = \text{konstanta}$) a "poledníky" ($\varphi = \text{konstanta}$). **Elementární plošku** EFGH na obr. 15 vymezuje "rovnoběžka" HG (určena úhlem $\vartheta$), "rovnoběžka" EF (určena úhlem $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$), "poledník" GF (určen úhlem $\varphi$) a "poledník" HE (určen úhlem $\varphi + \mathrm{d}\varphi$). Do půdorysu se ploška EFGH promítá jako oblast ABCD.

Z geometrických poměrů na obr. 15 vyplývá




obr. 15

$$\left.\begin{aligned} &OE = OF = OG = OH = 1, \\ &OA = OD = OH \cdot \sin\vartheta = \sin\vartheta, \\ &HG = AD = OA \cdot d\varphi = \sin\vartheta\, d\varphi, \\ &HE = OH \cdot d\vartheta = d\vartheta, \\ &\text{elementární plocha} \quad EFGH = \\ &\quad = HG \cdot HE = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (85)$$

**Ryze náhodná orientace** vlákenných úseků v prostoru znamená, že poměrná četnost vektorů **i**, směřujících do nějaké plochy na povrchu jednotkové koule, je **úměrná velikosti této plochy**. (Nezávisí na jejím tvaru a poloze). Označme souřadnice výchozího stavu $\vartheta_0$, $\varphi_0$ a výchozí hustotu pravděpodobnosti směrového rozložení $w_0(\vartheta_0,\varphi_0)$. $w_0(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{d}\vartheta_0\,\mathrm{d}\varphi_0$ pak vyjadřuje **poměrnou četnost** směrů, které se vyskytují v rozmezí úhlů $(\vartheta_0, \vartheta_0+\mathrm{d}\vartheta_0)$ a $(\varphi_0, \varphi_0+\mathrm{d}\varphi_0)$. Poměrná četnost je úměrná ploše, a proto lze užitím (85) **v analogii** k (73) psát

$$w_0(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{d}\vartheta_0\,\mathrm{d}\varphi_0 = k\sin\vartheta_0\,\mathrm{d}\vartheta_0\,\mathrm{d}\varphi_0$$

$$w_0(\vartheta_0,\varphi_0) = k\sin\vartheta_0 \qquad (86)$$

kde $k$ je **konstantou úměrnosti.** Integrál z hustoty pravděpodobnosti přes definiční obor náhodné proměnné je roven jedné. S přihlédnutím k (62) platí

$$1 = \iint_{\omega} w_0(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{d}\vartheta_0\,\mathrm{d}\varphi_0 = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\pi} w_0(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{d}\varphi_0\right]\mathrm{d}\vartheta_0 =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\pi} k\sin\vartheta_0\, d\varphi_0\right]\mathrm{d}\vartheta_0 = k\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta_0\left[\int_0^{2\pi} d\varphi_0\right]\mathrm{d}\vartheta_0 = 2\pi k\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta_0\,\mathrm{d}\vartheta_0 = 2\pi k$$

$$k = 1/(2\pi) \qquad (87)$$

Z (86) a (87) pak plyne

$$w_0(\vartheta_0,\varphi_0) = \frac{\sin\vartheta_0}{2\pi} \qquad (88)$$

**Preference jednoho směru** vychází z představy průtahu ve směru osy $y \equiv x_3$ (analogie kap. 4.2). *Předpokládáme*, že **úsek vlákna zůstává při průtahu v původní rovině**, dané výchozím vektorem $\mathbf{i}_0$ a osou $y$ (rovina na obr. 11). Souřadnice $\varphi_0$ se pak nezmění, úhel $\vartheta_0$ však přejde na úhel $\vartheta$. *Předpokládáme*, že platí **analogické vztahy** k (70) a (71).

$$\varphi = \varphi_0 \qquad \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\varphi_0 \qquad (89)$$

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{\mathrm{tg}\vartheta_0}{C} \qquad (90)$$

$$\mathrm{d}\vartheta_0 = \mathrm{d}\vartheta \frac{C}{\cos^2\vartheta\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)} = \mathrm{d}\vartheta \frac{C}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\vartheta} \tag{91}$$

kde $C$ je průtah ve směru osy $y$. Z rovnice (90) platí též

$$\sin\vartheta_0 = \frac{\mathrm{tg}\vartheta_0}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\vartheta_0}} = \frac{\mathrm{C\,tg}\vartheta}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2\mathrm{tg}^2\vartheta}} \tag{92}$$

**Hustota pravděpodobnosti směrového rozložení vláken.** Mezi výchozí hustotou pravděpodobnosti $w_0\left(\vartheta_0,\varphi_0\right)$ a konečnou hustotou pravděpodobnosti $w\left(\vartheta,\varphi\right)$ platí analogicky k (73) rovnost

$$w_0\left(\vartheta_0,\varphi_0\right)\mathrm{d}\vartheta_0\,\mathrm{d}\varphi_0 = w\left(\vartheta,\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \tag{93}$$

**Konečná hustota pravděpodobnosti** směrového rozložení vznikne užitím (88) až (92) v (93).

$$\left(\frac{\sin\vartheta_0}{2\pi}\right)\left(\frac{C}{\cos^2\vartheta\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)}\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = w\left(\vartheta,\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

$$w\left(\vartheta,\varphi\right) = \frac{\sin\vartheta_0}{2\pi}\frac{C}{\cos^2\vartheta\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{C\,tg}\vartheta}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2\mathrm{tg}^2\vartheta}}\frac{C}{\cos^2\vartheta\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)}$$

$$w\left(\vartheta,\varphi\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{C}^2\mathrm{tg}^2\vartheta}{\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)^{3/2}}\frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta} = \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{C}^2\mathrm{tg}^2\vartheta}{\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)^{3/2}\sin 2\vartheta} \tag{94}$$

**Hustota pravděpodobnosti marginálního rozložení** náhodné proměnné $\vartheta$ je označena $u\left(\vartheta\right)$. (Při uspořádání vláken v rovině odpovídá $u\left(\vartheta\right)$ rozložení neorientovaných úhlů - viz např. (83).) Protože $\varphi \in \left(0,\,2\pi\right)$, můžeme psát

$$u\left(\vartheta\right) = \int_0^{2\pi} w\left(\vartheta,\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{C}^2\mathrm{tg}^2\vartheta}{\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)^{3/2}\sin 2\vartheta}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{2\mathrm{C}^2\mathrm{tg}^2\vartheta}{\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)^{3/2}\sin 2\vartheta} \tag{95}$$

**Distribuční funkce marginálního rozložení** $U\left(\vartheta\right)$ proměnné $\vartheta$ pak je

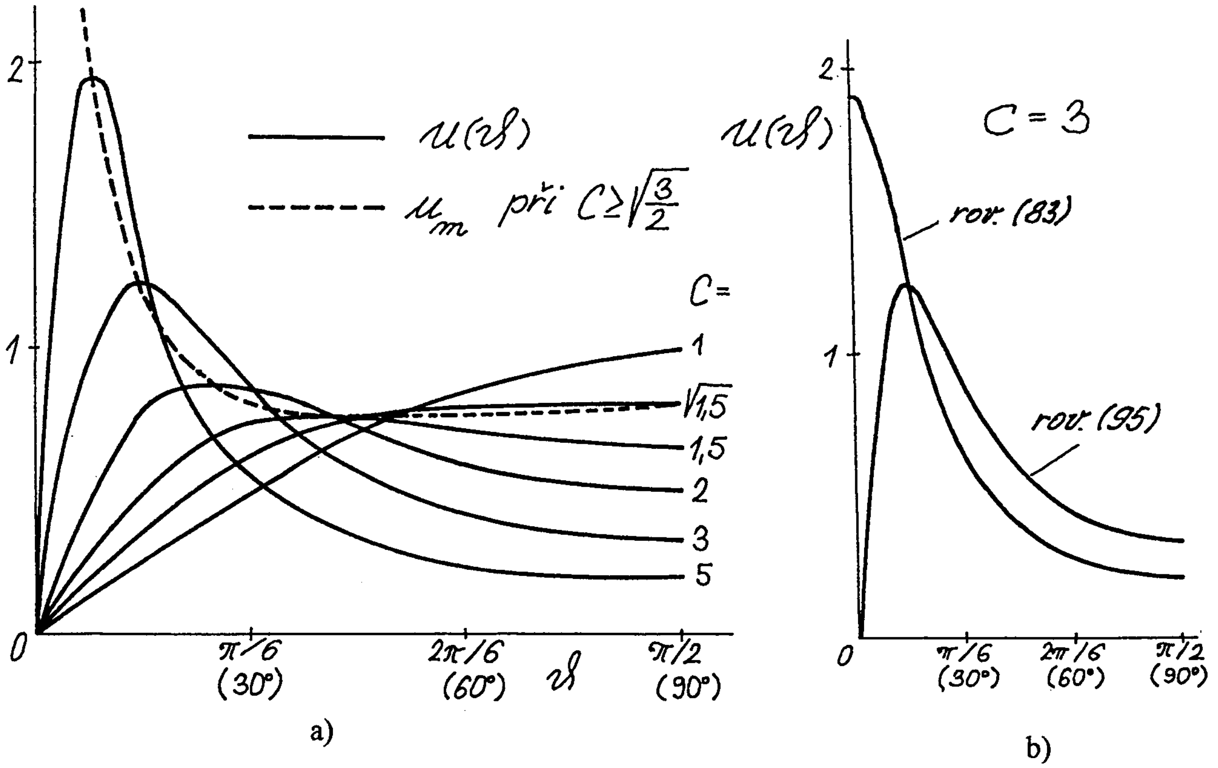
$$U\left(\vartheta\right) = \int_0^{\vartheta} u\left(\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\vartheta}\frac{2\mathrm{C}^2\mathrm{tg}^2\vartheta}{\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)^{3/2}\sin 2\vartheta}\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\vartheta}\frac{C\,\mathrm{tg}\vartheta}{\sqrt{1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta}}\frac{C\,\mathrm{d}\vartheta}{\cos^2\vartheta\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)} =$$

dle (90): $\vartheta_0 = \mathrm{arctg}\left(C\,\mathrm{tg}\vartheta\right)$,

dle (92): $\sin\vartheta_0 = \dfrac{\mathrm{tg}\vartheta_0}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\vartheta_0}} = \dfrac{\mathrm{C\,tg}\vartheta}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2\mathrm{tg}^2\vartheta}}$

dle (91): $\mathrm{d}\vartheta_0 = \mathrm{d}\vartheta\dfrac{C}{\cos^2\vartheta\left(1+C^2\mathrm{tg}^2\vartheta\right)}$

$$= \int_0^{\mathrm{arctg}\left(C\,\mathrm{tg}\vartheta\right)}\sin\vartheta_0\,\mathrm{d}\vartheta_0 = 1-\cos\left[\mathrm{arctg}\left(C\,\mathrm{tg}\vartheta\right)\right] \tag{96}$$




obr. 16

**Grafický průběh funkce** $u(\vartheta)$ dle rovnice (95) je pro různé hodnoty $C$ znázorněn na obr. 16a). $u(\vartheta)$ má při $C \leq \sqrt{3/2} \cong 1{,}225$ maximum v bodě $\vartheta = \vartheta_{\mathrm{m}} = \pi/2$. Pro $C > \sqrt{3/2}$ určíme maximum $\vartheta_{\mathrm{m}}$ z podmínky $(du/d\vartheta)_{\vartheta=\vartheta_{\mathrm{m}}} = 0$. Označíme $u_{\mathrm{m}} = u(\vartheta_{\mathrm{m}})$ a z (95) pak nalezneme

$$\left.\begin{array}{lll} \vartheta_{\mathrm{m}} = \dfrac{\pi}{2} & u_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{C} & \text{... je - li } C \leq \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ \vartheta_{\mathrm{m}} = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{(2C^2 - 1)}} & u_{\mathrm{m}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \dfrac{C^2}{\sqrt{C^2 - 1}} & \text{... je - li } C > \sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right\} \tag{97}$$

**Obecnější rozložení** směrů vláken bývají **nesymetrická**. Hustota pravděpodobnosti směrového rozložení však mívá někdy součinový tvar

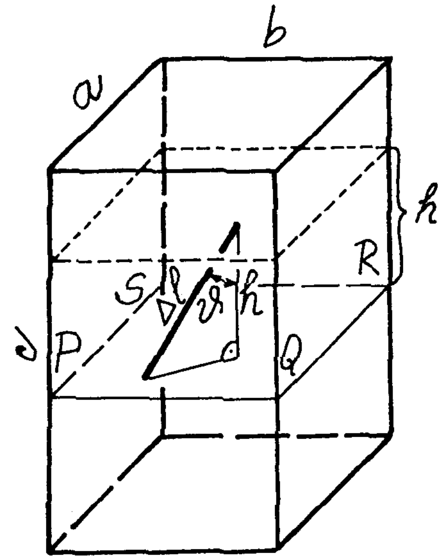
$$w(\vartheta, \varphi) = v(\varphi)\, u(\vartheta) \qquad \text{kde } \varphi \in \langle 0, 2\pi), \vartheta \in \langle 0, \pi/2) \tag{98}$$

kde $u(\vartheta)$ a $v(\varphi)$ jsou vhodná **marginální rozložení** proměnných $\vartheta$ a $\varphi$. Rozložení $u(\vartheta)$ někdy vyhovuje rovnice (95), jindy je vhodná rovnice (83) (např. pro pramen ze shrnuté pavučinky). Marginální rozložení $v(\varphi)$ může být konstantní, nebo i proměnné. Speciálním případem vztahu (98) je i rozložení (94); pro $u(\vartheta)$ platí rovnice (95) a $v(\varphi) = 1/(2\pi)$ =konstanta.

## 4.4 Orientace vláken v řezu

Při analýze vlákenných útvarů se neobejdeme bez představy **řezu**, a to jak v teoretické, tak v experimentální práci. Řezem se rozumí **průnik vlákenného útvaru rovinou**. Teorie obvykle uvažuje **myšlený řez**, v experimentech se pracuje s **mikroskopickými řezy**.

**Modelová představa** uvažuje vlákenný útvar (nebo jeho část) ve tvaru hranolu s objemem *abc*, protnutý rovinou PQRS - obr. 17. Reálná vlákna uvažujeme myšleně rozdělená na krátké úsečkové části délky $\Delta l$ (náhradní modelová představa v kap. 4.2). V hranolu je celkem $j$ takových úseků. Každý úsek svírá s **normálou** (kolmicí) řezné roviny úhel $\vartheta \in (0, \pi)$ Znázorněný úsek vlákna na obr. 17 se právě dotýká řezné roviny. Vzdálenost jeho horního konce od ní je



obr. 17

$$h = \Delta l \cos\vartheta \tag{99}$$

**Podíl protnutých úseků.** Řezná rovina protne vlákenný úsek jen když jeho horní konec leží ve vzdálenosti 0 až $h$ nad řeznou rovinou. Horní konec každého protnutého úseku tedy leží v prostoru s objemem *abh*. *Předpokládejme*, že **horní konce vlákenných úseků jsou rovnoměrně rozptýleny** v celém hranolu. Pak podíl úseků s horními konci ve vzdálenosti od 0 do $h$, t.j. **podíl** $p(\vartheta)$ **protnutých úseků**, je dán poměrem objemů *abh* a *abc*.

$$p(\vartheta) = \frac{abh}{abc} = \frac{h}{c} = \frac{\Delta l \cos\vartheta}{c} \tag{100}$$

**Počet protnutých úseků.** Hustota pravděpodobnosti rozložení úhlů $\vartheta$ je $u(\vartheta)$. (Je-li osa $x_3 = y$ z předchozích kapitol normálou řezné roviny, pak v rovinném modelu je $u(\vartheta)$ dáno rovnicí (83), v prostorovém modelu je $u(\vartheta)$ popsáno rovnicí (95).) **Poměrná četnost** vlákenných úseků v **elementárním intervalu** směrů $(\vartheta, \vartheta + \mathrm{d}\vartheta)$ je $u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$ a jejich **počet** je $j\,u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$. Avšak jen podíl $p(\vartheta)$ z nich je protnutý. Počet vláken, která leží v elementárním intervalu směrů $(\vartheta, \vartheta + \mathrm{d}\vartheta)$ a jsou protnuta řeznou rovinou je při užití (100) dán vztahem

$$dn = \left[j\,u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right] p(\vartheta) = j\,u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \frac{\Delta l \cos\vartheta}{c} = \cos\vartheta\, u(\vartheta) \frac{j\,\Delta l}{c} \mathrm{d}\vartheta \tag{101}$$

**Celkový počet** všech protnutých vlákenných úseků je dán rovnicí

$$n = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} \mathrm{d}n = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, u(\vartheta) \frac{j\,\Delta l}{c} \mathrm{d}\vartheta = \frac{j\,\Delta l}{c} \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, u(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta \tag{102}$$

**Hustota pravděpodobnosti směrového rozložení protnutých úseků vláken** je značena $u^*(\vartheta)$. Poměrná četnost vlákenných úseků v elementárním intervalu směrů je $u^*(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$, nebo z definice poměrné četnosti též $\mathrm{d}n/n$. Užitím (101) a (102) nalezneme

$$u^*(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = \frac{\mathrm{d}n}{n} = \frac{\cos\vartheta\, u(\vartheta) \frac{j\Delta l}{c} \mathrm{d}\vartheta}{\frac{j\Delta l}{c} \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, u(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta}$$

Po úpravě konečně nalezneme **hustotu pravděpodobnosti**

$$u^*(\vartheta)=\frac{\cos\vartheta\, u(\vartheta)}{\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\, u(\vartheta)d\vartheta}\qquad \vartheta\in(0,\pi/2) \tag{103}$$

Rozložení směrů těch vlákenných úseků, které jsou protnuty řeznou rovinou je tedy **jiné**, než rozložení směrů všech vlákenných úseků v celém vlákenném útvaru.

**Příklad.** Platí-li pro $u(\vartheta)$ rovnice (83) (rovinný model), pak z (83) a (103) lze vyjádřit

$$u(\vartheta)=\frac{2}{\pi}\frac{C}{C^2-(C^2-1)\cos^2\vartheta}=\frac{2}{\pi}\frac{C}{C^2-(C^2-1)(1-\sin^2\vartheta)}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{C}{(C^2-1)\sin^2\vartheta+1}\qquad \vartheta\in(0,\pi/2)\quad C>1$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\, u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta=\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\frac{C\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{(C^2-1)\sin^2\vartheta+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{C^2-1}}\frac{C}{(C^2-1)\frac{x^2}{C^2-1}+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{C^2-1}}=$$

$$\sin\vartheta=\frac{x}{\sqrt{C^2-1}}\qquad \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{C^2-1}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{C}{\sqrt{C^2-1}}\int_0^{\sqrt{C^2-1}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{2}{\pi}\frac{C}{\sqrt{C^2-1}}\left[\mathrm{arctg}x\right]_0^{\sqrt{C^2-1}}=\frac{2C\,\mathrm{arctg}\sqrt{C^2-1}}{\pi\sqrt{C^2-1}} \tag{104a}$$

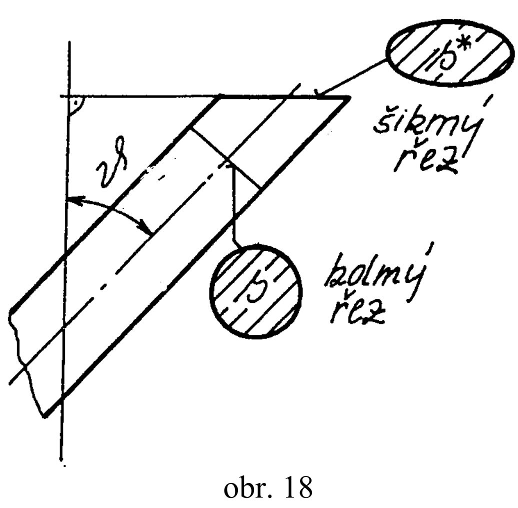
$$u^*(\vartheta)=\frac{\cos\vartheta\,\frac{2}{\pi}\frac{C}{C^2-(C^2-1)\cos^2\vartheta}}{\frac{2C\,\mathrm{arctg}\sqrt{C^2-1}}{\pi\sqrt{C^2-1}}}=\frac{\sqrt{C^2-1}}{\mathrm{arctg}\sqrt{C^2-1}}\frac{\cos\vartheta}{C^2-(C^2-1)\cos^2\vartheta} \tag{104}$$

(Tuto hustotu pravděpodobnosti lze očekávat např. v příčném řezu pramenem, který vznikl shrnutím pavučinky)

## 4.5 Střední velikost řezné plochy vlákna a součinitel $k_n$

**Velikost řezné plochy.** Na obr. 18 je obecný, t.j. šikmý řez nějakým vláknem. Jeho osa svírá s normálou řezné roviny úhel $\vartheta$. Plocha $s$ **řezu kolmého** k ose vlákna je určena rovnicí (1). Z obr. 18 plyne pro plochu $s^*$ **šikmého řezu** vlákna vztah

$$s^*=\frac{s}{\cos\vartheta} \tag{105}$$



obr. 18

*Předpokládejme*, že v útvaru jsou **vlákna stejného druhu a jemnosti**. Podle (1) mají stejnou plochu $s$. Mají však různé úhly sklonu $\vartheta$ a různé plochy šikmých řezů $s^*$. Pro **střední hodnotu plochy šikmého řezu** platí $\overline{s^*} = \int_0^{\pi/2} s^* u^*(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$, kde $u^*(\vartheta)$ je hustota pravděpodobnosti směrového rozložení protnutých úseků vláken. Užitím vztahů (103) a (105) se nalezne

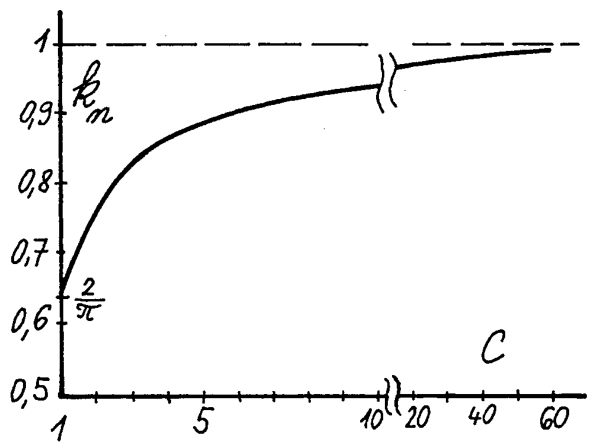
$$\overline{s^*} = \int_0^{\pi/2} s^* u^*(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi/2} \frac{s}{\cos\vartheta} \frac{\cos\vartheta\, u(\vartheta)}{\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta} d\vartheta = \frac{s\int_0^{\pi/2} u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta}{\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta} =$$

$$= \frac{s}{\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta} \qquad \vartheta \in (0, \pi/2) \qquad (106)$$

kde $u(\vartheta)$ je hustota pravděpodobnosti směrového rozložení všech úseků vláken v celém vlákenném útvaru.

**Součinitel $k_n$** je při použití (106) definován jako poměr ploch $s$ a $s^*$.

$$k_n = \frac{s}{\overline{s^*}} = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \qquad (107)$$




obr. 19

**Příklad.** V rovinném modelu je $u(\vartheta)$ dáno rovnicí (83) a ze (107) a (104a)

$$k_n = \frac{s}{\overline{s^*}} = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = \qquad (108)$$

$$= \frac{2C \operatorname{arctg}\sqrt{C^2 - 1}}{\pi\sqrt{C^2 - 1}}$$

Závislost ilustruje obr. 19. Pro velké hodnoty $C$ (velký "průtah") se $k_n \to 1$; pro malá $C$ je však $k_n \ll 1$ ($\lim_{C\to 1} k_n = 2/\pi$).

## 4.6 Řezy útvarem s rovinným uspořádáním vláken

**Zobecnění funkce $f(\psi)$.** V rovinném uspořádání vláken (kap. 4.2) jsme definovali úhel $\psi$ v intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Je-li $n$ celé číslo, pak úhly $\psi + n\pi$ při $n \neq 0$ v definovaném intervalu neleží. Avšak pro všechna $n$ vyjadřuje $\psi + n\pi$ fakticky **jediný směr**. Je proto rozumné rozšířit platnost funkce hustoty pravděpodobnosti $f(\psi)$ pro všechna $\psi$ předpisem

$$f(\pi/2) = \lim_{\psi\to\pi/2} f(\psi), \qquad f(\psi) = f(\psi + n\pi), \qquad n\text{...celé číslo}, \quad \psi \in (-\infty, \infty) \qquad (109)$$

Zobecněná funkce $f(\psi)$ je **periodická** s periodou $\pi$. V rozmezí úhlů $\psi \in (a, a+\pi\rangle$ ($a$ je libovolné reálné číslo) je **hustotou pravděpodobnosti** směrové rozložení vlákenných úseků. Platí tedy $\int_a^{a+\pi} f(\psi)\,\mathrm{d}\psi = 1$. (Libovolné $a$ můžeme totiž vyjádřit vztahem

$$a = n\pi + \delta - \pi/2, \quad n\ldots\text{celé číslo}, \quad \delta \in (0,\pi)$$

a pak vypočítat integrál

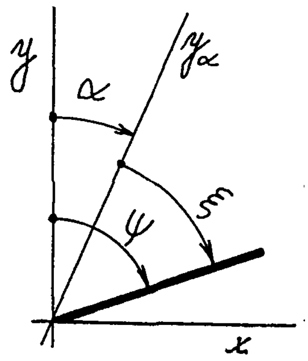
$$\int_a^{a+\pi} f(\psi)\,\mathrm{d}\psi = \int_{n\pi+\delta-\pi/2}^{n\pi+\delta+\pi/2} f(\psi)\,\mathrm{d}\psi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t+n\pi+\delta)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t+\delta)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2-\delta} f(t+\delta)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2} f(t+\delta)\,\mathrm{d}t =$$

$$\psi = t + n\pi + \delta \qquad x = t+\delta \qquad x = t+\delta-\pi$$

$$\mathrm{d}\psi = \mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\pi/2+\delta}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\delta} f(x+\pi)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2+\delta}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\psi)\,\mathrm{d}\psi = 1 \qquad )$$

**Směrové rozložení vzhledem k obecné ose.** Na obr. 20 je (shodně s obr. 12b) souřadný systém $\{x,y\}$ s jedním úsekem vlákna; vlákno svírá s osou $y$ orientovaný úhel $\psi$. **Obecná osa** $y_\alpha$ svírá s osou $y$ orientovaný úhel $\alpha$. Úsek vlákna svírá s osou $y_\alpha$ orientovaný úhel $\xi$. Zvolme určité $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ a hodnoťme rozložení směrů vlákenných úseků **vzhledem k obecné ose** $y_\alpha$, t.j. prostřednictvím úhlů $\xi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Pro **hustotu pravděpodobnosti** rozložení úhlů $\xi$ vlákenných úseků platí



obr. 20

$$\left.\begin{array}{l} \psi = \alpha + \xi \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \xi \in (-\pi/2, \pi/2) \\ f(\psi) = f(\alpha+\xi) \end{array}\right\} \qquad (110)$$

($\xi$ je proměnná, $\alpha$ je parametr.)

Směr vlákna můžeme popisovat též **neorientovaným úhlem** $\vartheta$

$$\vartheta = |\xi| \qquad \vartheta \in (0, \pi/2) \qquad (111)$$

**Hustota pravděpodobnosti** rozložení úhlů $\vartheta$ je logicky dána výrazem

$$u(\vartheta) = f(\alpha+\vartheta) + f(\alpha-\vartheta) \qquad (112)$$

**Součinitel $k_n$** pro **řez kolmý k ose** $y_\alpha$ můžeme vyjádřit z rovnic (107) a (112).

$$k_n = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \left[f(\alpha+\vartheta) + f(\alpha-\vartheta)\right]\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, f(\alpha+\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta + \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, f(\alpha-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta =$$

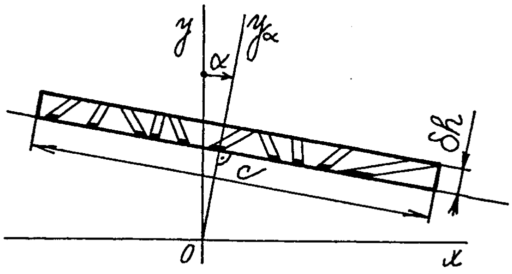
$$x = -\vartheta, \quad \cos x = \cos\vartheta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, f(\alpha+\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta - \int_0^{-\pi/2} \cos x\, f(\alpha+x)\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}x = -\mathrm{d}\vartheta$$

Při přeznačení integračních proměnných v obou určitých integrálech symbolem $\xi$ pak

$$k_n = \int_0^{\pi/2} \cos\xi\, f(\alpha+\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{-\pi/2}^{0} \cos\xi\, f(\alpha+\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\xi\, f(\alpha+\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad (113)$$

**Počet vláken v řezu.** Na obr. 21 je znázorněn **řez kolmo k ose** $y_\alpha$ společně se štěrbinou o délce $c$ a velmi malé šířce $\delta h$. Ve štěrbině je $N$ krátkých úseků vláken s různým sklonem. Silně vytažené řezy vláken mají plošky $s_i^*$, $i = 1,2,\dots,N$. Objem obecného vlákenného úseku je $s_i^* \cdot \delta h$ (objem šikmého válce) a jeho hmotnost je $s_i^* \cdot \delta h \cdot \rho$. Hmotnost všech vlákenných úseků ve štěrbině je




obr. 21

$$\delta m = \sum_{i=1}^{N} s_i^* \,\delta h \,\rho = \delta h\, \rho \sum_{i=1}^{N} s_i^* \tag{114}$$

**Plošná hmotnost vlákenného útvaru** je

$$\gamma = \frac{\delta m}{c\,\delta h} = \frac{\delta h\, \rho \sum_{i=1}^{N} s_i^*}{c\,\delta h} = \frac{\rho}{c}\sum_{i=1}^{N} s_i^* = \frac{N}{c}\rho\,\frac{\sum_{i=1}^{N} s_i^*}{N} = n_\alpha \rho\,\overline{s^*} \tag{115a}$$

Veličina $\overline{s^*}$ je **střední hodnota řezné plochy vláken**, zavedená v kap. 4.5. Veličina $n_\alpha = N/c$ vyjadřuje **počet řezů vláken připadající na jednotku délky**. Při užití (113) a (1) platí vztah

$$n_\alpha = \frac{\gamma}{\rho\overline{s^*}} = \frac{\gamma}{\rho\overline{s}}\,\frac{\overline{s}}{\overline{s^*}} = \frac{\gamma}{t}k_n = \frac{\gamma}{t}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\xi\, f(\alpha+\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{115}$$

Je-li známa funkce $f(\alpha+\xi)$, lze ze vztahu (115) vypočítat $n_\alpha$ jako funkci parametru $\alpha$.

**Příklad.** Nechť $f(\psi) = f(\alpha+\xi)$ dle (74) a $C > 1$ (rovinný model). Užitím (74), (110), (115) pak nalezneme vztah

$$n_\alpha = \frac{\gamma}{t}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\xi\, \frac{1}{\pi}\,\frac{C}{C^2 - (C^2-1)\cos^2(\alpha+\xi)}\mathrm{d}\xi \qquad C > 1 \tag{116}$$

Pro neurčitý integrál předchozí rovnice platí

$$\int \frac{1}{\pi}\frac{C\cos\xi\,\mathrm{d}\xi}{C^2-(C^2-1)\cos^2(\alpha+\xi)} = \frac{C}{\pi}\int\frac{\cos(\psi-\alpha)\,\mathrm{d}\psi}{C^2-(C^2-1)\cos^2\psi} = \frac{C}{\pi}\int\frac{\cos\psi\cos\alpha+\sin\psi\sin\alpha}{C^2-(C^2-1)\cos^2\psi}\mathrm{d}\psi =$$

$$\xi = \psi-\alpha,\quad \mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\psi, \qquad\qquad C^2-(C^2-1)\cos^2\psi = (C^2-1)\sin^2\psi+1,$$

$$= \frac{C\cos\alpha}{\pi}\int\frac{\cos\psi\,\mathrm{d}\psi}{(C^2-1)\sin^2\psi+1} - \frac{C\sin\alpha}{\pi}\int\frac{-\sin\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2-(C^2-1)\cos^2\psi} =$$

$$x = \sqrt{C^2-1}\sin\psi, \qquad\qquad y = \frac{\sqrt{C^2-1}}{C}\cos\psi,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{C^2-1}} = \cos\psi\,\mathrm{d}\psi, \qquad\qquad \frac{C\,\mathrm{d}y}{\sqrt{C^2-1}} = -\sin\psi\,\mathrm{d}\psi,$$

$$= \frac{C\cos\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{C\sin\alpha\cdot C}{\pi\sqrt{C^2-1}}\int\frac{\mathrm{d}y}{C^2-C^2y^2} = \frac{C\cos\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{\sin\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\int\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} =$$

$$= \frac{C\cos\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\,\mathrm{arctg}x - \frac{\sin\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\,\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| =$$

$$= \frac{C\cos\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{C^2-1}\sin\psi\right] - \frac{\sin\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{C^2-1}}{C}\cos\psi}{1-\frac{\sqrt{C^2-1}}{C}\cos\psi}\right| =$$

$$= \frac{C\cos\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{C^2-1}\sin(\alpha+\xi)\right] - \frac{\sin\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\frac{1}{2}\ln\frac{C+\sqrt{C^2-1}\cos(\alpha+\xi)}{C-\sqrt{C^2-1}\cos(\alpha+\xi)}$$

Užitím posledního výrazu ve (116) nalezneme konečný výraz

$$n_\alpha = \frac{\gamma}{t}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\xi\,\frac{1}{\pi}\frac{C}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2(\alpha+\xi)}\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{\gamma}{t}\left\{\frac{C\cos\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{C^2-1}\sin(\alpha+\xi)\right]\right\}_{-\pi/2}^{\pi/2} -$$

$$- \frac{\gamma}{t}\left\{\frac{\sin\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\frac{1}{2}\ln\frac{C+\sqrt{C^2-1}\cos(\alpha+\xi)}{C-\sqrt{C^2-1}\cos(\alpha+\xi)}\right\}_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\gamma}{t}\frac{C\cos\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\left\{\operatorname{arctg}\left[\sqrt{C^2-1}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right] - \operatorname{arctg}\left[\sqrt{C^2-1}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} -$$

$$- \frac{\gamma}{t}\frac{\sin\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\cdot\frac{1}{2}\left\{\ln\frac{C+\sqrt{C^2-1}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{C-\sqrt{C^2-1}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} - \ln\frac{C+\sqrt{C^2-1}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{C-\sqrt{C^2-1}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{\gamma}{t}\frac{C\cos\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\left\{\operatorname{arctg}\left[\sqrt{C^2-1}\cos\alpha\right] - \operatorname{arctg}\left[-\sqrt{C^2-1}\cos\alpha\right]\right\} -$$

$$- \frac{\gamma}{t}\frac{\sin\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\cdot\frac{1}{2}\left\{\ln\frac{C-\sqrt{C^2-1}\sin\alpha}{C+\sqrt{C^2-1}\sin\alpha} - \ln\frac{C+\sqrt{C^2-1}\sin\alpha}{C-\sqrt{C^2-1}\sin\alpha}\right\} =$$

$$= \frac{\gamma}{t}\frac{C\cos\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\,2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{C^2-1}\cos\alpha\right) - \frac{\gamma}{t}\frac{\sin\alpha}{\pi\sqrt{C^2-1}}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{C-\sqrt{C^2-1}\sin\alpha}{C+\sqrt{C^2-1}\sin\alpha}\right)^2 =$$

$$= \frac{\gamma}{t}\frac{1}{\pi\sqrt{C^2-1}}\left[\cos\alpha\;2C\operatorname{arctg}\left(\sqrt{C^2-1}\cos\alpha\right) + \sin\alpha\;\ln\left(\frac{C+\sqrt{C^2-1}\sin\alpha}{C-\sqrt{C^2-1}\sin\alpha}\right)\right] \tag{117}$$

**Průsečíková metoda zjišťování orientace.** Z rovnice (115) najdeme integrací (při užití vztahu $\int_a^{a+\pi} f(\psi)\mathrm{d}\psi = 1$, odvozeného před rovnicí (110))

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_\alpha \mathrm{d}\alpha = \frac{\gamma}{t}\iint_{\substack{\alpha\in(-\pi/2,\,\pi/2)\\ \xi\in(-\pi/2,\,\pi/2)}}\cos\xi\, f(\alpha+\xi)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\xi = \frac{\gamma}{t}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\alpha+\xi)\mathrm{d}\alpha\right]\cos\xi\,\mathrm{d}\xi =$$

$$\psi = \alpha+\xi,\; d\psi = d\alpha$$

$$= \frac{\gamma}{t}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_{-\pi/2+\xi}^{\pi/2+\xi} f(\psi)\mathrm{d}\psi\right]\cos\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{\gamma}{t}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\cdot\cos\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{2\gamma}{t} \tag{118}$$

Použitím vztahu (118) ve (115) vznikne rovnice

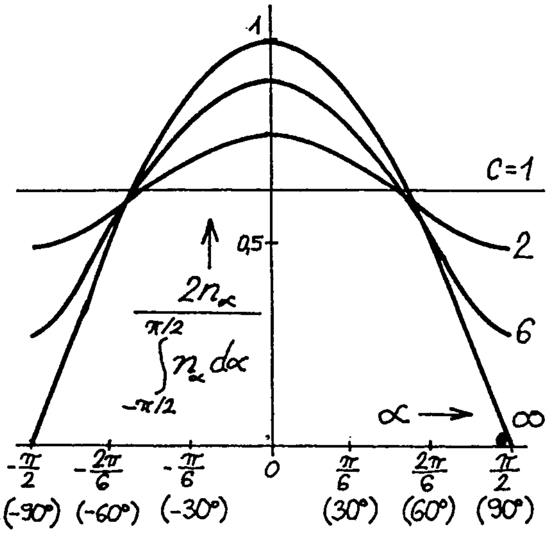
$$n_\alpha = \frac{\gamma}{t}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\xi\ f(\alpha+\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_\alpha d\alpha \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\xi\ f(\alpha+\xi)\,d\xi \tag{119a}$$

$$\frac{2n_\alpha}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_\alpha d\alpha} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\xi\ f(\alpha+\xi)\,d\xi \tag{119}$$

Pokud platí pro $n_\alpha$ speciální výraz (117), pak ze (119a) při použití (118) plyne

$$n_\alpha = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_\alpha d\alpha \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{C^2-1}}\left[\cos\alpha\ 2C\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{C^2-1}\ \cos\alpha\right) + \sin\alpha\ \ln\left(\frac{C+\sqrt{C^2-1}\ \sin\alpha}{C-\sqrt{C^2-1}\ \sin\alpha}\right)\right]$$

$$\frac{2n_\alpha}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_\alpha d\alpha} = \frac{1}{\pi\sqrt{C^2-1}}\left[\cos\alpha\ 2C\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{C^2-1}\ \cos\alpha\right) + \sin\alpha\ \ln\left(\frac{C+\sqrt{C^2-1}\ \sin\alpha}{C-\sqrt{C^2-1}\ \sin\alpha}\right)\right] \tag{120}$$




obr. 22

Vliv parametru $C$ na průběh funkce (120) je znázorněn na obr. 22.

Preferovaný směr (např. u pavučinky podélný směr jejího postupu mykacím strojem) se při experimentálním měření obvykle nepodaří určit přesně. Místo úhlu α pak měříme úhel $\alpha^*$, pro který platí

$$\alpha^* = \alpha + \delta, \quad \alpha = \alpha^* - \delta, \quad d\alpha = d\alpha^* \tag{121}$$

Úhel δ vyjadřuje **systematickou experimentální chybu**.

Počet průsečíků $n_\alpha$ lze chápat jako **periodickou funkci** s periodou π. Užijeme-li vztah (121) jako integrální substituci, najdeme

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_\alpha\, d\alpha = \int_{-\pi/2+\delta}^{\pi/2+\delta} n_{\alpha^*}\, d\alpha^* = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_{\alpha^*}\, d\alpha^* \tag{122}$$

kde $n_{\alpha^*}$ označuje počet průsečíků $n_\alpha$ na úhlu $\alpha = \alpha^* - \delta$; $n_{\alpha^*}$ je funkcí měřeného úhlu $\alpha^*$. Při experimentálním měření se obvykle stanovuje počet průsečíků $N^*$ na úsečkách, které leží pod různými úhly $\alpha^*$ a mají **obecnou délku** $c \neq 1$. Pak $N^* = n_{\alpha^*}\cdot c$ a ze (122) nalezneme výraz

$$\frac{2n_\alpha}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_\alpha\, d\alpha} = \frac{2n_{\alpha^*}}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_{\alpha^*} d\alpha^*} = \frac{2cn_{\alpha^*}}{c\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_{\alpha^*} d\alpha^*} = \frac{2cn_{\alpha^*}}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cn_{\alpha^*} d\alpha^*} = \frac{2N^*}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N^* d\alpha^*} \tag{123}$$

Užitím (121) a (123) v obecném vztahu (119) nalezneme rovnici

$$\frac{2N^*}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N^* d\alpha^*} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\xi\ f(\alpha^* - \delta + \xi)\,d\xi \tag{124}$$

Levá strana rovnice (124) může být určena **experimentálně**. ($N^*$je obvykle měřeno jen na určitých úhlech $\alpha^*$ a integrál ve jmenovateli se počítá z experimentálních dat numericky.) Pak je nutno nalézt takovou funkci *f*, aby požadovaná rovnice byla splněna.

Experimentální metody tohoto typu jsou **metody průsečíkové**. Jejich nevýhodou je, že malé změny funkce na levé straně rovnice (124) (v toleranci experimentu) vedou k velkým rozdílům v určení funkce *f*. Proto je výhodné známe-li dopředu **typ směrového rozložení** vláken.

**Příklad** konkrétních výrazů vychází z rovnice (120), t.j. z modelu rovinného uspořádání. Analogicky k (124) nalezneme vztah

$$\frac{2N^*}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N^* \mathrm{d}\alpha^*} = \frac{1}{\pi\sqrt{C^2-1}}\Big\{\cos\big(\alpha^*-\delta\big)\, 2C \operatorname{arctg}\Big[\sqrt{C^2-1}\,\cos\big(\alpha^*-\delta\big)\Big] + $$

$$+\sin\big(\alpha^*-\delta\big)\ln\left[\frac{C+\sqrt{C^2-1}\,\sin\big(\alpha^*-\delta\big)}{C-\sqrt{C^2-1}\,\sin\big(\alpha^*-\delta\big)}\right] \qquad (125)$$

Úkolem pak není nalézt celou funkci *f*, ale jen hodnoty parametrů $C$ a $\delta$. (Obvykle nelineární regresí s numerickou optimalizací.) Dva příklady výsledků jsou uvedeny v tabulce.

| Měřený úhel $\alpha^*$ | **Příklad I**<br>*Materiál:* 70% PVA, 1,6 dtex, 40 mm, 30% POP srážívý, 1,3 dtex, 38 mm<br>*Pavučina*: válc. myk. stroj, 10,2 g/m$^2$<br>*Hlavní směr:* podélný | | | **Příklad II**<br>*Materiál:* 100% VS, 3,9 dtex, 60 mm<br>*Rouno:* pneumaticky tvořené, 314 g/m$^2$ (analyzováno po vrstvách)<br>*Hlavní směr:* příčný | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Experiment | | Výpočet rov. (125) | Experiment | | Výpočet rov. (125) |
| | $N^*$ (střední hodnota) | $\frac{2N^*}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N^*\mathrm{d}\alpha^*}$ | $\frac{2N^*}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N^*\mathrm{d}\alpha^*}$ | $N^*$ (střední hodnota) | $\frac{2N^*}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N^*\mathrm{d}\alpha^*}$ | $\frac{2N^*}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N^*\mathrm{d}\alpha^*}$ |
| -π/2 (-90°) | 14,14 | 0,5401 | 0,5357 | 16,33 | 0,6238 | 0,6186 |
| -2π/6(-60°) | 15,07 | 0,5756 | 0,5755 | 16,29 | 0,6222 | 0,6224 |
| -π/6 (-30°) | 17,50 | 0,6684 | 0,6735 | 16,61 | 0,6345 | 0,6404 |
| 0 | 19,20 | 0,7334 | 0,7290 | 17,32 | 0,6616 | 0,6543 |
| π/6 (30°) | 18,37 | 0,7017 | 0,6995 | 16,98 | 0,6486 | 0,6508 |
| 2π/6 (60°) | 15,72 | 0,6005 | 0,6065 | 16,47 | 0,6291 | 0,6331 |
| π/2 (90°) | 14,14 | 0,5401 | 0,5357 | 16,33 | 0,6238 | 0,6186 |
| Integrál | $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N^*\mathrm{d}\alpha^* = 52{,}36$ | | | $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N^*\mathrm{d}\alpha^* = 52{,}36$ | | |
| Parametry | $C = 1{,}598$ $\quad \delta = 0{,}0848$ rad $(4{,}86°)$ | | | $C = 1{,}093$ $\quad \delta = 0{,}1644$ rad $(9{,}42°)$ | | |

(Experimentální hodnoty $N^*$ změřil A. PTÁČEK [3]).

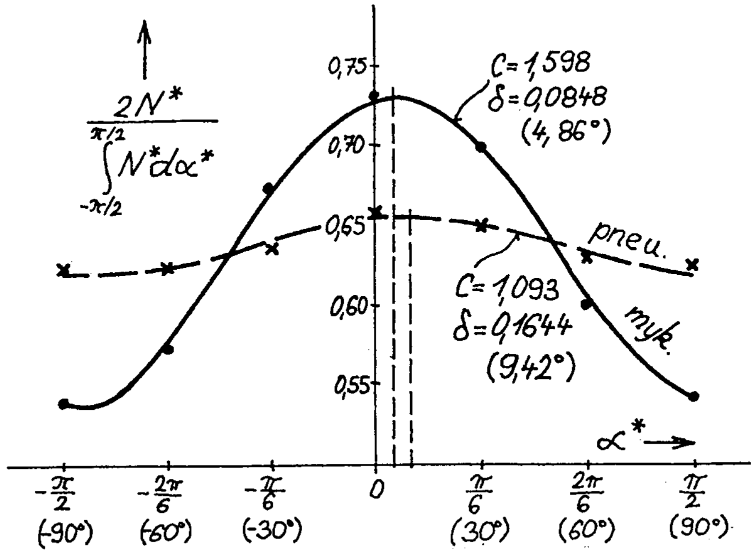
Pro mykanou pavučinku se v **příkladu I** regresně nalezlo $C = 1{,}598$, $\delta = 4{,}86^\circ$. Hodnota $\delta = 4{,}86^\circ$ je dobře vysvětlitelná systematickou chybou měření. Hodnota $C = 1{,}598$ je nižší než údaj v závěru kap. 4.2 ($C = 1{,}85$); rozdíl však není příliš velký. ($C$ charakterizuje práci mykacího stroje, na kterém A. PTÁČEK [3] použil zařízení pro potlačování podélného uspořádání.) Hustota pravděpodobnosti směrového rozložení (velmi krátkých) vlákenných úseků (74) má tvar

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi}\frac{C}{C^2 - (C^2-1)\cos^2\psi} = \frac{1}{\pi}\frac{1{,}598}{1{,}598^2 - (1{,}598^2-1)\cos^2\psi} = \frac{0{,}50866}{2{,}5536 - 1{,}5536\cos^2\psi}$$

Pro pneumaticky vytvořené rouno v **příkladě II** se získalo $C = 1{,}093$, $\delta = 9{,}42^\circ$. Hodnota $\delta = 9{,}42^\circ$ svědčí spíše o geometrii zařízení pneumatické tvorby rouna. Hodnota $C \to 1$ ukazuje na téměř isotropní uspořádání vláken. Hustota pravděpodobnosti směrového rozložení (velmi krátkých) vlákenných úseků (74) má tvar

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi}\frac{C}{C^2 - (C^2-1)\cos^2\psi} = \frac{1}{\pi}\frac{1{,}093}{1{,}093^2 - (1{,}093^2-1)\cos^2\psi} = \frac{0{,}34791}{1{,}1946 - 0{,}1946\cos^2\psi}$$

Výsledky příkladů I a II dokumentuje vedle tabulky také obr. 23



obr. 23

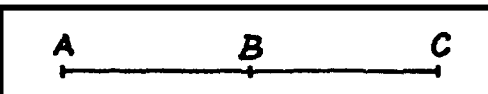
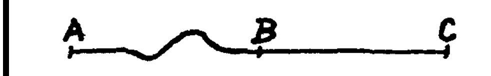
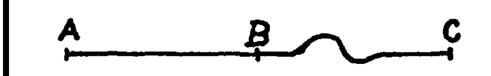
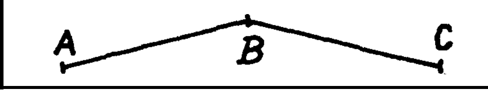
# 5. NAVLNĚNÍ VLÁKEN

## 5.1 Fenomenologický model navlnění

Reálné vlákenné úseky jsou převážně navlněné, což je způsobeno velkým množstvím nejrůznějších vlivů. Navlnění, definované rovnicí (11), je náhodnou veličinou.

**Vkládání délkových kvant.** Popisovaný **fenomenologický model** je založen na představě **vkládání** jakýchsi **délkových "kvant"** do výchozího, zcela rovného vlákna.

Ideu charakterizují schematické obrázky v tabulce.

| | schéma | $\lambda_{AB}$ | $\lambda_{BC}$ | $\lambda_{AC}$ |
|---|---|---|---|---|
| a) |   | 0 | 0 | 0 |
| b) |   | $\frac{\delta}{l}$ | 0 | $\frac{\delta}{2l}$ |
| c) |   | 0 | $\frac{\delta}{l}$ | $\frac{\delta}{2l}$ |
| d) |   | 0 | 0 | $\frac{\delta}{2l}$ |

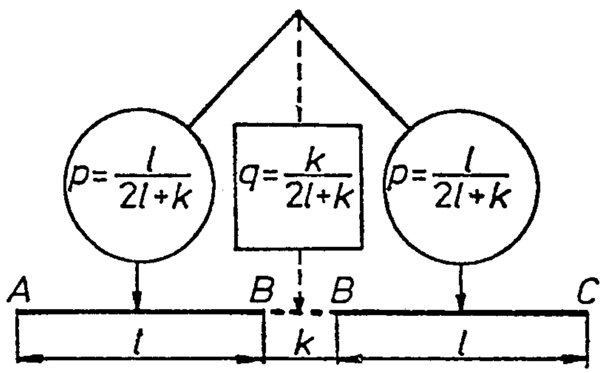
Počáteční **přímkový** úsek vlákna AC, půlený bodem B, je na obrázku a). Veličiny navlnění $\lambda_{AB}, \lambda_{BC}, \lambda_{AC}$ úseků AB, BC, AC jsou všechny nulové.

Do úseku AC nyní přidáme malý kousek vlákna - **délkové kvantum** délky δ. Toto kvantum můžeme uložit do úseku AB - obr. b). Navlnění úseku AB bude $\lambda_{AB} = \delta/l$, navlnění celého úseku AC bude $\lambda_{AC} = \delta/(2l)$ a navlnění úseku BC zůstane $\lambda_{BC} = 0$. Analogická situace nastane, vložíme-li délkové kvantum do úseku BC - obr. c).

Délkové kvantum však může být uloženo také do okolí bodu B, kde způsobí jeho **vychýlení** dle obr. d). Úseky AB a BC se prodlouží z délky $l$ na $l + \delta/2$. Jejich navlnění zůstane nulové, ačkoliv navlnění celého úseku AC bude $\lambda_{AC} = \delta/(2l)$.

*Předpokládejme*, že **uložení délkového kvanta je náhodný jev**. Pravděpodobnost $p$, že se délkové kvantum uloží do úseku AB, bude zřejmě přímo úměrná jeho délce $l$. Stejnou pravděpodobnost $p$ bude mít také uložení do úseku BC.

Pravděpodobnost $q$, že dojde k ohybu podle obr. d), vyjádříme z představy, jako by mezi délkami AB, BC byl vložen ještě nějaký další **pomyslný úsek** délky $k$ - obr. 24. Pak pomyslná délka celého úseku AC je $l + k + l = 2l + k$. Platí $2p + q = 1$, a tedy



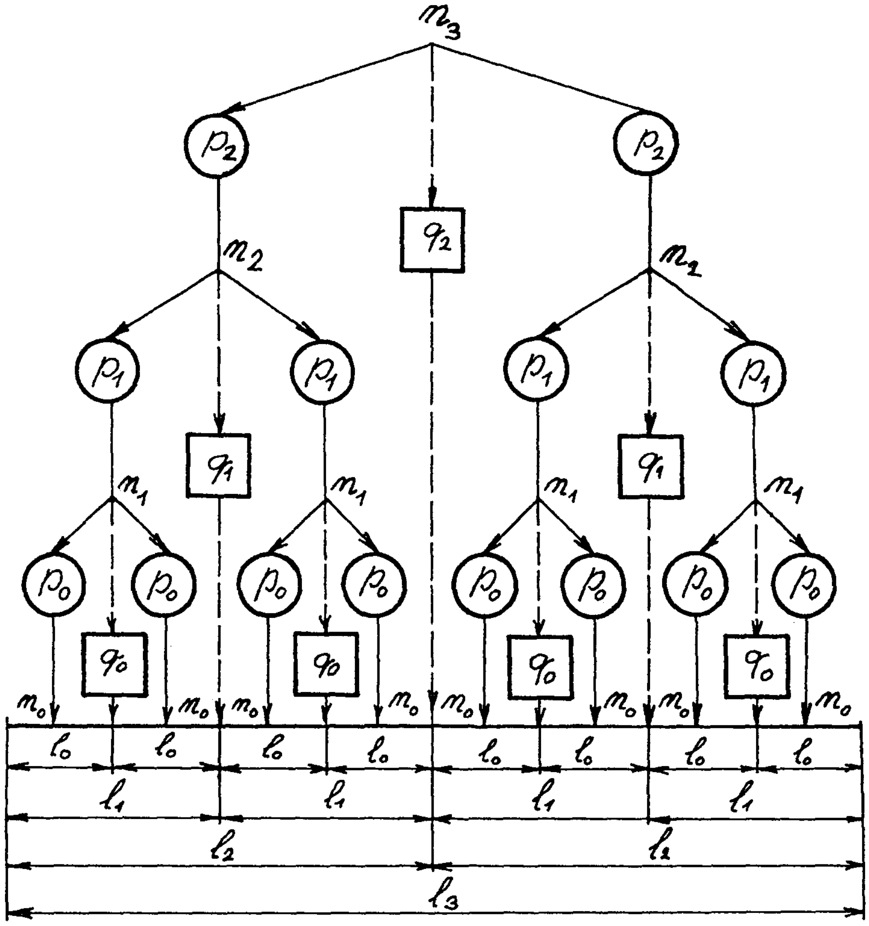

obr. 24

$$p = \frac{l}{2l+k} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{k}{2l}} \qquad (126)$$

$$q = 1 - 2p = \frac{k}{2l+k} = \frac{\frac{k}{2l}}{1+\frac{k}{2l}} \qquad (127)$$

**Zřetězení.** Lze si dobře představit, že např. úsečka AB je znovu rozdělena na dvě poloviny. Kvantum délky, které padne do AB, se analogicky umístí do pravé či levé poloviny, nebo způsobí vychýlení středového bodu úsečky AB.Toto zobecnění směřuje ke **zřetězení základního schématu** z obr. 24. Je ukázáno na obr. 25.

Délka $l_3$ je rozdělena na dvě délky $l_2$ , každá tato délka je rozdělena na dvě délky $l_1$ a každá délka $l_1$ se dělí na dvě délky $l_0$.



obr. 25

Do délky $l_3$ vložíme $n_3$ délkových kvant. Každé kvantum se s pravděpodobností $p_2$ umístí do délky $l_2$ a s pravděpodobností $q_2$ vytvoří ohyb ve středovém bodě. Do délky $l_2$ je takto vloženo $n_2$ délkových kvant. Analogicky se kvanta rozloží až do délek $l_0$.

## Pravděpodobnosti.

Délky v obr. 25 jsou vzájemně provázány rovnicí

$$\left.\begin{array}{l} l_i = l_0\, 2^i \\ \qquad i = 0,1,\ldots \\ (\ l_m = l_0\, 2^m) \end{array}\right\} \quad (128)$$

Také pomyslné délky $k$ patrně závisejí na velikosti uvažovaných úseků. Lze *předpokládat*, že **poměrný přírůstek délky** $k$ **je úměrný poměrnému přírůstku délky** $l$. (To odpovídá intuitivní představě, že "kdykoli zvětšíme $l$ o $A$%, zvětší se $k$ o $B$%".) Předpoklad je popsán rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}k}{k} = s\,\frac{\mathrm{d}l}{l} \qquad s\ldots\text{parametr (obvykle } 0 \le s < 1) \qquad (129a)$$

Prostou integrací nalézáme $\ln k = s \ln l + c$, $k = \mathrm{e}^c l^s$ a označíme-li integrační konstantu $c = \ln r$, můžeme psát

$$k = r\, l^s \qquad r, s \ldots \text{ parametry} \qquad (129b)$$

Mezi délkami $l_i$ je pak pomyslná délka $k_i$.

$$k_i = r\, l_i^s \quad i = 0,1,\ldots \qquad (\ k_m = r\, l_m^s \quad m = 0,1,\ldots\ ) \qquad (129)$$

V analogii k rovnici (126) lze pro pravděpodobnosti v obr. 25 psát

$$p_0 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{k_0}{2l_0}} \quad p_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{k_1}{2l_1}} \quad p_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{k_2}{2l_2}} \qquad \text{obecně} \quad p_i = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{k_i}{2l_i}} \qquad i = 0,1,\ldots \qquad (130)$$

S ohledem na (129) a (128) platí

$$k_i = r\,l_i^s = r\left(l_0 2^i\right)^s = r\,l_0^s\,2^{is} \qquad (131)$$

Pak ovšem

$$p_i = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{r\,l_0^s\,2^{is}}{2\,l_0 2^i}} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{r}{l_0^{1-s}\,2^{i+1-is}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{r}{l_0^{1-s}\,2^{(i+1)(1-s)+s}}} \qquad (132)$$

Pravděpodobnost, že délkové kvantum, vložené do délky $l_3$ , se posléze umístí ve zvolené délce $l_0$ je (dle pravidla o násobení nezávislých pravděpodobností) dána vztahem

$$P_3 = p_2 \cdot p_1 \cdot p_0 = \prod_{i=0}^{2} p_i = \prod_{i=0}^{2} \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{r}{l_0^{1-s}\,2^{(i+1)(1-s)+s}}} \qquad (133a)$$

Jestliže zavedeme místo indexu *i* nový index $j = i+1,\ j = 1,2,\ldots$ , potom platí

$$P_3 = \prod_{j=1}^{3} \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{r}{l_0^{1-s}\,2^{j(1-s)+s}}} = \prod_{j=1}^{3} \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{r}{l_0^{1-s}\,2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j} \qquad (133)$$

Schéma na obr. 25 lze dále zobecňovat. Předpokládejme, že největší délka je $l_m$ , $m \geq 1$. (Na obr. 25 je $m = 3$.) Pravděpodobnost, že se délkové kvantum vložené do délky $l_m$ umístí právě do zvolené délky $l_0$ , je v analogii ke (133) vyjádřena vztahem

$$P_m = \prod_{j=1}^{m} \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{r}{l_0^{1-s}\,2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j} = \frac{1}{2^m}\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{r}{l_0^{1-s}\,2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j} \qquad (134)$$

Označíme-li

$$Q_m = \prod_{j=1}^{m}\left[1+\frac{r}{l_0^{1-s}\,2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] \qquad (135)$$

lze pravděpodobnost $P_m$ vyjádřit formálně jednoduchým vztahem

$$P_m = \frac{1}{2^m Q_m} \qquad (136)$$

**Rozložení délkových kvant.** V jednotlivých úsecích $l_0$ se vyskytuje různý počet délkových kvant $n_0$. Veličina $n_0$ je **náhodná veličina** z intervalu $\langle 0, n_m \rangle$; $n_m$ je počet délkových kvant, vložených do délky $l_m$. *Předpokládáme*, že **umísťování délkových kvant je statisticky nezávislé**. Pak počet kvant $n_0$ má **binomické rozložení**

$$B(n_0) = \binom{n_m}{n_0} P_m^{n_0}\left(1-P_m\right)^{n_m-n_0} \qquad (137)$$

se střední hodnotou

$$\overline{n}_0 = n_m\,P_m \qquad (138)$$

a rozptylem

$$\sigma^2 = n_m P_m (1 - P_m) \tag{139}$$

**Hustota délkových kvant** $\upsilon$ vyjadřuje počet délkových kvant v jednotce (výchozí) délky.

$$\upsilon_i = \frac{n_i}{l_i} \qquad \overline{\upsilon}_i = \frac{\overline{n}_i}{l_i} \qquad i = 0,1,\ldots \tag{140}$$

(Použijeme-li ve výpočtu střední hodnotu $\overline{n}_i$ , vznikne **střední hustota délkových kvant** $\overline{\upsilon}_i$ .)
Vydělením rovnice (138) veličinou $l_0$ a následnou úpravou za užití (136), (128) a (140) se nalezne

$$\overline{\upsilon}_0 = \frac{\overline{n}_0}{l_0} = \frac{n_m P_m}{l_0} = \frac{n_m}{l_0\left(2^m Q_m\right)} = \frac{n_m}{\left(\frac{l_m}{2^m}\right)\left(2^m Q_m\right)} = \frac{n_m}{l_m}\frac{1}{Q_m} = \frac{\upsilon_m}{Q_m} \tag{141}$$

Nechť $m \to \infty$, délka $l_m \to \infty$, počet vložených kvant $n_m \to \infty$ a existuje vlastní limita $\lim\limits_{m\to\infty}(n_m/l_m) = \lim\limits_{m\to\infty}\upsilon_m = \upsilon_\infty$, kde $\upsilon_\infty$ je parametr. (Do nekonečného výchozího úseku vkládáme takový počet kvant, aby jich na jednotku délky připadlo $\upsilon_\infty$.) Dle (141) pak platí rovnice

$$\overline{\upsilon}_0 = \frac{\upsilon_\infty}{Q_\infty} \tag{142}$$

kde podle (135) je

$$Q_\infty = \prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + \frac{r}{l_0^{1-s}2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] \qquad \ln Q_\infty = \sum_{j=1}^{\infty}\ln\left[1 + \frac{r}{l_0^{1-s}2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] \tag{143}$$

## Střední navlnění.

Na délku $l_0$ připadá $l_0\upsilon_\infty$ kvant. Z tohoto množství se průměrně $l_0\overline{\upsilon}_0$ kvant uložilo **dovnitř** každého úseku délky $l_0$ (tabulka - var. b) či c)). Zbývající počet $l_0\upsilon_\infty - l_0\overline{\upsilon}_0$ kvant způsobí **oddálení koncových bodů** úseků (tabulka - var. d). Má-li každé kvantum délku $\delta$, pak **střední vzdálenost koncových bodů** úseků vláken s výchozí délkou $l_0$ je

$$\overline{h} = l_0 + \left(l_0\upsilon_\infty - l_0\overline{\upsilon}_0\right)\delta = l_0\left(1 + \upsilon_\infty\delta - \overline{\upsilon}_0\delta\right) \tag{144}$$

**Střední délka vlákna** je v takovém úseku větší než $l_0$ a je dána rovnicí

$$\overline{l} = \overline{h} + \left(l_0\overline{\upsilon}_0\right)\delta = l_0\left(1 + \upsilon_\infty\delta - \overline{\upsilon}_0\delta\right) + l_0\overline{\upsilon}_0\delta = l_0 + l_0\upsilon_\infty\delta = l_0\left(1 + \upsilon_\infty\delta\right) \tag{145}$$

Navlnění je definováno rovnicí (11) a obr. 3. Protože $l$ i $h$ jsou náhodné, je také navlnění náhodnou veličinou. Určit jeho rozložení a odtud střední hodnotu je však obtížné. Snazší je používat významově blízkou veličinu $\overline{\lambda} = \overline{l}/\overline{h} - 1$, kde $\overline{l}, \overline{h}$ jsou stanoveny rovnicemi (144) a (145). Budeme ji nazývat **střední navlnění.** Platí vztah

$$\overline{\lambda} = \frac{\overline{l}}{\overline{h}} - 1 = \frac{l_0\left(1 + \upsilon_\infty\delta\right)}{l_0\left(1 + \upsilon_\infty\delta - \overline{\upsilon}_0\delta\right)} - 1 = \frac{1 + \upsilon_\infty\delta}{1 + \upsilon_\infty\delta - \overline{\upsilon}_0\delta} - 1 = \frac{\overline{\upsilon}_0\delta}{1 + \upsilon_\infty\delta - \overline{\upsilon}_0\delta} \tag{146}$$

Jestliže $l_0 \to \infty$, pak postupně užitím (143) a (142) vznikne

$$\lim_{l_0\to\infty}\left(\ln Q_\infty\right) = \lim_{l_0\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ln\left[1 + \frac{r}{l_0^{1-s}2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]\right\} = \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{l_0\to\infty}\left\{\ln\left[1 + \frac{r}{l_0^{1-s}2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{l_0\to\infty}\left\{\ln[1+0]\right\} = \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{l_0\to\infty}\{0\} = 0 \qquad 0 \le s < 1$$

$$\lim_{l_0\to\infty} Q_\infty = 1 \tag{147}$$

$$\lim_{l_0\to\infty}\overline{\upsilon}_0=\lim_{l_0\to\infty}\frac{\upsilon_\infty}{Q_\infty}=\frac{\upsilon_\infty}{\lim\limits_{l_0\to\infty}Q_\infty}=\frac{\upsilon_\infty}{1}=\upsilon_\infty \tag{148}$$

Střední navlnění úseků velmi dlouhé výchozí délky $l_0$ má po dosazení (148) do (146) tvar

$$\lim_{l_0\to\infty}\overline{\lambda}=\lim_{l_0\to\infty}\frac{\overline{\upsilon}_0\delta}{1+\upsilon_\infty\delta-\overline{\upsilon}_0\delta}=\frac{\upsilon_\infty\delta}{1+\upsilon_\infty\delta-\upsilon_\infty\delta}=\upsilon_\infty\delta=\lambda_\infty \tag{149}$$

Zavedený symbol $\lambda_\infty$ je **navlněním nekonečně dlouhých úseků**. Střední navlnění nalezneme použitím (149) a (142) v definičním výrazu (146).

$$\overline{\lambda}=\frac{\overline{\upsilon}_0\delta}{1+\upsilon_\infty\delta-\overline{\upsilon}_0\delta}=\frac{\frac{\upsilon_\infty}{Q_\infty}\delta}{1+\upsilon_\infty\delta-\frac{\upsilon_\infty}{Q_\infty}\delta}=\frac{\frac{\lambda_\infty}{Q_\infty}}{1+\lambda_\infty-\frac{\lambda_\infty}{Q_\infty}}=\frac{\lambda_\infty}{Q_\infty\left(1+\lambda_\infty\right)-\lambda_\infty} \tag{150}$$

Protože veličina $Q_\infty$ klesá s délkou vlákenného úseku, **střední navlnění s délkou roste.**

**Výpočet $Q_\infty$.** Veličinu $Q_\infty$ lze z výchozího tvaru (143) upravit užitím (145) a (149)

$$Q_\infty=\prod_{j=1}^{\infty}\left[1+\frac{r}{l_0^{1-s}2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]=\prod_{j=1}^{\infty}\left[1+\frac{r}{\left(\frac{\overline{l}}{1+\upsilon_\infty\delta}\right)^{1-s}2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]$$

$$=\prod_{j=1}^{\infty}\left[1+\frac{r\left(1+\upsilon_\infty\delta\right)^{1-s}}{\overline{l}^{\,1-s}2^s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]=\prod_{j=1}^{\infty}\left[1+\frac{r\left(1+\lambda_\infty\right)^{1-s}}{2^s\,\overline{l}^{\,1-s}}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] \tag{151}$$

Zavedeme-li veličinu $a$ ve tvaru

$$a=\frac{r\left(1+\lambda_\infty\right)^{1-s}}{2^s\,\overline{l}^{\,1-s}} \tag{152}$$

můžeme vztah (151) zapsat ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}Q_\infty&=\prod_{j=1}^{\infty}\left[1+\frac{r\left(1+\lambda_\infty\right)^{1-s}}{2^s\,\overline{l}^{\,1-s}}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]=\prod_{j=1}^{\infty}\left[1+a\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]\\ \ln Q_\infty&=\sum_{j=1}^{\infty}\ln\left[1+a\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]=\sum_{j=1}^{u}\ln\left[1+a\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]+\sum_{j=u+1}^{\infty}\ln\left[1+a\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]\quad u\geq 0\end{aligned}\right\} \tag{153}$$

kde $u$ je celé, nezáporné číslo, které rozděluje sumaci ve vztahu (185) na dvě části $L_1$ a $L_2$.

$$\left.\begin{aligned}L_1&=\sum_{j=1}^{u}\ln\left[1+a\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]\\ L_2&=\sum_{j=u+1}^{\infty}\ln\left[1+a\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]\end{aligned}\right\}\qquad \ln Q_\infty=L_1+L_2\qquad u\geq 0 \tag{154}$$

(Pro $u\geq 1$ je význam členů $L_1$ a $L_2$ evidentní. Pro $u=0$ rozšíříme běžnou operaci sčítání členů nekonečné posloupnosti $\left\{f_j\right\}$, $j=1,2,\ldots$, zavedením *konvence* $\sum_{j=1}^{0}f_j=0$. Praktický význam a určení $u$ popíšeme později.) Pro člen $L_2$ zavedeme nový index $q=j-u$, takže platí

$$L_2 = \sum_{j=u+1}^{\infty} \ln\left[1 + a\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] = \sum_{q=1}^{\infty} \ln\left[1 + a\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^{q+u}\right] = \sum_{q=1}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{a}{2^{(1-s)u}}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^q\right] \tag{155}$$

Hodnotu $u$ zvolme tak velkou, aby pro všechna $q = 1, 2, \ldots$ platilo $\left(a/2^{(1-s)u}\right)\cdot\left(1/2^{1-s}\right)^q < 1$. Protože uvažujeme $0 \le s < 1$, stačí, když platí vztah

$$\frac{a}{2^{(1-s)u}}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^1 = \frac{a}{2^{(1-s)(u+1)}} < 1 \tag{156}$$

Po splnění této podmínky lze na výraz $L_2$ ve tvaru (155) pohlížet jako na případ řady funkcí typu $\ln(1+x)$, $0 < x < 1$. Každou takovou funkci je možno rozvinout Maclaurinovou řadou do tvaru

$$\left.\begin{aligned} &\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i}\right] + R_{n+1} \\ &R_{n+1} = (-1)^n \frac{n!}{(1+\vartheta x)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\vartheta x)^{n+1}} \\ &n \ge 1 \quad \vartheta \in (0,1) \end{aligned}\right\} \tag{157a}$$

kde $R_{n+1}$ je **zbytek** rozvoje v Lagrangeově tvaru. (Skutečnou hodnotu zbytku neznáme. Víme jen, že určitě existuje nějaké $\vartheta \in (0,1)$ pro které je $R_{n+1}$ právě zbytkem rozvoje.) Zvolíme-li speciálně $n = 1$, pak ze (157a) platí

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{1}\left[(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i}\right] + R_{1+1} = x - \frac{x^2}{2(1+\vartheta x)^2} \qquad \vartheta \in (0,1) \tag{157}$$

$L_2$ ve tvaru (155) můžeme nyní chápat jako řadu funkcí typu $\ln(1+x)$, $0 < x < 1$. Při splnění podmínky (156) je tedy možné rozepsat řadu (155) užitím vztahu (157).

$$\begin{aligned} L_2 &= \sum_{q=1}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{a}{2^{(1-s)u}}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^q\right] = \sum_{q=1}^{\infty}\left\{\frac{a}{2^{(1-s)u}}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^q - \frac{\left[\frac{a}{2^{(1-s)u}}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^q\right]^2}{2\left[1 + \vartheta_q\cdot\frac{a}{2^{(1-s)u}}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^q\right]^2}\right\} = \\ &= \frac{a}{2^{(1-s)u}}\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^q - \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^{2q}}{\left[1 + \vartheta_q\cdot\frac{a}{2^{(1-s)u}}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^q\right]^2} \qquad \vartheta_q \in (0,1) \end{aligned} \tag{158}$$

kde $\vartheta_q$, $q = 1, 2, \ldots$, jsou (neznámé) hodnoty parametrů $\vartheta$ ve zbytcích rozvojů. Při označení

$$\left.\begin{aligned} &A_{\mathrm{I}} = \frac{a}{2^{(1-s)u}}\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^q \\ &A_{\mathrm{II}} = \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^{2q}}{\left[1 + \vartheta_q\cdot\frac{a}{2^{(1-s)u}}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^q\right]^2} \qquad \vartheta_q \in (0,1) \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

lze vyjádřit $L_2$ formálně jednoduchým tvarem

$$L_2 = A_{\mathrm{I}} - A_{\mathrm{II}} \tag{160}$$

Pro součet členů geometrické posloupnosti $\left\{t^{i+1}\right\}_{i=1}^{\infty}$ , $t \in (0,1)$, platí $\sum_{q=1}^{\infty} t^q = t/(1-t)$. Proto můžeme $A_{\mathrm{I}}$ z výrazu (159) zapsat ve formě

$$A_{\mathrm{I}} = \frac{a}{2^{(1-s)u}} \sum_{q=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{1-s}} \right)^q = \frac{a}{2^{(1-s)u}} \frac{\dfrac{1}{2^{1-s}}}{\left(1 - \dfrac{1}{2^{1-s}}\right)} = \frac{a}{2^{(1-s)u}} \frac{1}{\left(2^{1-s} - 1\right)} \tag{161}$$

Ve vztahu (159) je člen $A_{\mathrm{II}} > 0$. Je určen řadou zlomků, z nichž každý má jmenovatel větší než 1. Nejmenší možná hodnota jmenovatele, a tedy největší hodnota každého zlomku nastane v případě, kdy se $\vartheta_q \to 0$. Platí relace (použit součet členů geometrické posloupnosti)

$$0 < A_{\mathrm{II}} = \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\left( \dfrac{1}{2^{1-s}} \right)^{2q}}{\left[ 1 + \vartheta_q \cdot \dfrac{a}{2^{(1-s)u}} \left( \dfrac{1}{2^{1-s}} \right)^q \right]^2} < \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}} \sum_{q=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{1-s}} \right)^{2q} =$$

$$= \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}} \sum_{q=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{2(1-s)}} \right)^q = \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}} \frac{\dfrac{1}{2^{2(1-s)}}}{\left[1 - \dfrac{1}{2^{2(1-s)}}\right]} = \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}} \frac{1}{\left[2^{2(1-s)} - 1\right]}$$

$$0 < A_{\mathrm{II}} < \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}} \frac{1}{\left[2^{2(1-s)} - 1\right]} \tag{162}$$

Použitím (161) a (162) ve (160) lze pro $L_2$ psát

$$\frac{a}{2^{(1-s)u}} \frac{1}{\left(2^{1-s} - 1\right)} - \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}} \frac{1}{\left[2^{2(1-s)} - 1\right]} < L_2 < \frac{a}{2^{(1-s)u}} \frac{1}{\left(2^{1-s} - 1\right)} \tag{163}$$

a ze vztahu (154) užitím (163) pak nalezneme

$$\ln Q_\infty = L_1 + L_2 = \sum_{j=1}^{u} \ln \left[ 1 + a \left( \frac{1}{2^{1-s}} \right)^j \right] + L_2$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{u} \ln \left[ 1 + a \left( \frac{1}{2^{1-s}} \right)^j \right] + \frac{a}{2^{(1-s)u}} \frac{1}{\left(2^{1-s} - 1\right)} - \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}} \frac{1}{\left[2^{2(1-s)} - 1\right]} < \\
&\qquad < \ln Q_\infty < \sum_{j=1}^{u} \ln \left[ 1 + a \left( \frac{1}{2^{1-s}} \right)^j \right] + \frac{a}{2^{(1-s)u}} \frac{1}{\left(2^{1-s} - 1\right)} \\
&\left\{ \prod_{j=1}^{u} \left[ 1 + a \left( \frac{1}{2^{1-s}} \right)^j \right] \right\} \exp\left[ \frac{a}{2^{(1-s)u}} \frac{1}{\left(2^{1-s} - 1\right)} \right] \exp\left[ - \frac{a^2}{2^{2(1-s)u+1}} \frac{1}{\left[2^{2(1-s)} - 1\right]} \right] < \\
&\qquad < Q_\infty < \left\{ \prod_{j=1}^{u} \left[ 1 + a \left( \frac{1}{2^{1-s}} \right)^j \right] \right\} \exp\left[ \frac{a}{2^{(1-s)u}} \frac{1}{\left(2^{1-s} - 1\right)} \right]
\end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Při označení

$$
\left.\begin{aligned}
Q_{\infty\max} &= \left\{\prod_{j=1}^{u}\left[1+a\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^{j}\right]\right\}\exp\left[\frac{a}{2^{(1-s)u}}\frac{1}{\left(2^{1-s}-1\right)}\right] \\
Q_{\infty\min} &= \left\{\prod_{j=1}^{u}\left[1+a\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^{j}\right]\right\}\exp\left[\frac{a}{2^{(1-s)u}}\frac{1}{\left(2^{1-s}-1\right)}\right]\exp\left[-\frac{a^{2}}{2^{2(1-s)u+1}}\frac{1}{\left[2^{2(1-s)}-1\right]}\right] \\
&= Q_{\infty\max}\exp\left[-\frac{a^{2}}{2^{2(1-s)u+1}}\frac{1}{\left[2^{2(1-s)}-1\right]}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (165)
$$

také

$$
Q_{\infty\min} < Q_{\infty} < Q_{\infty\max} \qquad (166)
$$

Použijeme-li pro odhad veličiny $Q_{\infty}$ hodnotu $Q_{\infty\max}$, pak se dopouštíme **poměrné chyby** $\Delta_Q$ (vyjadřované %). Užitím (165) lze pro ni psát vztah

$$
\Delta_Q = 100\,\frac{Q_{\infty\max}-Q_{\infty}}{Q_{\infty}} \le 100\,\frac{Q_{\infty\max}-Q_{\infty\min}}{Q_{\infty\min}} = 100\left[\frac{Q_{\infty\max}}{Q_{\infty\min}}-1\right] =
$$

$$
= 100\left[\exp\left\{-\frac{a^{2}}{2^{2(1-s)u+1}}\frac{1}{\left[2^{2(1-s)}-1\right]}\right\}-1\right] \qquad (167)
$$

Chceme mít jistotu, že **skutečná poměrná chyba** $\Delta_Q$ je menší, než zvolená **maximální přípustná poměrná chyba** $\Delta_Q^*$. Proto musíme volit $u$ tak, aby s ohledem na (167) platilo

$$
\Delta_Q < 100\left[\exp\left\{-\frac{a^{2}}{2^{2(1-s)u+1}}\frac{1}{\left[2^{2(1-s)}-1\right]}\right\}-1\right] \le \Delta_Q^* \qquad (168)
$$

Z druhé nerovnosti nalezneme

$$
\ln\left(\frac{\Delta_Q^*}{100}+1\right) \ge \frac{a^{2}}{2^{2(1-s)u+1}}\frac{1}{\left[2^{2(1-s)}-1\right]} \qquad 2\left[2^{2(1-s)}-1\right]\ln\left(\frac{\Delta_Q^*}{100}+1\right) \ge \frac{a^{2}}{2^{2(1-s)u}}
$$

$$
\sqrt{2\left[2^{2(1-s)}-1\right]\ln\left(\frac{\Delta_Q^*}{100}+1\right)} \ge \frac{a}{2^{(1-s)u}} \qquad 2^{(1-s)u} \ge \frac{a}{\sqrt{2\left[2^{2(1-s)}-1\right]\ln\left(\frac{\Delta_Q^*}{100}+1\right)}}
$$

$$
u \ge \frac{\ln a - \frac{1}{2}\ln\left\{2\left[2^{2(1-s)}-1\right]\ln\left(\frac{\Delta_Q^*}{100}+1\right)\right\}}{(1-s)\ln 2} \qquad (169a)
$$

nebo vyjádřením $a$ z rovnice (152)

$$
u \ge \frac{\ln\frac{r\left(1+\lambda_{\infty}\right)^{1-s}}{2^{s}\,\bar{l}^{\,1-s}} - \frac{1}{2}\ln\left\{2\left[2^{2(1-s)}-1\right]\ln\left(\frac{\Delta_Q^*}{100}+1\right)\right\}}{(1-s)\ln 2} \qquad (169)
$$

Nerovnost (169) umožňuje zvolit nejmenší vhodnou hodnotu $u$.

Má však být dodržena také podmínka platnosti vztahu (156). Z něj plyne požadavek

$$\frac{a}{2^{(1-s)(u+1)}} < 1 \qquad \ln a < (1-s)(u+1)\ln 2 \qquad u > \frac{\ln a}{(1-s)\ln 2} - 1 \tag{156a}$$

V mezním případě se shodují pravé strany nerovností (169a) a (156a). Pak zvolená hodnota maximální přípustné poměrné chyby $\Delta_Q^*$ právě vyhovuje vztahu

$$\frac{\ln a}{(1-s)\ln 2} - 1 = \frac{\ln a}{(1-s)\ln 2} - \frac{\frac{1}{2}\ln\left\{2\left[2^{2(1-s)} - 1\right]\ln\left(\frac{\Delta_Q^*}{100} + 1\right)\right\}}{(1-s)\ln 2}$$

$$1 = \frac{\frac{1}{2}\ln\left\{2\left[2^{2(1-s)} - 1\right]\ln\left(\frac{\Delta_Q^*}{100} + 1\right)\right\}}{(1-s)\ln 2} \qquad 2^{1-s} = \sqrt{2\left[2^{2(1-s)} - 1\right]\ln\left(\frac{\Delta_Q^*}{100} + 1\right)}$$

$$\ln\left(\frac{\Delta_Q^*}{100} + 1\right) = \frac{2^{2(1-s)}}{2\left[2^{2(1-s)} - 1\right]} = \frac{1}{2\left[1 - 1/2^{2(1-s)}\right]}$$

$$\Delta_Q^* = 100\left\{\exp\left(\frac{1}{2\left[1 - 1/2^{2(1-s)}\right]}\right) - 1\right\} \tag{170}$$

Pro uvažované hodnoty parametru $s \in \langle 0, 1)$ se z rovnice (170) vypočte

$$\Delta_Q^* \geq 100\left\{\exp\left(\frac{1}{2\left[1 - 1/2^{2(1-0)}\right]}\right) - 1\right\} = 100\left\{\exp\left(\frac{2}{3}\right) - 1\right\} \qquad \Delta_Q^* \geq 94{,}77\ \% \tag{171}$$

Prakticky se maximální přípustná chyba volí vždy menší, než 99,77 %. Pak nerovnost (169) či (169a) vyžaduje věší $u$, než nerovnost (156). Stačí proto volit $u$ jen z podmínky (169). Hodnoty $u$ určené výrazem (197) charakterizuje následující tabulka

| Minimální $u$ dle nerovnosti (169a) při zvoleném $\Delta_Q^* = 0{,}5\%$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = \dfrac{r(1+\lambda_\infty)^{1-s}}{2^s \bar{l}^{1-s}}$ | $s =$ 0 | $s =$ 0,1 | $s =$ 0,2 | $s =$ 0,3 | $s =$ 0,4 | $s =$ 0,5 | $s =$ 0,6 | $s =$ 0,7 | $s =$ 0,8 | $s =$ 0,9 |
| 0,1 | -0,8 | -0,7 | -0,6 | -0,5 | -0,3 | -0,0 | 0,5 | 1,6 | 4,1 | 13,8 |
| 1 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,2 | 5,2 | 6,6 | 8,8 | 12,7 | 20,7 | 47,0 |
| 10 | 5,9 | 6,7 | 7,7 | 9,0 | 10,8 | 13,3 | 17,1 | 23,7 | 37,3 | 80,2 |
| 100 | 9,2 | 10,4 | 11,8 | 13,7 | 16,3 | 19,9 | 25,5 | 34,8 | 54,0 | 113 |
| 1000 | 12,5 | 14,0 | 16,0 | 18,5 | 21,8 | 26,6 | 33,8 | 45,9 | 70,6 | 147 |
| 10000 | 15,8 | 17,7 | 20,1 | 23,2 | 27,4 | 33,2 | 42,1 | 57,0 | 87,2 | 180 |

Vypočtené hodnoty musíme ovšem zaokrouhlit **nahoru** na nejbližší celé nezáporné číslo ($u$ je sčítací index).

Hodnoty $Q_{\infty\max}$ , jimiž nahrazujeme $Q_{\infty}$ , jsou v následující tabulce vypočtené ze (165).

| $a$ | $s$ = 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 1.010050 | 1.011613 | 1.013585 | 1.016142 | 1.019580 | 1.024436 | 1.031793 |
| 0.02 | 1.020201 | 1.023362 | 1.027354 | 1.032544 | 1.039543 | 1.049469 | 1.064597 |
| 0.03 | 1.030455 | 1.035246 | 1.041311 | 1.049211 | 1.059897 | 1.075114 | 1.098444 |
| 0.04 | 1.040811 | 1.047269 | 1.055457 | 1.066147 | 1.080649 | 1.101385 | 1.133367 |
| 0.05 | 1.051271 | 1.059431 | 1.069795 | 1.083356 | 1.101808 | 1.128298 | 1.169400 |
| 0.06 | 1.061837 | 1.071735 | 1.084328 | 1.100843 | 1.123381 | 1.155869 | 1.206579 |
| 0.07 | 1.072508 | 1.084181 | 1.099059 | 1.118612 | 1.145377 | 1.184114 | 1.244939 |
| 0.08 | 1.083287 | 1.096772 | 1.113989 | 1.136668 | 1.167803 | 1.213049 | 1.284520 |
| 0.09 | 1.094174 | 1.109510 | 1.129123 | 1.155016 | 1.190668 | 1.242691 | 1.322412 |
| 0.10 | 1.105171 | 1.122395 | 1.144462 | 1.173660 | 1.213981 | 1.270021 | 1.363762 |
| 0.20 | 1.215688 | 1.253031 | 1.301785 | 1.367856 | 1.456766 | 1.594592 | 1.828907 |
| 0.30 | 1.336109 | 1.392634 | 1.472371 | 1.582751 | 1.738496 | 1.986430 | 2.430245 |
| 0.40 | 1.458826 | 1.545866 | 1.663281 | 1.821858 | 2.061545 | 2.454733 | 3.195015 |
| 0.50 | 1.593490 | 1.711481 | 1.865360 | 2.093648 | 2.436030 | 3.017792 | 4.160623 |
| 0.60 | 1.736942 | 1.882681 | 2.091237 | 2.388769 | 2.865120 | 3.677961 | 5.372060 |
| 0.70 | 1.882789 | 2.071779 | 2.337737 | 2.722467 | 3.343154 | 4.465603 | 6.893997 |
| 0.80 | 2.042356 | 2.274666 | 2.596983 | 3.092489 | 3.895264 | 5.380674 | 8.767342 |
| 0.90 | 2.211374 | 2.492080 | 2.885438 | 3.491417 | 4.521093 | 6.463122 | 11.09492 |
| 1.00 | 2.390235 | 2.724789 | 3.198113 | 3.939515 | 5.211765 | 7.727539 | 13.95519 |
| 2.00 | 4.780470 | 5.989490 | 7.974129 | 11.49915 | 18.78107 | 37.31186 | 104.7370 |
| 3.00 | 8.581191 | 11.68246 | 17.14493 | 28.14059 | 54.61872 | 138.1893 | 557.4440 |
| 4.00 | 14.34141 | 20.85640 | 33.37406 | 61.19663 | 137.6709 | 428.5372 | 2358.942 |
| 5.00 | 22.70458 | 35.06771 | 60.53055 | 122.3896 | 312.9113 | 1169.000 | 8461.699 |
| 6.00 | 34.32476 | 56.18760 | 103.8144 | 229.1898 | 658.3791 | 2897.906 | 26763.08 |
| 7.00 | 50.30930 | 86.29610 | 169.7160 | 405.7433 | 1300.777 | 6629.324 | 76763.58 |
| 8.00 | 71.70705 | 128.7351 | 268.0730 | 689.8926 | 2433.115 | 14263.55 | 202517.1 |
| 9.00 | 99.83307 | 186.9709 | 410.5600 | 1131.427 | 4369.740 | 29105.52 | 500209.6 |
| 10.00 | 136.2275 | 265.4105 | 612.4384 | 1799.310 | 7564.677 | 56610.46 | 1163785 |
| 20.00 | 1498.502 | 3949.965 | 13300.67 | 63290.88 | 508736.7 | 9429236 | 7.6E+08 |
| 30.00 | 8194.586 | 26670.63 | 116845.9 | 780328.9 | 9850074 | 3.4E+08 | 7.1E+10 |
| 40.00 | 31468.55 | 120773.9 | 648110.6 | 5658081 | 1.0E+08 | 5.8E+09 | 2.5E+12 |
| 50.00 | 96388.95 | 424173.9 | 2709381 | 2.9E+07 | 7.1E+08 | 6.1E+10 | 4.9E+13 |
| 60.00 | 254032.2 | 1257472 | 9307376 | 1.2E+08 | 3.8E+09 | 4.6E+11 | 6.3E+14 |
| 70.00 | 597990.7 | 3283210 | 2.8E+07 | 4.3E+08 | 1.7E+10 | 2.8E+12 | 6.0E+15 |
| 80.00 | 1290211 | 7772824 | 7.3E+07 | 1.3E+09 | 6.2E+10 | 1.4E+13 | 4.5E+16 |
| 90.00 | 2587397 | 1.7E+07 | 1.8E+08 | 3.7E+09 | 2.1E+11 | 5.9E+13 | 2.8E+17 |

Užitím (152) ve (165) vznikne vhodné vyjádření $Q_{\infty\max}$. (Místo nekonečného součinu násobíme jenom $u$ činitelů.)

$$Q_{\infty\max} = \left\{ \prod_{j=1}^{u} \left[ 1 + \frac{r\left(1+\lambda_{\infty}\right)^{1-s}}{2^{s}\,\bar{l}^{\,1-s}} \left( \frac{1}{2^{1-s}} \right)^{j} \right] \right\} \exp\left[ \frac{r\left(1+\lambda_{\infty}\right)^{1-s}}{2^{s}\,\bar{l}^{\,1-s}} \frac{1}{2^{(1-s)u}\left(2^{1-s}-1\right)} \right] \qquad (172)$$

**Určení parametrů.** Kromě střední délky $\bar{l}$ závisí střední navlnění $\bar{\lambda}$ na parametrech $r, s, \lambda_{\infty}$ . Lze je určit z **experimentálních výsledků měření** středního navlnění $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ na třech různých středních délkách $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ vlákenných úseků.

Uvažujme ve shodě s rovnicí (152)

$$a_1 = \frac{r(1+\lambda_\infty)^{1-s}}{2^s \bar{l}_1^{1-s}} \qquad a_2 = \frac{r(1+\lambda_\infty)^{1-s}}{2^s \bar{l}_2^{1-s}} \qquad a_3 = \frac{r(1+\lambda_\infty)^{1-s}}{2^s \bar{l}_3^{1-s}} \qquad \bar{l}_1 > \bar{l}_2 > \bar{l}_3 \tag{173}$$

a zaveďme

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_2}\right)^{1-s} = c \qquad \frac{a_3}{a_1} = \left(\frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_3}\right)^{1-s} = c^* \tag{174}$$

Podobně ve shodě s první rovnicí ve (153) a rovnicí (174) uvažujme

$$\left.\begin{aligned} Q_{\infty 1} &= \prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_1\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] \\ Q_{\infty 2} &= \prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_2\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] = \prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_1 c\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] = \prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_1\left(\frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_2}\right)^{1-s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] \\ Q_{\infty 3} &= \prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_3\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] = \prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_1 c^*\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] = \prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_1\left(\frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_3}\right)^{1-s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right] \end{aligned}\right\} \tag{175}$$

a zaveďme

$$\frac{Q_{\infty 1}}{Q_{\infty 2}} = \frac{\prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_1\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]}{\prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_1\left(\frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_2}\right)^{1-s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]} = K \qquad \frac{Q_{\infty 1}}{Q_{\infty 3}} = \frac{\prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_1\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]}{\prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + a_1\left(\frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_3}\right)^{1-s}\left(\frac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]} = K^* \tag{176}$$

Z rovnice (150) můžeme vyjádřit

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_\infty}{Q_\infty(1+\lambda_\infty) - \lambda_\infty} = 1\Big/\left[Q_\infty\left(\frac{1}{\lambda_\infty}+1\right)-1\right] \qquad Q_\infty = \left(\frac{1}{\bar{\lambda}}+1\right)\Big/\left(\frac{1}{\lambda_\infty}+1\right) \tag{177}$$

Protože $\lambda_\infty$ je společným parametrem všech tří měření, platí

$$K = \frac{Q_{\infty 1}}{Q_{\infty 2}} = \frac{\frac{1}{\bar{\lambda}_1}+1}{\frac{1}{\bar{\lambda}_2}+1} \qquad K^* = \frac{Q_{\infty 1}}{Q_{\infty 3}} = \frac{\frac{1}{\bar{\lambda}_1}+1}{\frac{1}{\bar{\lambda}_3}+1} \tag{178}$$

Veličiny $\bar{l}_1/\bar{l}_2,\ \bar{l}_1/\bar{l}_3$ a $K,\ K^*$ vyjádříme z experimentů. Parametry $r, s, \lambda_\infty$ určíme následovně:

a) Vypočteme hodnoty $\bar{l}_1/\bar{l}_2,\ \bar{l}_1/\bar{l}_3$ a ze (178) hodnoty $K,\ K^*$ .

b) Numerickým řešením soustavy rovnic (176) nalezneme hodnoty dvou neznámých $s$ a $a_1$.

c) Užitím $s$ a např. $a_1$ vypočteme ze (175) $Q_{\infty 1}$. (Raději užijeme odhad $Q_{\infty\max}$ dle (165). $a$ je nyní $a_1$, $u$ je nejmenší nezáporné celé číslo, vyhovující nerovnosti (169) resp. (169a).)

d) Z obecně platného výrazu (177) v tomto případě vypočteme

$$\lambda_\infty = Q_\infty\Big/\left[\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}+1\right)-Q_\infty\right] \qquad \text{a tedy také} \qquad \lambda_\infty = Q_{\infty 1}\Big/\left[\left(\frac{1}{\bar{\lambda}_1}+1\right)-Q_{\infty 1}\right]$$

e) Z definičního výrazu pro $a_1$, t.j. z prvé rovnice (173) konečně vypočteme

$$r = \left(a_1 2^s \bar{l}_1^{1-s}\right)\Big/\left(1+\lambda_\infty\right)^{1-s}$$

Tabulka hodnot *K*, *K** vypočtených z rovnic (176) při $l_1/l_2 = 5$, $l_1/l_3 = 25$

| $\ln a_1$ | $s =$ 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -4.500 | 0.957839 | 0.959087 | 0.960284 | 0.961432 | 0.962532 | 0.963587 | 0.964599 |
| | *0.790671* | *0.807219* | *0.822469* | *0.836490* | *0.847151* | *0.859395* | *0.870540* |
| -4.375 | 0.952361 | 0.953767 | 0.955116 | 0.956410 | 0.957650 | 0.958840 | 0.959981 |
| | *0.767062* | *0.785121* | *0.801822* | *0.817225* | *0.831399* | *0.842229* | *0.854617* |
| -4.250 | 0.946191 | 0.947775 | 0.949294 | 0.950751 | 0.952149 | 0.953489 | 0.954775 |
| | *0.741344* | *0.760962* | *0.779174* | *0.796031* | *0.811591* | *0.825922* | *0.836926* |
| -4.125 | 0.939249 | 0.941030 | 0.942739 | 0.944379 | 0.945952 | 0.947462 | 0.948910 |
| | *0.716323* | *0.734665* | *0.754433* | *0.772799* | *0.789813* | *0.805533* | *0.820024* |
| -4.000 | 0.931443 | 0.933445 | 0.935367 | 0.937211 | 0.938980 | 0.940678 | 0.942307 |
| | *0.686887* | *0.709203* | *0.730129* | *0.747440* | *0.765962* | *0.783136* | *0.799018* |
| -3.875 | 0.922677 | 0.924924 | 0.927082 | 0.929153 | 0.931141 | 0.933050 | 0.934881 |
| | *0.655396* | *0.679177* | *0.701594* | *0.722637* | *0.742315* | *0.758626* | *0.775961* |
| -3.750 | 0.912843 | 0.915363 | 0.917783 | 0.920107 | 0.922338 | 0.924480 | 0.926537 |
| | *0.621927* | *0.647092* | *0.670949* | *0.693462* | *0.714616* | *0.734420* | *0.752896* |
| -3.625 | 0.901826 | 0.904648 | 0.907359 | 0.909962 | 0.912463 | 0.914865 | 0.917171 |
| | *0.586614* | *0.613037* | *0.638244* | *0.662168* | *0.684768* | *0.706029* | *0.725955* |
| -3.500 | 0.889503 | 0.892657 | 0.895689 | 0.898602 | 0.901401 | 0.904090 | 0.906673 |
| | *0.551713* | *0.577158* | *0.603580* | *0.628816* | *0.652795* | *0.675475* | *0.696835* |
| -3.375 | 0.875742 | 0.879263 | 0.882647 | 0.885901 | 0.889028 | 0.892034 | 0.894922 |
| | *0.513729* | *0.541976* | *0.569296* | *0.595561* | *0.620673* | *0.642792* | *0.665539* |
| -3.250 | 0.863889 | 0.867527 | 0.871037 | 0.871725 | 0.875213 | 0.878566 | 0.881791 |
| | *0.474709* | *0.503554* | *0.531670* | *0.558900* | *0.585112* | *0.610205* | *0.634104* |
| -3.125 | 0.847706 | 0.851712 | 0.855581 | 0.859317 | 0.862924 | 0.866405 | 0.869764 |
| | *0.435024* | *0.464166* | *0.492809* | *0.520768* | *0.547880* | *0.574014* | *0.599066* |
| -3.000 | 0.829859 | 0.834254 | 0.838504 | 0.842612 | 0.846582 | 0.850417 | 0.854121 |
| | *0.395099* | *0.424204* | *0.453064* | *0.481472* | *0.509239* | *0.536204* | *0.562233* |
| -2.875 | 0.810241 | 0.815046 | 0.819696 | 0.824197 | 0.828551 | 0.832761 | 0.836831 |
| | *0.356646* | *0.384106* | *0.412844* | *0.441383* | *0.469516* | *0.497056* | *0.523841* |
| -2.750 | 0.788757 | 0.793986 | 0.799053 | 0.803964 | 0.808719 | 0.813323 | 0.817779 |
| | *0.317816* | *0.345829* | *0.374137* | *0.402508* | *0.430722* | *0.458571* | *0.485869* |
| -2.625 | 0.768226 | 0.773847 | 0.779302 | 0.784593 | 0.789722 | 0.794693 | 0.799509 |
| | *0.280181* | *0.307098* | *0.334577* | *0.362391* | *0.390313* | *0.418125* | *0.445621* |
| -2.500 | 0.743456 | 0.749509 | 0.755391 | 0.761105 | 0.766652 | 0.772035 | 0.777256 |
| | *0.244203* | *0.269694* | *0.295994* | *0.322891* | *0.350162* | *0.377586* | *0.404948* |
| -2.375 | 0.716775 | 0.723254 | 0.729561 | 0.735697 | 0.741663 | 0.747461 | 0.753092 |
| | *0.210303* | *0.234078* | *0.258878* | *0.284513* | *0.310777* | *0.337454* | *0.365416* |
| -2.250 | 0.688197 | 0.695089 | 0.701809 | 0.708358 | 0.714737 | 0.720945 | 0.729072 |
| | *0.178839* | *0.201343* | *0.224462* | *0.248628* | *0.273659* | *0.299355* | *0.325510* |
| -2.125 | 0.657776 | 0.665057 | 0.672169 | 0.681282 | 0.688181 | 0.694918 | 0.701492 |
| | *0.150725* | *0.170532* | *0.191669* | *0.214016* | *0.237421* | *0.261713* | *0.286700* |
| -2.000 | 0.627836 | 0.635601 | 0.643212 | 0.650668 | 0.655947 | 0.662924 | 0.669731 |
| | *0.124919* | *0.142524* | *0.161530* | *0.181856* | *0.202765* | *0.225250* | *0.248622* |
| -1.875 | 0.594536 | 0.602636 | 0.608506 | 0.616145 | 0.623624 | 0.630941 | 0.638092 |
| | *0.102104* | *0.117482* | *0.133821* | *0.151898* | *0.171264* | *0.192390* | *0.214120* |
| -1.750 | 0.557778 | 0.565977 | 0.574034 | 0.581947 | 0.589710 | 0.597319 | 0.606685 |
| | *0.081961* | *0.095084* | *0.109579* | *0.125841* | *0.143131* | *0.161706* | *0.181474* |
| -1.625 | 0.521674 | 0.530050 | 0.538301 | 0.546423 | 0.556192 | 0.564279 | 0.570516 |
| | *0.065020* | *0.076324* | *0.088738* | *0.102489* | *0.117580* | *0.133986* | *0.151194* |
| -1.500 | 0.484744 | 0.493216 | 0.501584 | 0.511708 | 0.520101 | 0.526618 | 0.534537 |
| | *0.051009* | *0.060196* | *0.070585* | *0.082229* | *0.095159* | *0.109016* | *0.124759* |
| -1.375 | 0.447328 | 0.457509 | 0.466145 | 0.473158 | 0.481413 | 0.489560 | 0.497591 |
| | *0.039296* | *0.046758* | *0.055293* | *0.064756* | *0.075557* | *0.087839* | *0.101165* |
| -1.250 | 0.411541 | 0.420186 | 0.427231 | 0.435553 | 0.443796 | 0.451952 | 0.461613 |
| | *0.029816* | *0.035766* | *0.042491* | *0.050326* | *0.059422* | *0.069504* | *0.080757* |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1.125 | 0.373237 | 0.381517 | 0.389760 | 0.397958 | 0.407355 | 0.415708 | 0.422629 |
| | *0.022200* | *0.026828* | *0.032232* | *0.038631* | *0.045871* | *0.054122* | *0.063228* |
| -1.000 | 0.336777 | 0.344795 | 0.352798 | 0.361967 | 0.370179 | 0.377088 | 0.384997 |
| | *0.016323* | *0.019942* | *0.024159* | *0.029101* | *0.034845* | *0.041321* | *0.048974* |
| -0.875 | 0.301404 | 0.309072 | 0.317860 | 0.325786 | 0.332545 | 0.340249 | 0.348969 |
| | *0.011861* | *0.014556* | *0.017770* | *0.021574* | *0.025949* | *0.031213* | *0.037220* |
| -0.750 | 0.267484 | 0.275754 | 0.283260 | 0.289737 | 0.297100 | 0.305376 | 0.312112 |
| | *0.008466* | *0.010463* | *0.012867* | *0.015682* | *0.019127* | *0.023136* | *0.027740* |
| -0.625 | 0.236281 | 0.243254 | 0.249333 | 0.256235 | 0.263167 | 0.271149 | 0.277406 |
| | *0.005954* | *0.007407* | *0.009138* | *0.011289* | *0.013838* | *0.016871* | *0.020377* |
| -0.500 | 0.206304 | 0.211894 | 0.218237 | 0.224635 | 0.231954 | 0.237853 | 0.244416 |
| | *0.004126* | *0.005146* | *0.006431* | *0.007980* | *0.009853* | *0.012061* | *0.014771* |
| -0.375 | 0.177835 | 0.183552 | 0.189342 | 0.195933 | 0.201373 | 0.207388 | 0.214152 |
| | *0.002808* | *0.003546* | *0.004448* | *0.005555* | *0.006883* | *0.008536* | *0.010506* |
| -0.250 | 0.152467 | 0.157606 | 0.163435 | 0.168346 | 0.173751 | 0.179770 | 0.184927 |
| | *0.001890* | *0.002402* | *0.003031* | *0.003797* | *0.004762* | *0.005932* | *0.007331* |
| -0.125 | 0.129584 | 0.134648 | 0.138990 | 0.143754 | 0.148592 | 0.154099 | 0.158665 |
| | *0.001261* | *0.001605* | *0.002030* | *0.002564* | *0.003238* | *0.004060* | *0.005062* |
| 0.000 | 0.109598 | 0.113729 | 0.117483 | 0.121684 | 0.126420 | 0.130473 | 0.135312 |
| | *0.000827* | *0.001059* | *0.001345* | *0.001714* | *0.002171* | *0.002728* | *0.003435* |
| 0.125 | 0.091666 | 0.094878 | 0.098460 | 0.102466 | 0.105987 | 0.109828 | 0.114151 |
| | *0.000536* | *0.000687* | *0.000882* | *0.001127* | *0.001430* | *0.001818* | *0.002297* |
| 0.250 | 0.075753 | 0.078754 | 0.081831 | 0.085348 | 0.088340 | 0.091954 | 0.095159 |
| | *0.000342* | *0.000443* | *0.000570* | *0.000732* | *0.000932* | *0.001192* | *0.001510* |
| 0.375 | 0.062305 | 0.064849 | 0.067734 | 0.070253 | 0.073029 | 0.075951 | 0.078884 |
| | *0.000217* | *0.000282* | *0.000364* | *0.000467* | *0.000602* | *0.000769* | *0.000985* |
| 0.500 | 0.050855 | 0.053188 | 0.055270 | 0.057552 | 0.060106 | 0.062380 | 0.065070 |
| | *0.000136* | *0.000177* | *0.000229* | *0.000297* | *0.000383* | *0.000492* | *0.000633* |
| 0.625 | 0.041352 | 0.043185 | 0.044891 | 0.046794 | 0.048811 | 0.050843 | 0.052980 |
| | *8.5E-05* | *0.000110* | *0.000143* | *0.000186* | *0.000240* | *0.000312* | *0.000400* |
| 0.750 | 0.033308 | 0.034683 | 0.036205 | 0.037923 | 0.039454 | 0.041272 | 0.042921 |
| | *5.2E-05* | *6.8E-05* | *8.9E-05* | *0.000116* | *0.000150* | *0.000195* | *0.000252* |
| 0.875 | 0.026560 | 0.027761 | 0.029103 | 0.030333 | 0.031673 | 0.033091 | 0.034530 |
| | *3.2E-05* | *4.1E-05* | *5.4E-05* | *7.1E-05* | *9.3E-05* | *0.000120* | *0.000156* |
| 1.000 | 0.021112 | 0.022084 | 0.023191 | 0.024175 | 0.025350 | 0.026424 | 0.027692 |
| | *1.9E-05* | *2.5E-05* | *3.3E-05* | *4.3E-05* | *5.7E-05* | *7.4E-05* | *9.6E-05* |
| 1.125 | 0.016685 | 0.017531 | 0.018305 | 0.019153 | 0.020054 | 0.020972 | 0.021943 |
| | *1.1E-05* | *1.5E-05* | *2.0E-05* | *2.6E-05* | *3.4E-05* | *4.5E-05* | *5.8E-05* |
| 1.250 | 0.013117 | 0.013804 | 0.014413 | 0.015143 | 0.015816 | 0.016606 | 0.017333 |
| | *6.8E-06* | *9.0E-06* | *1.2E-05* | *1.6E-05* | *2.1E-05* | *2.7E-05* | *3.5E-05* |
| 1.375 | 0.010304 | 0.010773 | 0.011291 | 0.011882 | 0.012408 | 0.013007 | 0.013659 |
| | *4.1E-06* | *5.3E-06* | *7.1E-06* | *9.3E-06* | *1.2E-05* | *1.6E-05* | *2.1E-05* |
| 1.500 | 0.008004 | 0.008397 | 0.008836 | 0.009243 | 0.009720 | 0.010164 | 0.010658 |
| | *2.4E-06* | *3.2E-06* | *4.2E-06* | *5.5E-06* | *7.3E-06* | *9.6E-06* | *1.3E-05* |
| 1.625 | 0.006210 | 0.006517 | 0.006868 | 0.007182 | 0.007563 | 0.007907 | 0.008297 |
| | *1.4E-06* | *1.9E-06* | *2.5E-06* | *3.2E-06* | *4.3E-06* | *5.7E-06* | *7.5E-06* |
| 1.750 | 0.004799 | 0.005057 | 0.005296 | 0.005558 | 0.005839 | 0.006147 | 0.006432 |
| | *8.1E-07* | *1.1E-06* | *1.4E-06* | *1.9E-06* | *2.5E-06* | *3.3E-06* | *4.4E-06* |
| 1.875 | 0.003696 | 0.003899 | 0.004082 | 0.004303 | 0.004506 | 0.004734 | 0.004984 |
| | *4.7E-07* | *6.3E-07* | *8.3E-07* | *1.1E-06* | *1.5E-06* | *1.9E-06* | *2.6E-06* |
| 2.000 | 0.002848 | 0.002986 | 0.003137 | 0.003299 | 0.003476 | 0.003642 | 0.003827 |
| | *2.7E-07* | *3.6E-07* | *4.8E-07* | *6.4E-07* | *8.5E-07* | *1.1E-06* | *1.5E-06* |
| 2.125 | 0.002182 | 0.002287 | 0.002412 | 0.002529 | 0.002667 | 0.002794 | 0.002937 |
| | *1.6E-07* | *2.1E-07* | *2.8E-07* | *3.7E-07* | *4.9E-07* | *6.5E-07* | *8.7E-07* |
| 2.250 | 0.001661 | 0.001747 | 0.001839 | 0.001933 | 0.002034 | 0.002145 | 0.002254 |
| | *9.0E-08* | *1.2E-07* | *1.6E-07* | *2.1E-07* | *2.8E-07* | *3.8E-07* | *5.0E-07* |

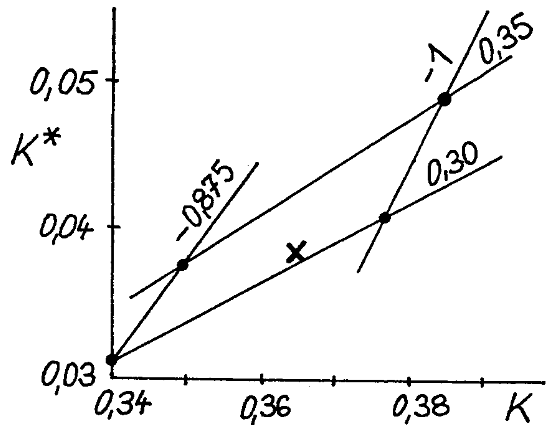
Nejobtížnější je numerické řešení soustavy rovnic (176). Jsou-li předem známy poměry $l_1/l_2$, $l_1/l_3$, je výhodné užitím (176) vypočítat ke každé dvojici čísel $a_1$, $s$ hodnoty $K$, $K^*$ a tabelovat je. (Nekonečné součiny prakticky nahradíme odhadem $Q_{\infty\max}$.) Pro příklad je uvedena výpočetní tabulka pro $l_1/l_2 = 5$, $l_1/l_3 = 25$; hodnoty $K$ jsou napsány **normálním typem** písma a hodnoty $K^*$ ***kurzívou***. V prvém sloupci jsou logaritmy hodnot $a_1$, v hlavičce jsou hodnoty $s$ .

**Příklad.** Bylo naměřeno $\bar{\lambda}_1 = 0{,}15$ (15%) pro $\bar{l}_1 = 12{,}5\,\text{mm}$, $\bar{\lambda}_2 = 0{,}05$ (5%) pro $\bar{l}_2 = 2{,}5\,\text{mm}$ a $\bar{\lambda}_3 = 0{,}005$ (0,5%) pro $\bar{l}_3 = 0{,}5\,\text{mm}$. Potom podle bodu a) nalezneme:

$$\bar{l}_1/\bar{l}_2 = 12{,}5/2{,}5 = 5,\quad \bar{l}_1/\bar{l}_3 = 12{,}5/0{,}5 = 25,$$
$$K = \left(\tfrac{1}{0{,}15}+1\right)/\left(\tfrac{1}{0{,}05}+1\right) = 0{,}365,\quad K^* = \left(\tfrac{1}{0{,}15}+1\right)/\left(\tfrac{1}{0{,}005}+1\right) = 0{,}0381.$$

Pro vyhledání hodnot $a_1$ a $s$ použijeme tabulku. Vypočtené hodnoty $K$, $K^*$ se pohybují mezi následujícími čtyřmi kombinacemi parametrů $a_1$ a $s$, vybranými z výpočetní tabulky.

| $\ln a_1$ | … | s=0,30 | s=0,35 |
|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋱ | ⋮ | ⋮ |
| $\ln a_1 =$ -1,000 | … | K=0,377088 *K*=0,041321* | K=0,384997 *K*=0,048974* |
| $\ln a_1 =$ -0,875 | … | K=0,340249 *K*=0,031213* | K=0,348969 *K*=0,037220* |
| ⋮ | ⋰ | ⋮ | ⋮ |



obr. 26

Nejvhodnější řešení je interpolační. Poloha hledaného bodu je znázorněna v grafu se souřadnicemi $K$, $K^*$ na obr. 26. Odtud interpolačně najdeme $\ln a_1 = -0{,}95$, ($a_1$=e$^{-0{,}95}$=0,387), $s = 0{,}31$.

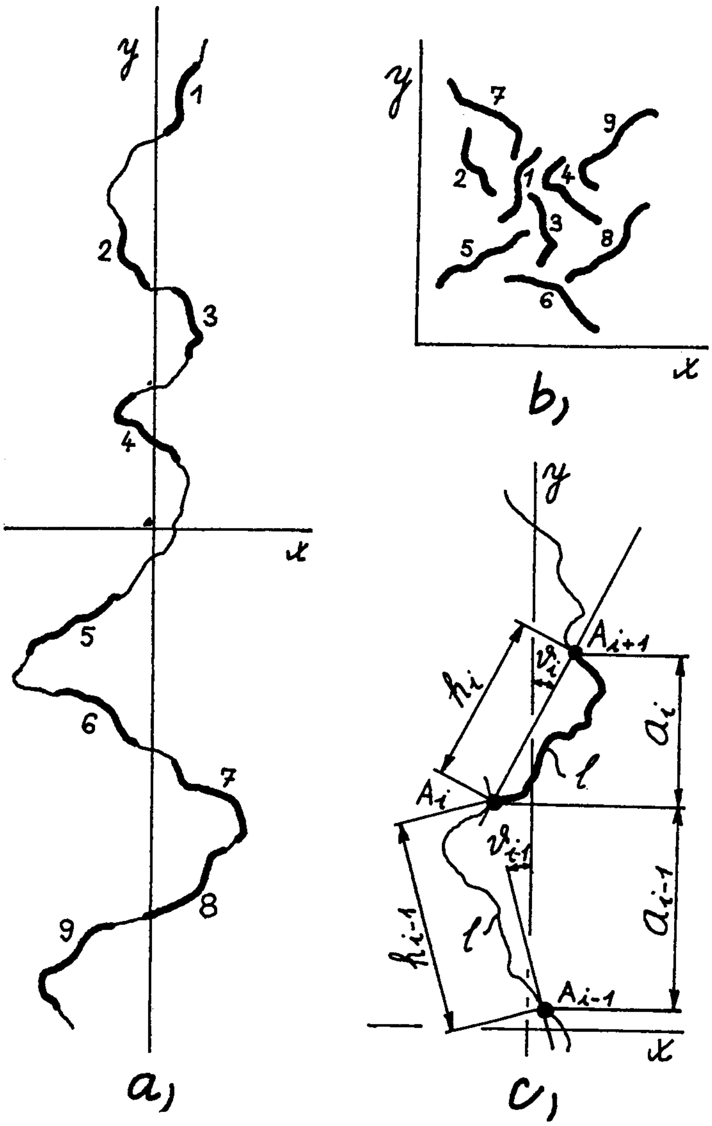
(Dále snadno postupujeme dle bodů c), d), e).)

## 5.2 Vztah mezi orientací a navlněním vláken v rovině

Mějme soustavu staplových vláken s rovinným uspořádáním (např. pavučinku). Intuitivně víme, že navlnění vlákenných úseků souvisí s orientací; souvislost však není obecně jednoznačná. Jednoznačné přiřazení je speciálním případem, který však je blízký reálným textilním útvarům.

**Modelová představa.** *Předpokládejme*, že **existuje náhodná stacionární funkce** $x = x(y)$, $y \in (-\infty,\infty)$ **taková, že (staplová) vlákna, která tvoří vlákenný útvar, jsou náhodně vybrané úseky této funkce, posunuté** (ne však pootočené) **v rovině textilie.** Na obr. 27a) je náhodná funkce $x = x(y)$ s několika náhodně vybranými úseky č. 1 až 9. Obr. 27b) ilustruje výsek vlákenné struktury, tvořený právě těmito vlákny. Údaje o vlákenné struktuře lze odvodit z vlastností funkce $x = x(y)$.

Křivku $x = x(y)$ uvažujme rozdělenou na úseky konstantní délky $l$. Úseky očíslujme pořadovými čísly $i = 1,2,\ldots$ . Část křivky s úseky $i$-1 a $i$ je na obr. 27c); $i$-tý úsek je vyznačen silně. Spojnice koncových bodů $A_i$, $A_{i+1}$ má délku $h_i$ a svírá s osou $y$ neorientovaný úhel $\vartheta_i \in (0, \pi/2)$.




obr. 27

**Navlnění *i*-tého úseku** je z (11)

$$\lambda_i = \frac{l}{h_i} - 1 \quad h_i = \frac{l}{1+\lambda_i} \tag{179}$$

Pro délku $a_i$ průmětu úsečky $A_i A_{i+1}$ do osy $y$ platí

$$a_i = h_i \cos\vartheta_i \tag{180}$$

Uvažujme $n$ po sobě jdoucích úseků délky $l$, označených indexy $i = 1,2,\ldots,n$ , které dohromady tvoří jeden dlouhý úsek délky $l^*$; úsek začíná v $A_1$ a končí v bodě $A_{n+1}$. Délka tohoto dlouhého úseku je

$$l^* = nl \tag{181}$$

Velikost jeho průmětu do osy $y$ je

$$a^* = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \cos\vartheta_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{l\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i} = l\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i} \tag{182}$$

Úsečka $A_1A_{n+1}$ spojující koncové body dlouhého úseku svírá s osou $y$ úhel $\vartheta^*$ a pro její délku $h^*$ musí analogicky ke vztahu (180) platit

$$\left.\begin{aligned} a^* &= h^* \cos\vartheta^* \\ h^* &= \frac{a^*}{\cos\vartheta^*} \end{aligned}\right\} \tag{183}$$

Pro navlnění $\lambda^*$ pak platí z rovnice (11) při užití (181) až (183)

$$\lambda^* = \frac{l^*}{h^*} - 1 = \frac{nl}{\dfrac{a^*}{\cos\vartheta^*}} - 1 = \frac{nl\cos\vartheta^*}{l\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}} - 1 = \frac{\cos\vartheta^*}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}} - 1 \tag{184}$$

**Nekonečný úsek** je vytvořen z nekonečného počtu úseků výchozí délky $l$ (platí $n \to \infty$ ). Pro **stacionární** funkci $x = x(y)$ platí, že úhel $\vartheta^*$, který svírá úsečka $A_1A_{n+1}$ s osou $y$ konverguje pro $n \to \infty$ k nule.

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta^* = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\cos\vartheta^*\right) = 1 \tag{185}$$

Podle (181) při $n \to \infty$ se také hodnota $l^* = nl \to \infty$. Navlnění takového nekonečného úseku bylo v předchozích kapitolách značeno $\lambda_\infty$. Z rovnice (184) pak plyne

$$\lambda_\infty = \lim_{n\to\infty}\lambda^* = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\vartheta^*}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}} - 1\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\cos\vartheta^*}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}\right)} - 1 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}\right)} - 1 =$$

$$= \frac{1}{E\left(\frac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}\right)} - 1 \qquad (186)$$

Výraz $E\left(\frac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}\right)$ vyjadřuje **střední hodnotu** veličiny $\frac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}$, stanovenou ze všech úseků výchozí funkce $x = x(y)$. ($E$ je operátorem střední hodnoty.) Stanovit tuto střední hodnotu je ovšem obtížné. Pro přibližné vyjádření lze však vyjít z *předpokladu*, že **střední hodnota podílu se příliš neliší od podílu středních hodnot**. Označíme-li

$$E(\cos\vartheta_i) = \overline{\cos\vartheta} \qquad E(1+\lambda_i) = 1 + E(\lambda_i) = 1 + \bar{\lambda} \qquad (187)$$

lze předpoklad vyjádřit **přibližným** výrazem

$$E\left(\frac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}\right) = \frac{\overline{\cos\vartheta}}{1+\bar{\lambda}} \qquad (188)$$

Podle (186) pak

$$\lambda_\infty = \frac{1}{E\left(\frac{\cos\vartheta_i}{1+\lambda_i}\right)} - 1 = \frac{1}{\frac{\overline{\cos\vartheta}}{1+\bar{\lambda}}} - 1 = \frac{1+\bar{\lambda}}{\overline{\cos\vartheta}} - 1 \qquad \frac{1+\bar{\lambda}}{1+\lambda_\infty} = \overline{\cos\vartheta} \qquad (189)$$

Jednotlivé vlákenné úseky délky $l$ svírají s osou $y$ neorientované úhly $\vartheta_i$, $i = 1,2,\ldots$ (viz obr. 29c). Četnost jejich výskytu je charakterizována **hustotou pravděpodobnosti směrového rozložení** vlákenných úseků $u(\vartheta)$, $\vartheta \in (0, \pi/2)$. Střední hodnota kosinu je pak dána vztahem

$$\overline{\cos\vartheta} = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \; u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \qquad (190)$$

Vztah (189) společně s výrazem (190) přiřazují hustotu pravděpodobnosti směrového rozložení $u(\vartheta)$ a středního navlnění $\bar{\lambda}$ vlákenných úseků délky *l*. Platí-li **model rovinného uspořádání**, pak pro $u(\vartheta)$ platí rovnice (83), platí i výpočet (104a) a z výrazu (190) lze nalézt konkrétní vztah

$$\overline{\cos\vartheta} = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \; u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \,\frac{2}{\pi}\,\frac{C}{C^2 - (C^2-1)\cos^2\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{2C\,\mathrm{arctg}\sqrt{C^2-1}}{\pi\sqrt{C^2-1}} \qquad (191)$$

kde $C$ je charakteristickým parametrem směrového rozložení. (Z porovnáním vztahů (107) a (190) vyplývá, že závislost mezi $\overline{\cos\vartheta}$ a $C$ je shodná s průběhem funkce na obr. 19. )

Pro další úvahy zaveďme dva předpoklady. Podle *předpokladu 1* **pro střední navlnění vlákenných úseků platí zobecněný fenomenologický model z předchozí kapitoly**. Podle *předpokladu 2* **střední délku $\bar{l}$, ke které je vztaženo střední navlnění $\bar{\lambda}$, lze** (přibližně) **ztotožnit s délkou *l*, ke které je vztaženo směrové uspořádání vláken.**

Pak ze vztahů (189) a (150) nalezneme

$$\bar{\lambda} = (1+\lambda_\infty)\overline{\cos\vartheta} - 1 = \frac{\lambda_\infty}{Q_\infty(1+\lambda_\infty)-\lambda_\infty} \qquad \lambda_\infty\left(\frac{1}{\lambda_\infty}+1\right)\overline{\cos\vartheta} - 1 = \frac{1}{Q_\infty\left(\frac{1}{\lambda_\infty}+1\right)-1} \tag{192}$$

Označme pomocnou veličinu

$$x = \frac{1}{\lambda_\infty}+1 \qquad \lambda_\infty = \frac{1}{x-1} \qquad x > 1 \tag{193}$$

Z předchozích dvou rovnic postupně nalezneme

$$\frac{x}{x-1}\overline{\cos\vartheta} - 1 = \frac{1}{Q_\infty x - 1} \qquad x\overline{\cos\vartheta} - x + 1 = \frac{x-1}{Q_\infty x - 1}$$

$$\left[x\overline{\cos\vartheta} - x + 1\right](Q_\infty x - 1) = x - 1 \qquad \left[1-\left(1-\overline{\cos\vartheta}\right)x\right](Q_\infty x - 1) = x - 1$$

$$Q_\infty x - Q_\infty\left(1-\overline{\cos\vartheta}\right)x^2 - 1 + \left(1-\overline{\cos\vartheta}\right)x - x + 1 = 0$$

$$Q_\infty x - Q_\infty\left(1-\overline{\cos\vartheta}\right)x^2 + \left(1-\overline{\cos\vartheta}\right)x - x = 0$$

$$Q_\infty - Q_\infty\left(1-\overline{\cos\vartheta}\right)x + \left(1-\overline{\cos\vartheta}\right) - 1 = 0$$

$$x = \frac{Q_\infty + \left(1-\overline{\cos\vartheta}\right) - 1}{Q_\infty\left(1-\overline{\cos\vartheta}\right)} = \frac{Q_\infty - \overline{\cos\vartheta}}{Q_\infty\left(1-\overline{\cos\vartheta}\right)} \tag{194}$$

**Určení parametrů.** Různým (středním) délkám $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ příslušejí střední navlnění $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$. K hodnotám $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ patří též jisté hodnoty $Q_{\infty 1}, Q_{\infty 2}$, neboť ze (150) plyne

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_\infty}{Q_\infty(1+\lambda_\infty)-\lambda_\infty} = \frac{1}{Q_\infty\left(\frac{1}{\lambda_\infty}+1\right)-1} \qquad \frac{1}{\bar{\lambda}}+1 = Q_\infty\left(\frac{1}{\lambda_\infty}+1\right) \qquad Q_\infty = \frac{\frac{1}{\bar{\lambda}}+1}{\frac{1}{\lambda_\infty}+1} \tag{195}$$

Vlákenné úseky délky $l_1$ mají směrové úhly popsané náhodnou proměnnou $\vartheta_1$, úseky délky $l_2$ proměnnou $\vartheta_2$. Rozložení popisujeme hustotami pravděpodobnosti $u_1(\vartheta_1), u_2(\vartheta_2)$. Střední hodnoty kosinů jsou k $l_1, l_2$ přiřazeny vztahem (190). (Podle předpokladu 2 přibližně $\bar{l}_1 = l_1$ a $\bar{l}_2 = l_2$.)

$$\overline{\cos\vartheta_1} = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta_1\, u_1(\vartheta_1)\,\mathrm{d}\vartheta_1 \qquad \overline{\cos\vartheta_2} = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta_2\, u_2(\vartheta_2)\,\mathrm{d}\vartheta_2$$

Jsou-li hustoty pravděpodobnosti $u_1(\vartheta_1), u_2(\vartheta_2)$ **známé** (např. **experimentálně**), lze střední hodnoty kosinů $\overline{\cos\vartheta_1}$ a $\overline{\cos\vartheta_2}$ vyčíslit. Užitím výrazu (194) můžeme dále psát rovnici

$$x = \frac{Q_{\infty 1} - \overline{\cos\vartheta_1}}{Q_{\infty 1}\left(1-\overline{\cos\vartheta_1}\right)} = \frac{Q_{\infty 2} - \overline{\cos\vartheta_2}}{Q_{\infty 2}\left(1-\overline{\cos\vartheta_2}\right)}$$

$$\frac{1}{1-\overline{\cos\vartheta_1}} - \frac{\overline{\cos\vartheta_1}}{Q_{\infty 1}\left(1-\overline{\cos\vartheta_1}\right)} = \frac{1}{1-\overline{\cos\vartheta_2}} - \frac{\overline{\cos\vartheta_2}}{Q_{\infty 2}\left(1-\overline{\cos\vartheta_2}\right)}$$

$$\left[\frac{1}{1-\overline{\cos\vartheta_1}} - \frac{1}{1-\overline{\cos\vartheta_2}}\right] - \left[\frac{\overline{\cos\vartheta_1}}{\left(1-\overline{\cos\vartheta_1}\right)}\right]\frac{1}{Q_{\infty 1}} + \left[\frac{\overline{\cos\vartheta_2}}{\left(1-\overline{\cos\vartheta_2}\right)}\right]\frac{1}{Q_{\infty 2}} = 0 \tag{196}$$

Hodnoty výrazů v hranatých závorkách poslední rovnice jsou známé. Pro zbývající veličiny $Q_{\infty 1}, Q_{\infty 2}$ byl odvozen modelový vztah (175), v němž je použito značení veličin dle (173) a (174). Po jejich dosazení do vztahu (196) vznikne rovnice

$$\left[\frac{1}{1-\overline{\cos\vartheta_1}}-\frac{1}{1-\overline{\cos\vartheta_2}}\right]-\frac{\left[\dfrac{\overline{\cos\vartheta_1}}{\left(1-\overline{\cos\vartheta_1}\right)}\right]}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[1+a_1\left(\dfrac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]}+\frac{\left[\dfrac{\overline{\cos\vartheta_2}}{\left(1-\overline{\cos\vartheta_2}\right)}\right]}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[1+a_1\left(\dfrac{\bar{l}_1}{\bar{l}_2}\right)^{1-s}\left(\dfrac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]}=0 \qquad (197)$$

Tato rovnice obsahuje (při známém $\bar{l}_1, \bar{l}_2$, $\overline{\cos\vartheta_1}$, $\overline{\cos\vartheta_2}$) dvě neznámé $a_1, s$. Proto je třeba (**experimentálně**) **stanovit** ještě hustotu pravděpodobnosti směrového rozložení $f_3(\vartheta_3)$, vlákenných úseků na další délce $l_3$. Analogicky ke (197) musí také platit vztah

$$\left[\frac{1}{1-\overline{\cos\vartheta_1}}-\frac{1}{1-\overline{\cos\vartheta_3}}\right]-\frac{\left[\dfrac{\overline{\cos\vartheta_1}}{\left(1-\overline{\cos\vartheta_1}\right)}\right]}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[1+a_1\left(\dfrac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]}+\frac{\left[\dfrac{\overline{\cos\vartheta_3}}{\left(1-\overline{\cos\vartheta_3}\right)}\right]}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[1+a_1\left(\dfrac{\bar{l}_1}{\bar{l}_3}\right)^{1-s}\left(\dfrac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]}=0 \qquad (197a)$$

Ze soustavy rovnic (197) a (197a) již lze neznámé $a_1, s$ vypočítat. (Nekonečné součiny vyjadřují veličiny $Q_{\infty 1}, Q_{\infty 2}, Q_{\infty 3}$; jejich numerické vyjádření popisuje předchozí kapitola.) Zbývající parametry $\lambda_\infty$ a $r$ lze nyní stanovit známým způsobem, popsaným v bodech c), d) a e) za rovnicí (178). Připomeňme, že tento postup umožňuje stanovit **konkrétní model navlnění ze známého směrového rozložení** vlákenných úseků třech různých délek.

Je možné řešit i úlohu obrácenou - **určovat směrové rozložení ze známého navlnění** vlákenných úseků. Nechť platí: *a)* rovinný model směrového uspořádání vláken, a tedy rovnice (83) i (191) a *b)* model navlnění, a tedy rovnice (151). Do prvního vztahu ve (192) lze dosadit za $\overline{\cos\vartheta}$ výraz (191) a za $Q_\infty$ tvar (151). Tak vznikne rovnice

$$\left(1+\lambda_\infty\right)\overline{\cos\vartheta}-1=\frac{\lambda_\infty}{Q_\infty\left(1+\lambda_\infty\right)-\lambda_\infty}$$

$$\left(1+\lambda_\infty\right)\frac{2C\,\mathrm{arctg}\sqrt{C^2-1}}{\pi\sqrt{C^2-1}}-1=\frac{\lambda_\infty}{\left\{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{r\left(1+\lambda_\infty\right)^{1-s}}{2^s\,\bar{l}^{1-s}}\left(\dfrac{1}{2^{1-s}}\right)^j\right]\right\}\left(1+\lambda_\infty\right)-\lambda_\infty} \qquad (198)$$

(Podle 2. předpokladu se k délce $\bar{l}\cong l$ se váže jak střední hodnota navlnění, tak i hustota pravděpodobnosti směrového rozložení.)

Protože navlnění je známé (známe parametry $s, r, \lambda_\infty$), můžeme pro každé $\bar{l}$ vypočítat z poslední rovnice neznámou *C*. Ke každé délce vlákenných úseků pak vztahem (83) určíme konkrétní hustotu pravděpodobnosti jejich směrového rozložení.

**Příklady.** První příklad byl zmíněn již v závěru kapitoly 4.2. Vyhodnocovalo se směrové rozložení v pavučince z viskózových vláken bavlnářského typu. Experimentálně nalezeným hustotám pravděpodobnosti směrového rozložení na třech různých délkách vlákenných úseků vyhovovaly vztahy typu (83). Postupem popsaným v předchozím textu byly pak vypočteny parametry modelu navlnění $s = 0,32, r = 2,22$ mm, $\lambda_\infty = 0,322$.

Druhý příklad se týká pavučinky vyrobené z viskózových vláken vlnařského typu. Experimentálně nalezeným hustotám pravděpodobnosti pro různé délky vlákenných úseků vyhovovaly rovněž vztahy typu (83). Podobně jako v předchozím příkladě byly vypočteny parametry modelu navlnění $s = 0,15, r = 3,72$ mm, $\lambda_\infty = 0,365$.

Z parametrů navlnění bylo nyní možné vypočítat závislost mezi délkou vlákenných úseků $l$ (předpokládáme $l \cong \bar{l}$) a parametrem $C$ ("obrácená úloha" popsaná v předchozím textu). Tato závislost byla však **empiricky** vyjádřena nezávisle na modelu navlnění, přímo při vyhodnocování výsledků měření směrového uspořádání. V prvém příkladě (pavučina z bavlnářského typu vláken) byla nalezena již uvedená funkce (84), ve druhém příkladě (pavučina z vlnařského typu vláken) byla nalezena analogická funkce

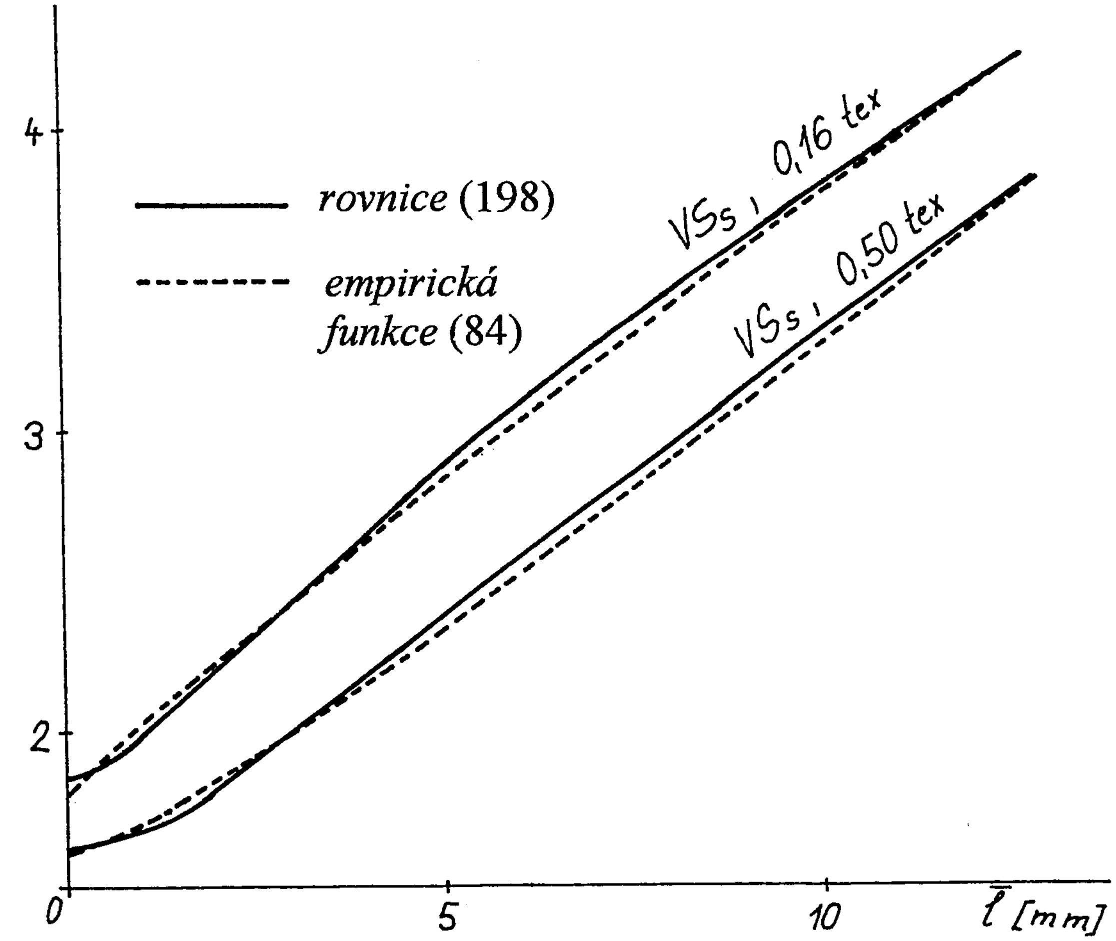
$$C = 0,114\, l_{[\mathrm{mm}]}^{1,168} + 1,6 \tag{199}$$

Porovnání charakterizuje tabulka.

| Hodnoty parametru $C$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Materiál | pavučina VSs - bavlnářský typ (0,16 tex) | | pavučina VSs - vlnařský typ (0,50 tex) | |
| $s$<br>$r$ [mm]<br>$\lambda_\infty$ | 0,32<br>2,22<br>0,322 | | 0,15<br>3,72<br>0,365 | |
| $l, \bar{l}$ [mm] | funkce (198) | empirický vztah (84) | funkce (198) | empirický vztah (199) |
| 0,1 | 1,85 | 1,83 | 1,62 | 1,61 |
| 0,5 | 1,89 | 1,92 | 1,63 | 1,65 |
| 1 | 1,99 | 2,03 | 1,67 | 1,71 |
| 2 | 2,22 | 2,25 | 1,82 | 1,86 |
| 4 | 2,67 | 2,65 | 2,19 | 2,18 |
| 6 | 3,08 | 3,03 | 2,58 | 2,52 |
| 8 | 3,46 | 3,41 | 2,95 | 2,89 |
| 10 | 3,81 | 3,77 | 3,33 | 3,28 |
| 12 | 4,15 | 4.14 | 3,69 | 3,68 |

Z tabulky je patrná shoda výsledných křivek vypočtených z empirických výrazů a křivek, které byly získány opakovaným řešením rovnice (198) pro mnoho různých délek $l$. Empiricky stanovené rovnice (84) a (199) tedy vlastně zjednodušeně vyjadřují souvislosti mezi navlněním a směrovým uspořádáním vlákenných úseků různé délky.

Tuto shodu ilustruje graficky také obr. 28.




obr. 28

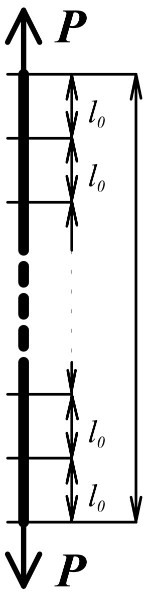
*Část B:*

# STRUKTURNÍ MECHANIKA VLÁKENNÝCH ÚTVARŮ

# 1. STOCHASTICKÉ MODELOVÁNÍ PEVNOSTI VLÁKEN A DÉLKOVÝCH TEXTILIÍ PŘI RŮZNÉ UPÍNACÍ DÉLCE

## 1.1 Obecný model nezávislých pravděpodobností přetrhu

**Pravděpodobnost přetrhu.** Pozorujeme, že pevnost jednotlivých vláken (či délkových textilií), vyjmutých z jedné suroviny, je **náhodná proměnná**, která souvisí s působícím tahovým namáháním a také s velikostí upínací (namáhané) délky. **Pravděpodobnost, že se úsek vlákna délky** $l$ **přetrhne tahovým namáháním** $P$ (napětím či silou) budiž $F(P,l)$. Funkce $F(P,l) \in \langle 0,1 \rangle$, je vzhledem k $P$ a $l$ neklesající[*)] a má význam **distribuční funkce** rozložení pevností $P$ při upínací délce $l$. Pravděpodobnost, že se úsek vlákna délky $l$ působením napětí $P$ **nepřetrhne** je pak $1-F(P,l)$.)




obr. 1

**Nezávislé pravděpodobnosti.** Uvažujme vlákenné úseky namáhané stále **stejným napětím** $P$. Pak $F(P,l)$ závisí jenom na délce $l$. Výchozí upínací délku $l$ rozdělme dle obr. 1 na $n$ úseků délky $l_0$.

$$l = nl_0 \qquad n = l/l_0 \ \ldots \text{přirozené číslo} \tag{1}$$

Každý úsek $l_0$ je zatížen stejným napětím $P$, takže pravděpodobnost jeho přetrhu je $F(P,l_0)$ a pravděpodobnost, že se nepřetrhne je $1-F(P,l_0)$.

Často lze přijmout následující *předpoklad nezávislých pravděpodobností*: **Pravděpodobnost, že se daný úsek přetrhne nezávisí na pravděpodobnostech přetrhu jiných úseků**.

Nemá-li se přetrhnout úsek $l$ na obr. 1, nesmí se přetrhnout **žádný** z jeho $n$ úseků délky $l_0$ (tzv. **princip nejslabšího článku**). Pravděpodobnost přetrhu délky $l$ je pak součinem nezávislých pravděpodobností přetrhu délek $l_0$.

$$1-F(P,l) = \underbrace{\left[1-F(P,l_0)\right] \cdot \ldots \cdot \left[1-F(P,l_0)\right]}_{\text{celkem } n \text{ činitelů}} = \left[1-F(P,l_0)\right]^n = \left[1-F(P,l_0)\right]^{\frac{l}{l_0}} \tag{2}$$

Odtud plyne

$$\left[1-F(P,l)\right]^{\frac{1}{l}} = \left[1-F(P,l_0)\right]^{\frac{1}{l_0}} \tag{2a}$$

Platnost zobecníme zavedením *zobecňujícího předpokladu*, že **poměr** $n = l/l_0$ **může být libovolné reálné kladné číslo** (nejen číslo přirozené, jak bylo původně zavedeno).

---

[*)] Větší napětí $P$ spíš vlákno přetrhne. Ve větší délce $l$ se s větší pravděpodobností vyskytne málo pevné místo a proto je pravděpodobnost přetrhu větší.

Podle (2a) se hodnota $\left[1-F(P,l)\right]^{\frac{1}{l}}$ nezmění, užijeme-li místo délky $l$ jinou, nezávisle zvolenou délku $l_0 = l/n$ ($n$ jsme volili nezávisle). **Funkce** $\left[1-F(P,l)\right]^{\frac{1}{l}}$ **je** tedy **pouze funkcí** $P$. $F(P,l) \in \langle 0, 1\rangle$ je vzhledem k $P$ neklesající a proto $\left[1-F(P,l)\right]^{\frac{1}{l}} \in \langle 0, 1\rangle$ je nerostoucí. To umožňuje vyjádřit funkci (2a) ve tvaru (3), kde $R(P) \in \langle 0, \infty\rangle$ je vhodná neklesající funkce, obvykle nazývaná **riziková funkce**.

$$\left[1-F(P,l)\right]^{\frac{1}{l}} = \left[1-F(P,l_0)\right]^{\frac{1}{l_0}} = e^{-R(P)} \qquad R(P) \in (0, \infty) \tag{3}$$

$$R(P) = -\frac{1}{l}\ln\left[1-F(P,l)\right] = -\frac{1}{l_0}\ln\left[1-F(P,l_0)\right] \tag{3a}$$

Je zřejmé, že ji lze určit ze známého rozložení pevností při jediné upínací délce (např. $l_0$).

Uvažujme, že pevnost každého vlákenného úseku je alespoň $P_{\min}$ (**minimální pevnost**). Pak pro distribuční funkci platí $F(P \le P_{\min}, l) = 0$. Obdobně uvažujme, že pevnost žádného úseku není větší než $P_{\max}$ (**maximální pevnost**). Pak platí $F(P \ge P_{\max}, l) = 1$. Z (3a) plynou následující vlastnosti funkce $R(P)$.

$$\left.\begin{aligned} &R(P) \in \langle 0, \infty\rangle \ldots \text{ neklesající funkce} \\ &R(P \le P_{\min}) = R(P_{\min}) = 0 \\ &R(P \ge P_{\max}) = R(P_{\max}) = \infty \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Z (2a) lze vyjádřit distribuční funkci pevnosti ve tvaru

$$F(P,l) = 1 - \left[1-F(P,l_0)\right]^{\frac{l}{l_0}} \tag{5}$$

nebo z (3) v častěji používaném vyjádření

$$F(P,l) = 1 - e^{-l\,R(P)} \tag{6}$$

Distribuční funkce $F(P,l)$ tedy nemůže být volena libovolně, ale musí vyhovovat rovnici (6), v níž $R(P)$ splňuje vztahy (4). Průběh $F(P,l)$ souhrnně charakterizuje tabulka.

| | $l \to 0$ | $l \in (0, \infty)$ | $l \to \infty$ |
|---|---|---|---|
| $P \le P_{\min}$ | $\lim\limits_{\substack{P \to P_{\min} \\ l \to 0}} F(P,l) =$ $= F(P_{\min}, 0) =$ $= 1 - e^{-0 \cdot 0} = 0$ | $\lim\limits_{P \to P_{\min}} F(P,l) =$ $= F(P_{\min}, l) =$ $= 1 - e^{-l \cdot 0} = 0$ | $\lim\limits_{\substack{P \to P_{\min} \\ l \to \infty}} F(P,l) =$ $= F(P_{\min}, \infty) =$ $= 1 - e^{-\infty \cdot 0}$ neurč. výraz |
| $P \in (P_{\min}, P_{\max})$ | $\lim\limits_{l \to 0} F(P,l) =$ $= F(P, 0) =$ $= 1 - e^{-0 \cdot R(P)} = 0$ | $F(P,l) = \left[1 - e^{-l \cdot R(P)}\right]$ $F(P,l) \in (0, 1)$ neklesající v $P$ ani v $l$ | $\lim\limits_{l \to \infty} F(P,l) =$ $= F(P, \infty) =$ $= 1 - e^{-\infty \cdot R(P)} = 1$ |
| $P \ge P_{\max}$ | $\lim\limits_{\substack{P \to P_{\max} \\ l \to 0}} F(P,l) =$ $= F(P_{\max}, 0) =$ $= 1 - e^{-0 \cdot \infty}$ neurč. výraz | $\lim\limits_{P \to P_{\max}} F(P,l) =$ $= F(P_{\max}, l) =$ $= 1 - e^{-l \cdot \infty} = 1$ | $\lim\limits_{\substack{P \to P_{\max} \\ l \to \infty}} F(P,l) =$ $= F(P_{\max}, \infty) =$ $= 1 - e^{-\infty \cdot \infty} = 1$ |

**Hustota pravděpodobnosti** $f(P,l)$ je derivací distribuční funkce. Z (5) nalezneme

$$f(P,l)=\frac{\partial F(P,l)}{\partial P}=\frac{l}{l_0}\left[1-F(P,l_0)\right]^{\frac{l}{l_0}-1}\frac{\mathrm{d}F(P,l_0)}{\mathrm{d}P}=\frac{l}{l_0}f(P,l_0)\left[1-F(P,l_0)\right]^{\frac{l}{l_0}-1} \quad (7)$$

nebo užitím (6)

$$f(P,l)=\frac{\partial F(P,l)}{\partial P}=l\frac{\mathrm{d}R(P)}{\mathrm{d}P}e^{-l\,R(P)} \quad (8)$$

## 1.2 Peirceova varianta nezávislých pevností.

**Gaussovo normální rozložení na upínací délce $l_0$.** Různí autoři zkoumali pevnost různých materiálů a podle svých zkušeností pak navrhovali různé tvary funkce $R(P)$. F.T. PEIRCE [4] vyšel z *předpokladu*, že **na jedné určité** (velmi krátké) **upínací délce** $l_0$ **má pevnost Gaussovo normální rozložení**. (Předpoklad tedy připouští i záporné hodnoty pevnosti; $P_{\min}\to-\infty$ a $P_{\max}\to\infty$. V tomto smyslu je jen aproximativní.)

Hustota pravděpodobnosti proměnná $u$ s **normovaným normálním rozložením** je

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (9)$$

a její distribuční funkce je

$$\Phi(u)=\int_{-\infty}^{u}\varphi(v)\,\mathrm{d}v=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{u/\sqrt{2}}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t \quad (10)$$

$$v=\sqrt{2}\,t;\quad \mathrm{d}v=\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$$

(Pro odlišení horní meze od integrační proměnné jsme přeznačili $u$ v integrované funkci na $v$. Obecný integrál tohoto typu se nazývá **Laplace-Gaussův**; nemá analytické řešení.)

Pevnost $P$ při upínací délce $l_0$ má dle předpokladu **obecné normální rozložení** se **střední hodnotou** $\overline{P}_0$ a **směrodatnou odchylkou** $\sigma_0$. Hustota pravděpodobnosti je dána vztahem

$$f(P,l_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\exp\left(-\frac{\left(P-\overline{P}_0\right)^2}{2\sigma_0^2}\right)=\frac{1}{\sigma_0}\varphi\left(\frac{P-\overline{P}_0}{\sigma_0}\right) \quad (11)$$

kde $\overline{P}_0$ a $\sigma_0$ jsou parametry. Distribuční funkce má tvar

$$F(P,l_0)=\int_{-\infty}^{P}f(Q,l_0)\mathrm{d}Q=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\int_{-\infty}^{P}\exp\left(-\frac{\left(Q-\overline{P}_0\right)^2}{2\sigma_0^2}\right)\mathrm{d}Q=$$

$$Q=\sigma_0 v+\overline{P}_0;\quad \mathrm{d}Q=\sigma_0\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{P-\overline{P}_0}{\sigma_0}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v=\Phi\left(\frac{P-\overline{P}_0}{\sigma_0}\right) \quad (12)$$

(Pro odlišení horní meze integrálu od integrační proměnné jsme $P$ v integrované funkci přeznačili na $Q$.)

**Rozložení pevností při obecné upínací délce.** Dosazením (12) do (3a) nalezneme pro rizikovou funkci výraz

$$R(P) = -\frac{1}{l_0}\ln\left[1 - F(P, l_0)\right] = -\frac{1}{l_0}\ln\left[1 - \Phi\left(\frac{P - \overline{P}_0}{\sigma_0}\right)\right] \tag{13}$$

Dosazením vztahu (12) do rovnice (5) získáme distribuční funkci

$$F(P, l) = 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{P - \overline{P}_0}{\sigma_0}\right)\right]^{\frac{l}{l_0}} \tag{14}$$

Hustotu pravděpodobnosti vyjádříme po dosazení (11) a (12) do (7) výrazem

$$f(P, l) = \frac{l}{l_0} f(P, l_0)\left[1 - F(P, l_0)\right]^{\frac{l}{l_0} - 1} = \frac{l}{l_0}\frac{1}{\sigma_0}\varphi\left(\frac{P - \overline{P}_0}{\sigma_0}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{P - \overline{P}_0}{\sigma_0}\right)\right]^{\frac{l}{l_0} - 1} \tag{15}$$

Tedy **pro $l \neq l_0$ rozložení pevností není Gaussovo**; Gaussovo rozložení pevností je pouze na délce $l = l_0$.

**Transformovaná pevnost *u*** je definována pro každou upínací délku *l* vztahem

$$u = \frac{P - \overline{P}_0}{\sigma_0} \qquad P = \sigma_0 u + \overline{P}_0 \qquad \mathrm{d}P = \sigma_0 \mathrm{d}u \qquad u \in (-\infty, \infty) \tag{16}$$

Distribuční funkce $G(u, l)$ rozložení transformovaných pevností vznikne dosazením (16) do (14).

$$G(u, l) = 1 - \left[1 - \Phi(u)\right]^{\frac{l}{l_0}} \tag{17}$$

Pro hustotu pravděpodobnosti $g(u, l)$ náhodné proměnné *u* musí platit $g(u, l)\,\mathrm{d}u = f(P, l)\,\mathrm{d}P$. Užitím (16) v (15) nalezneme

$$g(u, l)\,\mathrm{d}u = f(P, l)\,\mathrm{d}P = \frac{l}{l_0}\frac{1}{\sigma_0}\varphi\left(\frac{P - \overline{P}_0}{\sigma_0}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{P - \overline{P}_0}{\sigma_0}\right)\right]^{\frac{l}{l_0} - 1}\mathrm{d}P =$$

$$= \frac{l}{l_0}\frac{1}{\sigma_0}\varphi(u)\left[1 - \Phi(u)\right]^{\frac{l}{l_0} - 1}\sigma_0 \mathrm{d}u$$

$$g(u, l) = \frac{l}{l_0}\varphi(u)\left[1 - \Phi(u)\right]^{\frac{l}{l_0} - 1} \tag{18}$$

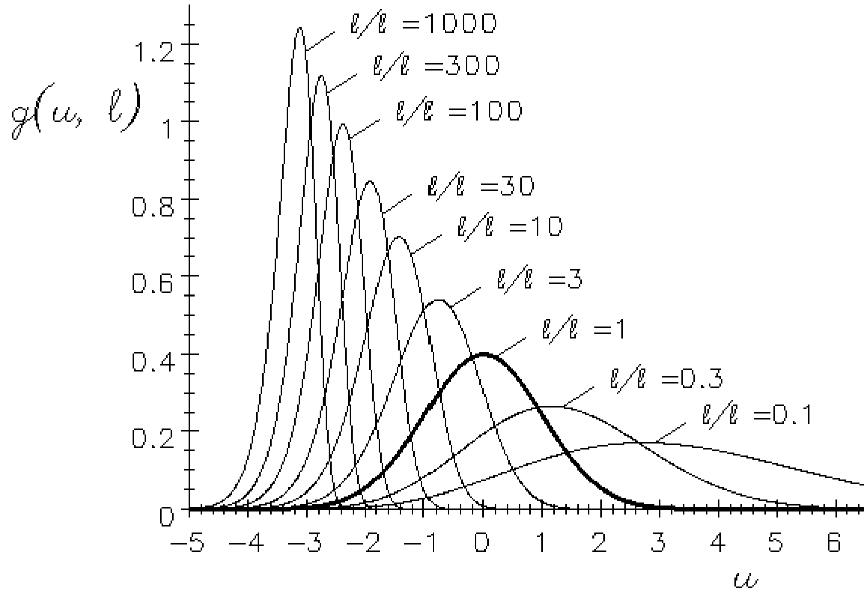
(Stejný výsledek nalezneme též derivováním funkce (17) podle *u*.)

Po dosazení (9) a (10) do (18) lze též psát

$$g(u, l) = \frac{l}{l_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v\right]^{\frac{l}{l_0} - 1} \tag{18a}$$

Pro vlastní výpočet této funkce je nutno zvolit nějakou numerickou metodu; výraz (18a) totiž obsahuje Laplace-Gaussův integrál, který nemá analytické řešení.

Je výhodné, že **rozložení transformovaných pevností *u*, popsané hustotou pravděpodobnosti $g(u, l)$, nezávisí na parametrech $\overline{P}_0$ a $\sigma_0$**, ale jen na parametru $l_0$ a na upínací délce *l*. (Je-li $l = l_0$, je $G(u, l_0) = \Phi(u)$, $g(u, l_0) = \varphi(u)$ a rozložení transformované pevnosti *u* je normované normální. Je-li $l \neq l_0$, rozložení normální není.)




obr. 2

Průběh hustoty pravděpodobnosti $g(u,l)$ dle rovnice (18) resp. (18a) charakterizují křivky na obr. 2.

**Statistické charakteristiky.** Obvyklými charakteristikami rozložení jsou obecné a centrální momenty. $m$-tý **obecný moment transformované pevnosti** $u$ je

$$\overline{u^m} = \int_{-\infty}^{\infty} u^m g(u,l)\,\mathrm{d}u \tag{19}$$

Po dosazení (18a) do (19) vznikne tvar vhodný pro numerický výpočet..

$$\overline{u^m} = \int_{-\infty}^{\infty} u^m \,\frac{l}{l_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\left[1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v\right]^{\frac{l}{l_0}-1}\mathrm{d}u \tag{19a}$$

Obecný moment pro $m = 1$ je **střední hodnota** $\bar{u}$ **transformované pevnosti** $u$.

$$\bar{u} = \overline{u^1} = \int_{-\infty}^{\infty} u\; g(u,l)\,\mathrm{d}u \tag{20}$$

$m$-tý **obecný moment pevnosti** $P$ je

$$\overline{P^m} = \int_{-\infty}^{\infty} P^m f(P,l)\,\mathrm{d}P \tag{21}$$

Lze jej upravit dosazením rovnice (15), integrální substitucí (16) a užitím rovnic (18) a (19).*)

$$\overline{P^m} = \int_{-\infty}^{\infty} P^m f(P,l)\,\mathrm{d}P = \int_{-\infty}^{\infty} P^m \frac{l}{l_0}\frac{1}{\sigma_0}\varphi\left(\frac{P-\bar{P}_0}{\sigma_0}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{P-\bar{P}_0}{\sigma_0}\right)\right]^{\frac{l}{l_0}-1}\mathrm{d}P =$$

$$P = \sigma_0 u + \bar{P}_0 \qquad \mathrm{d}P = \sigma_0 \mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_0 u + \bar{P}_0\right)^m \frac{l}{l_0}\varphi(u)\left[1-\Phi(u)\right]^{\frac{l}{l_0}-1}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_0 u + \bar{P}_0\right)^m g(u,l)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{m}\left[\binom{m}{i}\sigma_0^{m-i}u^{m-i}\bar{P}_0^{i}\right]g(u,l)\right\}\mathrm{d}u =$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\left[\binom{m}{i}\sigma_0^{m-i}\bar{P}_0^{i}\int_{-\infty}^{\infty}u^{m-i}g(u,l)\,\mathrm{d}u\right] = \sum_{i=0}^{m}\left[\binom{m}{i}\sigma_0^{m-i}\bar{P}_0^{i}\;\overline{u^{m-i}}\right] \tag{22}$$

*) Při úpravě se užívá také vzorec $\left(a \pm b\right)^m = \sum_{i=0}^{m}(\pm 1)^i \binom{m}{i} a^{m-i} b^i$, kde pro $m = 0, 1, 2, \ldots$ platí $\binom{m}{0} = 1$.

Odtud pro $m = 1, 2, 3, 4$ platí

$$\overline{P^1} = \overline{P} = \sum_{i=0}^{1}\left[\binom{1}{i}\sigma_0^{1-i}\overline{P}_0^{\,i}\ \overline{u^{1-i}}\right] = \sigma_0\overline{u} + \overline{P}_0 \text{ K } \textbf{střední hodnota pevnosti} \tag{22a}$$

$$\overline{P^2} = \sum_{i=0}^{2}\left[\binom{2}{i}\sigma_0^{2-i}\overline{P}_0^{\,i}\ \overline{u^{2-i}}\right] = \sigma_0^2\overline{u^2} + 2\sigma_0\overline{P}_0\ \overline{u} + \overline{P}_0^{\,2} \tag{22b}$$

$$\overline{P^3} = \sum_{i=0}^{3}\left[\binom{3}{i}\sigma_0^{3-i}\overline{P}_0^{\,i}\ \overline{u^{3-i}}\right] = \sigma_0^3\overline{u^3} + 3\sigma_0^2\overline{P}_0\ \overline{u^2} + 3\sigma_0\overline{P}_0^{\,2}\ \overline{u} + \overline{P}_0^{\,3} \tag{22c}$$

$$\overline{P^4} = \sum_{i=0}^{4}\left[\binom{4}{i}\sigma_0^{4-i}\overline{P}_0^{\,i}\ \overline{u^{4-i}}\right] = \sigma_0^4\overline{u^4} + 4\sigma_0^3\overline{P}_0\ \overline{u^3} + 6\sigma_0^2\overline{P}_0^{\,2}\ \overline{u^2} + 4\sigma_0\overline{P}_0^{\,3}\ \overline{u} + \overline{P}_0^{\,4} \tag{22d}$$

(Prvý obecný moment je **střední hodnota pevnosti**, značená $\overline{P}$.)

$m$-tý **centrální moment transformované pevnosti** $u$ je vyjádřen vztahem

$$\overline{(u-\overline{u})^m} = E\left\{(u-\overline{u})^m\right\} = E\left\{\sum_{j=0}^{m}\left[(-1)^j\binom{m}{j}u^{m-j}\ \overline{u}^{\,j}\right]\right\} = \sum_{j=0}^{m}\left[(-1)^j\binom{m}{j}\overline{u^{m-j}}\ \overline{u}^{\,j}\right] \tag{23}$$

($E$ je operátorem střední hodnoty.) Pro $m = 2, 3, 4$ odtud plyne

$$\overline{(u-\overline{u})^2} = \sigma_u^2 = \sum_{j=0}^{2}\left[(-1)^j\binom{2}{j}\overline{u^{2-j}}\ \overline{u}^{\,j}\right] = \overline{u^2} - 2\overline{u}^2 + \overline{u}^2 = \overline{u^2} - \overline{u}^2 \tag{23a}$$

K **rozptyl transformované pevnosti**

$$\overline{(u-\overline{u})^3} = \sum_{j=0}^{3}\left[(-1)^j\binom{3}{j}\overline{u^{3-j}}\ \overline{u}^{\,j}\right] = \overline{u^3} - 3\overline{u^2}\,\overline{u} + 3\overline{u}^3 - \overline{u}^3 = \overline{u^3} - 3\overline{u^2}\,\overline{u} + 2\overline{u}^3 \tag{23b}$$

$$\overline{(u-\overline{u})^4} = \sum_{j=0}^{4}\left[(-1)^j\binom{4}{j}\overline{u^{4-j}}\ \overline{u}^{\,j}\right] = \overline{u^4} - 4\overline{u^3}\,\overline{u} + 6\overline{u^2}\,\overline{u}^2 - 4\overline{u}^4 + \overline{u}^4 =$$

$$= \overline{u^4} - 4\overline{u^3}\,\overline{u} + 6\overline{u^2}\,\overline{u}^2 - 3\overline{u}^4 \tag{23c}$$

(**Rozptyl transformované pevnosti** $u$ jsme označili $\sigma_u^2$; veličina $\sigma_u = \sqrt{\sigma_u^2}$ je pak **směrodatná odchylka transformované pevnosti** $u$.)

Pro $m$-tý **centrální moment pevnosti** $P$ platí použitím výrazů (16), (22a) a (23)

$$\overline{(P-\overline{P})^m} = E\left\{(P-\overline{P})^m\right\} = E\left\{\left[(\sigma_0 u + \overline{P}_0) - (\sigma_0\overline{u} + \overline{P}_0)\right]^m\right\} =$$

$$= E\left\{\left[\sigma_0 u - \sigma_0\overline{u}\right]^m\right\} = \sigma_0^m\ E\left\{(u-\overline{u})^m\right\} = \sigma_0^m\ \overline{(u-\overline{u})^m} \tag{24}$$

Pro $m = 2, 3, 4$ pak užitím (23a) až (23c) v (24) nalezneme

$$\overline{(P-\overline{P})^2} = \sigma_P^2 = \sigma_0^2\overline{(u-\overline{u})^2} = \sigma_0^2\left(\overline{u^2} - \overline{u}^2\right) = \sigma_0^2\,\sigma_u^2 \text{ K } \textbf{rozptyl pevnosti} \tag{24a}$$

$$\overline{(P-\overline{P})^3} = \sigma_0^3\overline{(u-\overline{u})^3} = \sigma_0^3\left(\overline{u^3} - 3\overline{u^2}\,\overline{u} + 2\overline{u}^3\right) \tag{24b}$$

$$\overline{(P-\overline{P})^4} = \sigma_0^4\overline{(u-\overline{u})^4} = \sigma_0^4\left(\overline{u^4} - 4\overline{u^3}\,\overline{u} + 6\overline{u^2}\,\overline{u}^2 - 3\overline{u}^4\right) \tag{24c}$$

(**Rozptyl pevnosti** $P$ jsme označili $\sigma_P^2$; veličina $\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$ je **směrodatná odchylka pevnosti** $P$.)

Je zřejmé, že obecné i centrální momenty pevnosti $P$, stejně jako centrální momenty transformované pevnosti $u$, lze vyjádřit jako funkce obecných momentů $\overline{u^m}$, které nezávisí na parametrech $\overline{P}_0$ a $\sigma_0$.

Průběh hustoty pravděpodobnosti bývá charakterizován také poměry mocnin některých momentů. Nejčastěji se vyjadřuje **variační koeficient**. Zavádíme

$$v_0 = \frac{\sigma_0}{\overline{P}_0} \text{L} \ \textbf{var. koef. pevnosti při } l = l_0 \ (v_0 \text{K} \ \textbf{parametr}) \tag{25}$$

$$v_u = \frac{\sigma_u}{\overline{u}} \text{L} \ \textbf{var. koef. transformované pevnos} \tag{26}$$

$$v_P = \frac{\sigma_P}{\overline{P}} \text{L} \ \textbf{var. koef. pevnosti} \tag{27}$$

(V praxi bývají variační koeficienty ještě násobeny 100 a udávají se v %. V teoretických pracích jsou častěji zaváděny jako prostý poměr.) Užitím (24a), (22a) a (25) v (27) lze odvodit vztah

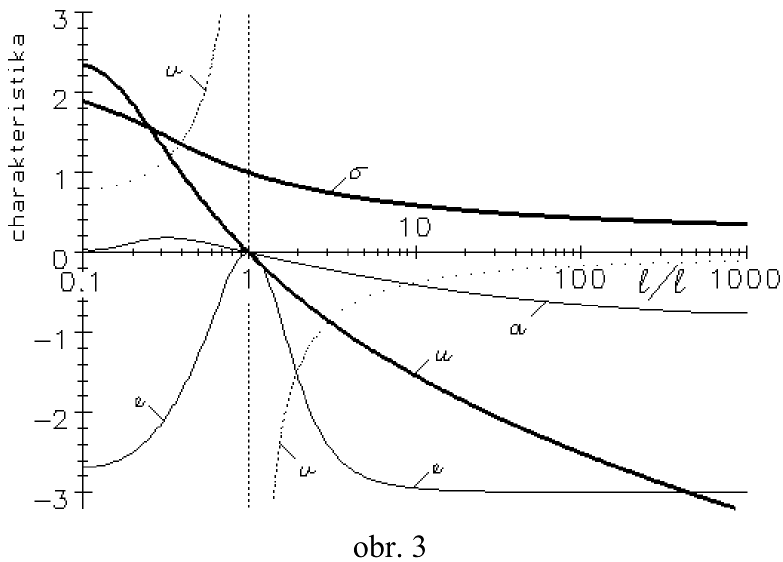
$$v_P = \frac{\sigma_P}{\overline{P}} = \frac{\sigma_0 \sigma_u}{\sigma_0 \overline{u} + \overline{P}_0} = \frac{\sigma_0 \dfrac{\sigma_u}{\overline{u}}}{\sigma_0 + \dfrac{\overline{P}_0}{\overline{u}}} = \frac{\dfrac{\sigma_u}{\overline{u}}}{1 + \dfrac{\overline{P}_0}{\sigma_0 \overline{u}}} = \frac{v_u}{1 + \dfrac{1}{v_0 \overline{u}}} \tag{28}$$

Dále zavedeme **koeficient šikmosti** (asymetrie) $a$ a **koeficient špičatosti** $e$. (Gaussovo normální rozložení má $a = e = 0$. U jiných rozložení, je-li $a > 0$, je hustota pravděpodobnosti "protáhlejší" vpravo, je-li $a < 0$ je "protáhlejší" vlevo. Je-li $e > 0$ je rozložení "méně špičaté", je-li $e < 0$ je "špičatější" než rozložení normální.) Při užití (24a) až (24c) platí

$$a = \frac{\overline{\left(P - \overline{P}\right)^3}}{\left[\overline{\left(P - \overline{P}\right)^2}\right]^{3/2}} = \frac{\overline{\left(P - \overline{P}\right)^3}}{\sigma_P^3} = \frac{\sigma_0^3 \left(\overline{u^3} - 3\overline{u^2}\,\overline{u} + 2\overline{u}^3\right)}{\sigma_0^3 \left(\overline{u^2} - \overline{u}^2\right)^{3/2}} = \frac{\overline{u^3} - 3\overline{u^2}\,\overline{u} + 2\overline{u}^3}{\left(\overline{u^2} - \overline{u}^2\right)^{3/2}} \tag{29}$$

$$e = \frac{\overline{\left(P - \overline{P}\right)^4}}{\left[\overline{\left(P - \overline{P}\right)^2}\right]^{2}} - 3 = \frac{\overline{\left(P - \overline{P}\right)^4}}{\sigma_P^4} - 3 = \frac{\sigma_0^4 \left(\overline{u^4} - 4\overline{u^3}\,\overline{u} + 6\overline{u^2}\,\overline{u}^2 - 3\overline{u}^4\right)}{\sigma_0^4 \left(\overline{u^2} - \overline{u}^2\right)^{2}} - 3 =$$

$$= \frac{\overline{u^4} - 4\overline{u^3}\,\overline{u} + 6\overline{u^2}\,\overline{u}^2 - 3\overline{u}^4}{\left(\overline{u^2} - \overline{u}^2\right)^{2}} - 3 \tag{30}$$




obr. 3

Protože $a$ a $e$ jsou funkcemi jen obecných momentů $\overline{u^m}$, nezávisí na parametrech $\overline{P}_0$ a $\sigma_0$.

Závislost statistických charakteristik na upínací délce ilustrují grafy na obr. 3.

Číselné hodnoty statistických charakteristik uvádí následující tabulka.

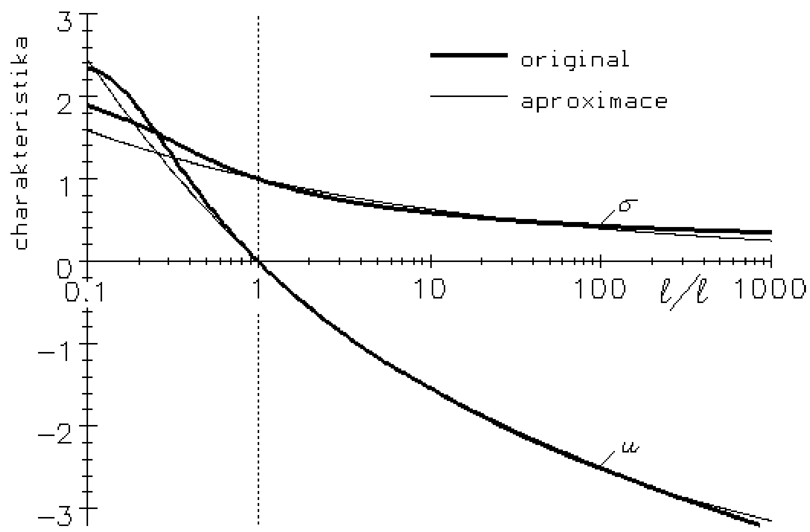
| Centrální momenty $\overline{u^1}$ až $\overline{u^4}$ vypočteny numerickou integrací z (19a) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Veličina: | $\bar{u}$ | $\sigma_u$ | $v_u$ | $a$ | $e$ |
| Výpočet: | $\bar{u} = \overline{u^1}$ | rov. (23a) | rov. (26) | rov. (29) | rov. (30) |
| Význam: / $l/l_0$ | z rov. (22a) $\bar{u} = \dfrac{\bar{P} - \bar{P}_0}{\sigma_0}$ | z rov. (24a) $\sigma_u = \dfrac{\sigma_P}{\sigma_0}$ | z rov. (28) $v_u = v_P\left(1 + \dfrac{1}{v_0 \bar{u}}\right)$ | - | - |
| 0.1 | 2.338 | 1.894 | 0.810 | 0.037 | -2.690 |
| 0.2 | 1.849 | 1.654 | 0.895 | 0.117 | -2.497 |
| 0.3 | 1.334 | 1.480 | 1.110 | 0.179 | -2.138 |
| 0.5 | 0.704 | 1.247 | 1.772 | 0.135 | -1.289 |
| 0.7 | 0.342 | 1.117 | 3.268 | 0.071 | -0.504 |
| **1.0** | **0.000** | **1.000** | $\pm\infty$ | **0.000** | **0.000** |
| 2.0 | -0.564 | 0.826 | -1.463 | -0.137 | -1.577 |
| 3.0 | -0.846 | 0.748 | -0.884 | -0.213 | -2.401 |
| 5.0 | -1.163 | 0.669 | -0.575 | -0.303 | -2.802 |
| 7.0 | -1.352 | 0.626 | -0.463 | -0.357 | -2.898 |
| 10.0 | -1.539 | 0.587 | -0.381 | -0.410 | -2.946 |
| 20.0 | -1.867 | 0.525 | -0.281 | -0.501 | -2.981 |
| 30.0 | -2.043 | 0.496 | -0.243 | -0.546 | -2.989 |
| 50.0 | -2.249 | 0.464 | -0.207 | -0.597 | -2.994 |
| 70.0 | -2.377 | 0.447 | -0.188 | -0.627 | -2.996 |
| 100.0 | -2.508 | 0.429 | -0.171 | -0.655 | -2.997 |
| 200.0 | -2.746 | 0.401 | -0.146 | -0.703 | -2.998 |
| 300.0 | -2.878 | 0.387 | -0.134 | -0.726 | -2.999 |
| 500.0 | -3.037 | 0.370 | -0.122 | -0.751 | -2.999 |
| 700.0 | -3.138 | 0.361 | -0.115 | -0.762 | -2.999 |
| 1000.0 | -3.241 | 0.352 | -0.109 | -0.766 | -2.999 |

S užitím této tabulky lze při znalosti parametrů $l_0$, $\bar{P}_{0,}$ $\sigma_0$ určit statistické charakteristiky rozložení pevnosti $P$ na libovolné upínací délce $l$.

**Aproximační vztahy.** Numerické výpočty bývají nepraktické. F.T. PEIRCE [4] proto navrhnul **aproximační vztahy** pro výpočet **střední hodnoty** a **směrodatné odchylky**.

$$\sigma_u = \frac{\sigma_P}{\sigma_0} \cong \left(\frac{l}{l_0}\right)^{-1/5} \tag{31}$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{P} - \bar{P}_0}{\sigma_0} \cong 4{,}2(\sigma_u - 1) \cong 4{,}2\left[\left(\frac{l}{l_0}\right)^{-1/5} - 1\right] \tag{32}$$




obr. 4

Porovnání $\sigma_u$ a $\overline{u}$ dle (23a) a (20) s aproximačními výrazy (31) a (32) je na obr. 4. Pro $l \geq l_0$ je shoda zřejmá.

Zaveďme parametry

$$\left.\begin{aligned} A &= \overline{P}_0 - 4{,}2\sigma_0 \\ B &= \sigma_0 l_0^{1/5} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

(Známou střední hodnotu, směrodatnou odchylku a upínací délku užijeme jako $\overline{P}_0, \sigma_0, l_0$.)

Z rovnic (31), (32) a (33) nalezneme pro praktický výpočet vztahy

$$\sigma_P \cong \sigma_0 \left(\frac{l}{l_0}\right)^{-1/5} = \sigma_0 l_0^{1/5} l^{-1/5} = B\,l^{-1/5} \qquad (34)$$

$$\overline{P} \cong \overline{P}_0 + 4{,}2\sigma_0 \left[\left(\frac{l}{l_0}\right)^{-1/5} - 1\right] =$$

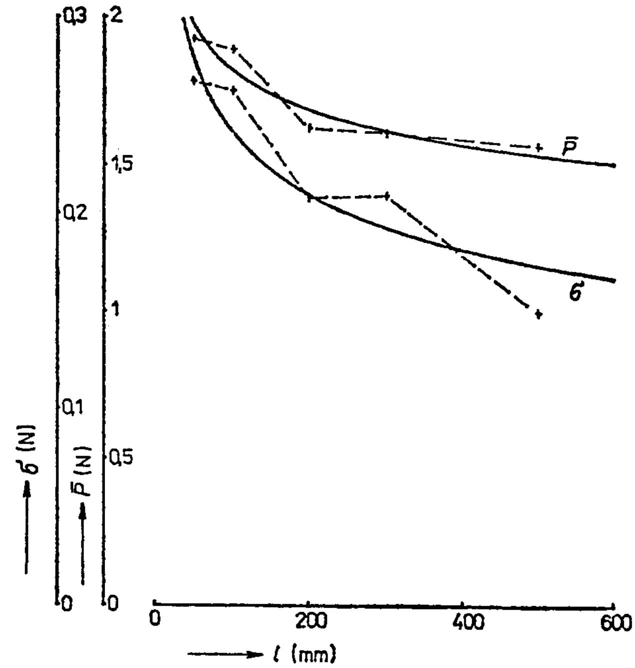
$$= \left(\overline{P}_0 - 4{,}2\sigma_0\right) + 4{,}2\sigma_0 l_0^{1/5} l^{-1/5} = A + 4{,}2B\,l^{-1/5} = A + 4{,}2\sigma_P \qquad (35)$$

Užitím (25) v (33) můžeme vyjádřit parametry *A*, *B* též ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} A &= \overline{P}_0 - 4{,}2\sigma_0 = \overline{P}_0 - 4{,}2v_0\overline{P}_0 = \overline{P}_0\left(1 - 4{,}2v_0\right) \\ B &= \sigma_0 l_0^{1/5} = v_0 \overline{P}_0 l_0^{1/5} \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Variační koeficient pevnosti je pak dle (27) při použití (34) a (35) určen rovnicí

$$v_P = \frac{\sigma_P}{\overline{P}} \cong \frac{B\,l^{-1/5}}{A + 4{,}2B\,l^{-1/5}} = \frac{1}{\frac{A}{B}l^{1/5} + 4{,}2} \qquad (37)$$




obr. 5

**Příklad.** Popsaný model je možno ověřovat u vláken i u jiných typů délkových textilií. (F.T. PEIRCE [4] původně odvodil základní vztahy pro příze.) Experimentální výsledky, nalezené u jedné viskózové příze bavlnářského typu (rotorová typu BD 200, jemnost 19,2tex, zákrut $784\text{m}^{-1}$, z vláken 0,162tex, 39,2mm) jsou na obr. 5 porovnány s vypočtenými křivkami (parametr $A = 0{,}606\text{Nmm}^{-1/5}$, parametr $B = 0{,}806\text{N}$).

## 1.3 Nezávislé pevnosti s Weibullovým rozložením.

**Modelový předpoklad.** Jiný typ modelu nezávislých pravděpodobností přetrhu vychází z *empirického předpokladu*, že **riziková funkce** $R(P)$ **má tvar**

$$R(P)=\left(\frac{P-P_{\min}}{Q}\right)^{c} \qquad \begin{array}{l} P\in\langle P_{\min},\infty) \\ P_{\min}\geq 0,\quad Q\geq 0,\quad c\neq 0 \quad \text{K parametry} \end{array} \tag{38}$$

Její derivace je

$$\frac{\mathrm{d}\,R(P)}{\mathrm{d}P}=\frac{c}{Q}\left(\frac{P-P_{\min}}{Q}\right)^{c-1} \tag{39}$$

Pro další úpravy je vhodné vyjádřit též **parametr upínací délky** $q$ ve tvaru

$$q=\frac{Q}{l^{1/c}} \tag{40}$$

**Rozložení pevnosti.** Při obecné upínací délce $l$ je **distribuční funkce rozložení pevnosti** $P$ dle (6) za užití (38) a (40) vyjádřena tvarem

$$F(P,l)=1-e^{-l\,R(P)}=1-\exp\left[-l\left(\frac{P-P_{\min}}{Q}\right)^{c}\right]=1-\exp\left[-\left(\frac{P-P_{\min}}{q}\right)^{c}\right] \tag{41}$$

a **hustota pravděpodobnosti rozložení pevnosti** je dle (8) za užití (38) až (40)

$$f(P,l)=l\frac{c}{Q}\left(\frac{P-P_{\min}}{Q}\right)^{c-1}\exp\left[-l\left(\frac{P-P_{\min}}{Q}\right)^{c}\right]=$$

$$=\frac{c}{q}\left(\frac{P-P_{\min}}{q}\right)^{c-1}\exp\left[-\left(\frac{P-P_{\min}}{q}\right)^{c}\right] \tag{42}$$

Rozložení náhodné proměnné $P$, které je popsané rovnicemi (41) či (42) závisí na 3 parametrech (zde značených $c$, $P_{\min}$, $q$). Je to tzv. **Weibullovo rozložení**.

**Transformovaná proměnná.** Zaveďme dále **transformovanou proměnnou** $u$.

$$\left.\begin{array}{ll} u=\left(\dfrac{P-P_{\min}}{q}\right)^{c} & u\in\langle 0,\infty) \\ P=q\,u^{1/c}+P_{\min} & \mathrm{d}P=\dfrac{q}{c}\,u^{\left(\frac{1}{c}-1\right)}\mathrm{d}u \end{array}\right\} \tag{43}$$

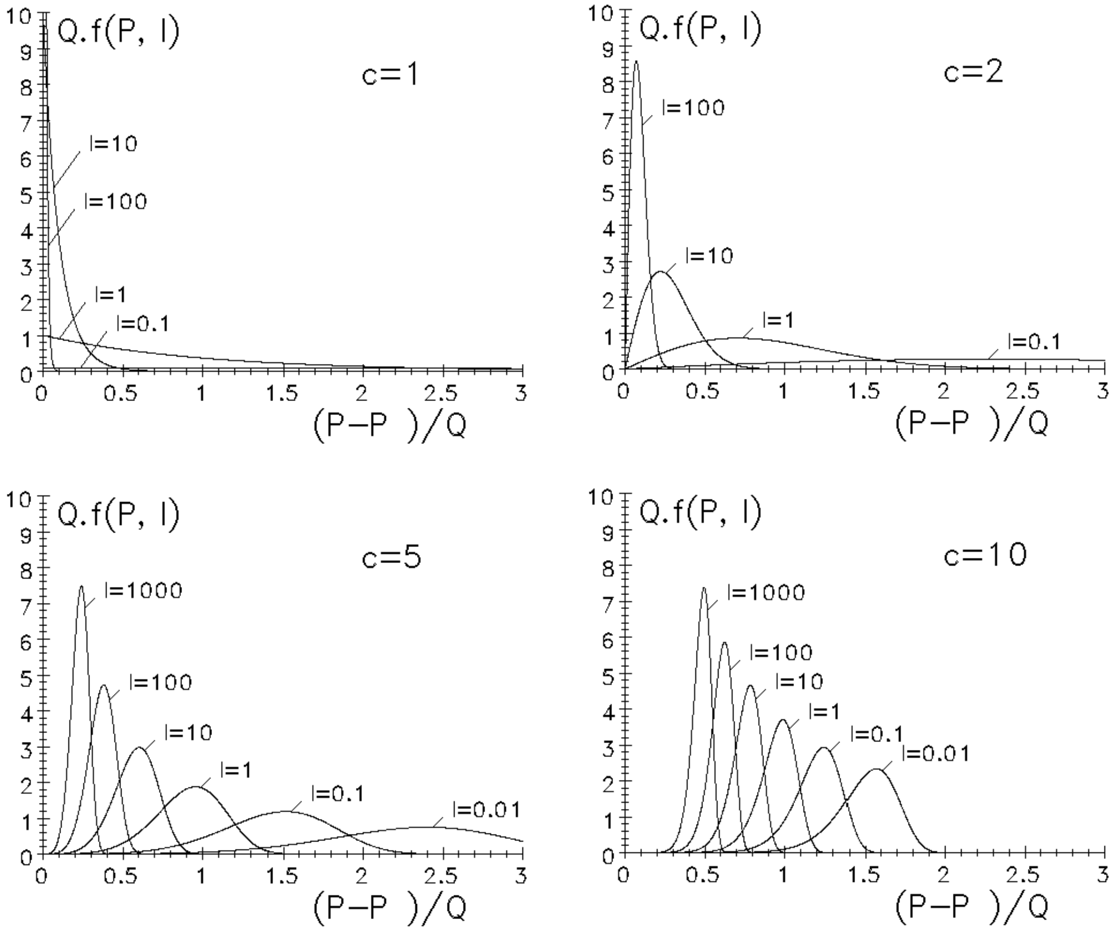
Pro **hustotu pravděpodobnosti** $\psi(u)$ této veličiny musí platit $\psi(u)\mathrm{d}u=f(P,l)\mathrm{d}P$, takže

$$\psi(u)\mathrm{d}u=f(P,l)\mathrm{d}P=\frac{c}{q}\left(\frac{P-P_{\min}}{q}\right)^{c-1}e^{-\left(\frac{P-P_{\min}}{q}\right)^{c}}\mathrm{d}P=\frac{c}{q}u^{\left(\frac{c-1}{c}\right)}e^{-u}\frac{q}{c}u^{\left(\frac{1}{c}-1\right)}\mathrm{d}u$$

$$\psi(u)=e^{-u} \tag{44}$$

Proměnná $u$ má tedy **exponenciální rozložení** se střední hodnotou i rozptylem rovnými 1. (Je-li $c=1$, $P_{\min}=0$ a $q=1$, potom je $u=P$ a rozložení $F(P,l)\equiv\psi(u)$.)

Příklady charakteristických průběhů funkcí hustoty pravděpodobnosti dle rovnice (42) jsou znázorněny na obr. 6.




obr. 6

(Poznamenejme, že při $c = 1$ je rozložení exponenciální a hustota pravděpodobnosti je v celém rozsahu klesající.)

**Statistické charakteristiky.** Obvyklými charakteristikami rozložení jsou obecné a centrální momenty. **Obecné momenty transformované pevnosti** lze užitím (44) vyjádřit tvarem

$$\overline{u^x} = \int_0^\infty u^x \psi(u)\mathrm{d}u = \int_0^\infty u^x e^{-u}\mathrm{d}u = \Gamma(x+1) \qquad x \in \langle 0, \infty) \tag{45}$$

a pro $x > 0$ též tvarem

$$\overline{u^x} = x\Gamma(x) \qquad x \in (0, \infty) \tag{45a}$$

(V matematice popsaná **funkce gama** $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\mathrm{d}u$ je jednou z vyšších transcendentních funkcí. Nemá analytický tvar, její výpočet se provádí numericky. Pro celá nezáporná $n$ však platí $\Gamma(n+1) = n!$ a pro $x > 0$ platí též $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.)

Obecné momenty jsou definovány pro $x = 0, 1, \ldots$ . Rovnice (45) a (45a) však platí i pro ostatní reálná nezáporná $x$.

**Obecné momenty pevnosti** *P* lze vyjádřit užitím (42), substitucí (43) a úpravou dle (45)[*)]

$$\overline{P^m} = \int_{P_{\min}}^{\infty} P^m f(P,l)\,\mathrm{d}P = \int_{P_{\min}}^{\infty} P^m \frac{c}{q}\left(\frac{P-P_{\min}}{q}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{P-P_{\min}}{q}\right)^c}\,\mathrm{d}P =$$

$$u = \left(\frac{P-P_{\min}}{q}\right)^c, \quad P = q\,u^{1/c} + P_{\min}, \quad \mathrm{d}P = \frac{q}{c}\,u^{\left(\frac{1}{c}-1\right)}\mathrm{d}u$$

$$= \int_{P_{\min}}^{\infty} \left(q\,u^{1/c} + P_{\min}\right)^m \frac{c}{q} u^{\left(\frac{c-1}{c}\right)} e^{-u}\, \frac{q}{c}\, u^{\left(\frac{1}{c}-1\right)}\mathrm{d}u = \int_{P_{\min}}^{\infty}\left(q\,u^{1/c} + P_{\min}\right)^m e^{-u}\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{P_{\min}}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} q^{m-i} P_{\min}^i u^{\left(\frac{m-i}{c}\right)}\right] e^{-u}\mathrm{d}u = \sum_{i=0}^{m}\left[\binom{m}{i} q^{m-i} P_{\min}^i \int_{P_{\min}}^{\infty} u^{\left(\frac{m-i}{c}\right)} e^{-u}\mathrm{d}u\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\left[\binom{m}{i} q^{m-i} P_{\min}^i\, \overline{u^{\left(\frac{m-i}{c}\right)}}\right] = \sum_{i=0}^{m}\left[\binom{m}{i} q^{m-i} P_{\min}^i\, \Gamma\left(\frac{m-i}{c}+1\right)\right] \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{46}$$

Pro $m = 1, 2, 3, 4$ z předchozího výrazu konkrétně najdeme

$$\overline{P^1} = \overline{P} = q\,\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right) + P_{\min}\Gamma(1) = \frac{q}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + P_{\min} \quad \ldots \ \textbf{střední pevnost} \tag{46a}$$

$$\overline{P^2} = q^2\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right) + 2qP_{\min}\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right) + \Gamma(1)P_{\min}^2 = \frac{2q^2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) + \frac{2qP_{\min}}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + P_{\min}^2 \tag{46b}$$

$$\overline{P^3} = q^3\Gamma\left(\frac{3}{c}+1\right) + 3q^2P_{\min}\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right) + 3qP_{\min}^2\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right) + \Gamma(1)P_{\min}^3 =$$

$$= \frac{3q^3}{c}\Gamma\left(\frac{3}{c}\right) + \frac{6q^2P_{\min}}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) + \frac{3qP_{\min}^2}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + P_{\min}^3 \tag{46c}$$

$$\overline{P^4} = q^4\Gamma\left(\frac{4}{c}+1\right) + 4q^3P_{\min}\Gamma\left(\frac{3}{c}+1\right) +$$

$$+ 6q^2P_{\min}^2\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right) + 4qP_{\min}^3\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right) + \Gamma(1)P_{\min}^4 =$$

$$= \frac{4q^4}{c}\Gamma\left(\frac{4}{c}\right) + \frac{12q^3P_{\min}}{c}\Gamma\left(\frac{3}{c}\right) + \frac{12q^2P_{\min}^2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) + \frac{4qP_{\min}^3}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + P_{\min}^4 \tag{46d}$$

(První obecný moment je **střední hodnotou pevnosti** *P*, označenou též zvláštním symbolem $\overline{P}$.)

Lze vyjádřit také **centrální momenty pevnosti** *P*. Za užití operátoru střední hodnoty *E* a vztahů (43) a (46) můžeme psát

$$\overline{\left(P-\overline{P}\right)^m} = E\left\{\left(P-\overline{P}\right)^m\right\} = E\left\{\left[\left(qu^{1/c} + P_{\min}\right) - \left(q\overline{u^{1/c}} + P_{\min}\right)\right]^m\right\} = E\left\{\left[qu^{1/c} - q\overline{u^{1/c}}\right]^m\right\} =$$

$$= q^m E\left\{\left(u^{1/c} - \overline{u^{1/c}}\right)^m\right\} = q^m E\left\{\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}u^{(m-j)/c}\left(\overline{u^{1/c}}\right)^j\right\}$$

---

[*)] Při úpravě se užívá také vzorec $\left(a \pm b\right)^m = \sum_{i=0}^{m}(\pm 1)^i\binom{m}{i}a^{m-i}b^i$, kde pro $m = 0, 1, 2, \ldots$ platí $\binom{m}{0} = 1$.

$$\overline{\left(P-\overline{P}\right)^m} = q^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \overline{u^{(m-j)/c}} \left(\overline{u^{1/c}}\right)^j = q^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \Gamma\left(\frac{m-j}{c}+1\right) \Gamma^j\left(\frac{1}{c}+1\right) =$$
$$= q^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \Gamma\left(\frac{m-j+c}{c}\right) \Gamma^j\left(\frac{1+c}{c}\right) \tag{47}$$

Pro $m = 2, 3, 4$ nalezneme z předchozího vztahu

$$\overline{\left(P-\overline{P}\right)^2} = \sigma_P^2 = q^2 \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{2}{j} \Gamma\left(\frac{2-j+c}{c}\right) \Gamma^j\left(\frac{1+c}{c}\right) =$$
$$= q^2 \left[ \Gamma\left(\frac{2+c}{c}\right) \Gamma^0\left(\frac{1+c}{c}\right) - 2\Gamma\left(\frac{1+c}{c}\right) \Gamma^1\left(\frac{1+c}{c}\right) + \Gamma(1) \Gamma^2\left(\frac{1+c}{c}\right) \right] =$$
$$= q^2 \left[ \Gamma\left(\frac{2+c}{c}\right) - 2\Gamma^2\left(\frac{1+c}{c}\right) + \Gamma^2\left(\frac{1+c}{c}\right) \right] =$$
$$= q^2 \left[ \frac{2}{c} \Gamma\left(\frac{2}{c}\right) - \frac{1}{c^2} \Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right) \right] \quad \text{L} \quad \textbf{rozptyl pevnosti} \tag{47a}$$

$$\overline{\left(P-\overline{P}\right)^3} = q^3 \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \binom{3}{j} \Gamma\left(\frac{3-j+c}{c}\right) \Gamma^j\left(\frac{1+c}{c}\right) =$$
$$= q^3 \left[ \Gamma\left(\frac{3+c}{c}\right) \Gamma^0\left(\frac{1+c}{c}\right) - 3\Gamma\left(\frac{2+c}{c}\right) \Gamma^1\left(\frac{1+c}{c}\right) + \right.$$
$$\left. + 3\Gamma\left(\frac{1+c}{c}\right) \Gamma^2\left(\frac{1+c}{c}\right) - \Gamma(1) \Gamma^3\left(\frac{1+c}{c}\right) \right] =$$
$$= q^3 \left[ \frac{3}{c} \Gamma\left(\frac{3}{c}\right) - \frac{6}{c^2} \Gamma\left(\frac{2}{c}\right) \Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{2}{c^3} \Gamma^3\left(\frac{1}{c}\right) \right] \tag{47b}$$

$$\overline{\left(P-\overline{P}\right)^4} = q^4 \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \binom{4}{j} \Gamma\left(\frac{4-j+c}{c}\right) \Gamma^j\left(\frac{1+c}{c}\right) =$$
$$= q^4 \left[ \Gamma\left(\frac{4+c}{c}\right) \Gamma^0\left(\frac{1+c}{c}\right) - 4\Gamma\left(\frac{3+c}{c}\right) \Gamma^1\left(\frac{1+c}{c}\right) + \right.$$
$$\left. + 6\Gamma\left(\frac{2+c}{c}\right) \Gamma^2\left(\frac{1+c}{c}\right) - 4\Gamma\left(\frac{1+c}{c}\right) \Gamma^3\left(\frac{1+c}{c}\right) + \Gamma(1) \Gamma^4\left(\frac{1+c}{c}\right) \right] =$$
$$= q^4 \left[ \frac{4}{c} \Gamma\left(\frac{4}{c}\right) - \frac{12}{c^2} \Gamma\left(\frac{3}{c}\right) \Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{12}{c^3} \Gamma\left(\frac{2}{c}\right) \Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right) - \frac{3}{c^4} \Gamma^4\left(\frac{1}{c}\right) \right] \tag{47c}$$

(Druhý centrální moment je **rozptylem** $\sigma_P^2$ a $\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$ je **směrodatnou odchylkou pevnosti**.)

Vztahy je vhodné dále upravit. Z rovnice (46a) za užití (40) postupně nalezneme

$$\frac{\overline{P} - P_{\min}}{q} = \frac{1}{c} \Gamma\left(\frac{1}{c}\right) \tag{48}$$

$$\overline{P} = P_{\min} + l^{-\frac{1}{c}} \frac{Q}{c} \Gamma\left(\frac{1}{c}\right) \tag{48a}$$

Podobně užitím (47a) za užití (40) postupně nalezneme

$$\frac{\sigma_P}{q} = \sqrt{\frac{2}{c} \Gamma\left(\frac{2}{c}\right) - \frac{1}{c^2} \Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)} \tag{49}$$

$$\sigma_P = l^{-\frac{1}{c}} Q \sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)} \tag{49a}$$

Průběh hustoty pravděpodobnosti bývá též charakterizován poměry mocnin některých momentů. Tak např. z (48) a (49) najdeme výraz

$$\frac{\sigma_P}{\overline{P} - P_{\min}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)}}{\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)} \tag{50}$$

Tento poměr závisí **pouze** na parametru $c$. Významově blízký je tzv. **variační koeficient pevnosti** $v_P = \sigma_P / \overline{P}$, který lze vyjádřit užitím (47a) a (46a) ve tvaru

$$v_P = \frac{\sigma_P}{\overline{P}} = \frac{q\sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)}}{\frac{q}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + P_{\min}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)}}{\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{P_{\min}}{q}} \tag{51}$$

(V praxi bývají variační koeficienty ještě násobeny 100 a udávají se v %.) Ze vztahu (51) je zřejmé, že variační koeficient **závisí na všech třech parametrech**, totiž $c$, $P_{\min}$, $q$.

Dále vyjádříme ještě koeficient **šikmosti** (asymetrie) $a$ a koeficient **špičatosti** $e$. Při užití vztahů (47a) až (47c) platí

$$a = \frac{\overline{\left(P - \overline{P}\right)^3}}{\left[\overline{\left(P - \overline{P}\right)^2}\right]^{3/2}} = \frac{\overline{\left(P - \overline{P}\right)^3}}{\sigma_P^3} = \frac{q^3\left[\frac{3}{c}\Gamma\left(\frac{3}{c}\right) - \frac{6}{c^2}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{2}{c^3}\Gamma^3\left(\frac{1}{c}\right)\right]}{q^3\left[\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{c}\Gamma\left(\frac{3}{c}\right) - \frac{6}{c^2}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{2}{c^3}\Gamma^3\left(\frac{1}{c}\right)}{\left[\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)\right]^{3/2}} \tag{52}$$

$$e = \frac{\overline{\left(P - \overline{P}\right)^4}}{\left[\overline{\left(P - \overline{P}\right)^2}\right]^2} - 3 = \frac{\overline{\left(P - \overline{P}\right)^4}}{\sigma_P^4} - 3 =$$

$$= \frac{q^4\left[\frac{4}{c}\Gamma\left(\frac{4}{c}\right) - \frac{12}{c^2}\Gamma\left(\frac{3}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{12}{c^3}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right) - \frac{3}{c^4}\Gamma^4\left(\frac{1}{c}\right)\right]}{q^4\left[\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)\right]^2} - 3 =$$

$$= \frac{\frac{4}{c}\Gamma\left(\frac{4}{c}\right) - \frac{12}{c^2}\Gamma\left(\frac{3}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{12}{c^3}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right) - \frac{3}{c^4}\Gamma^4\left(\frac{1}{c}\right)}{\left[\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)\right]^2} - 3 \tag{53}$$

Jak je zřejmé, koeficienty šikmosti a špičatosti závisí **pouze** na parametru $c$.

**Porovnání modelů.** Je zajímavé porovnat tento Weibullovský model s aproximačními vztahy Peirceova modelu z předchozí kapitoly. Uvažujme **zvláštní případ**, kdy platí rovnice

$$\frac{1}{4,2}\,\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)=\sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)-\frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)} \qquad (54)$$

Jejím kořenem je $c \cong 4,8$. Užitím (54) v (50) též nalezneme $\sigma_P/\left(\overline{P}-P_{\min}\right)=1/4,2=0,238$. Pro tento zvláštní případ zaveďme následující **parametry**:

$$\left.\begin{aligned} A &= P_{\min} \\ B &= \frac{1}{4,2}\,\frac{Q}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)=Q\sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)-\frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)} \qquad (c\cong 4,8) \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Pak z (49a) nalezneme

$$\sigma_P = l^{-\frac{1}{c}}\,Q\sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)-\frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)} = B\,l^{-1/4,8} \qquad (56)$$

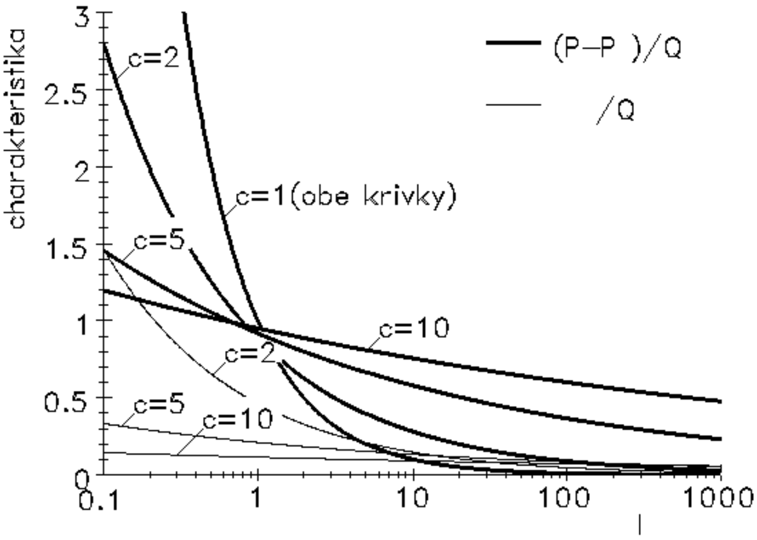
a z (48a)

$$\overline{P}=P_{\min}+l^{-\frac{1}{c}}\,\frac{Q}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)=A+4,2B\,l^{1/4,8}=A+4,2\sigma_P \qquad (57)$$

Rozdíl v exponentech ($\frac{1}{5}$ proti $\frac{1}{4,8}$) je z experimentálního hlediska nevýznamný; poslední dva výrazy je proto možné považovat za **prakticky shodné** s Peirceovu aproximací popsanou vztahy (34) a (35). (Rozdíly nalezneme až u koeficientu šikmosti a špičatosti.)

**Číselné hodnoty** pro Weibullovský model charakterizuje následující tabulka

| Hodnoty funkce gama vypočteny numerickou metodou z rovnice $\Gamma(x)=\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\mathrm{d}u$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | $\dfrac{\overline{P}-P_{\min}}{q}$ z rov. (48) | $\dfrac{\sigma_P}{q}$ z rov. (49) | $\dfrac{\sigma_P}{\overline{P}-P_{\min}}$ z rov. (50) | $a$ z rov. (52) | $e$ z rov. (53) |
| 0.5 | 2 | 4.472 | 2.236 | 6.619 | 84.72 |
| **1** | **1** | **1** | **1** | **2** | **6** |
| 2.0 | 0.886 | 0.463 | 0.523 | 0.631 | 0.245 |
| 3.0 | 0.893 | 0.324 | 0.363 | 0.173 | -0.29 |
| 4.0 | 0.906 | 0.254 | 0.280 | -0.08 | -0.24 |
| 4.8 | 0.916 | 0.218 | **0.238** | -0.23 | -0.11 |
| **5.0** | **0.918** | **0.210** | **0.229** | **-0.26** | **-0.07** |
| 6.0 | 0.928 | 0.180 | 0.194 | -0.38 | 0.085 |
| 7.0 | 0.935 | 0.157 | 0.168 | -0.47 | 0.206 |
| 8.0 | 0.942 | 0.140 | 0.148 | -0.54 | 0.334 |
| 10.0 | 0.951 | 0.114 | 0.120 | -0.64 | 0.579 |
| 50.0 | 0.989 | 0.025 | 0.025 | -1.03 | 1.975 |




obr. 7

Průběhy dvou charakteristik $\left(\overline{P}-P_{\min}\right)/Q$ a $\sigma_P/Q$, které závisí na upínací délce $l$ (viz (48a) a (49a) ), jsou znázorněny na obr. 7.

**Příklad.** Rozložení pevnosti hedvábí z čedičových vláken, 283tex (40 vláken v průřezu), zkoumali J. MILITKÝ a V. KOVAČIČ [5]. Ověřili, že platí Weibullovo rozložení s parametry

$l = 0{,}5\text{m}$ (upínací délka),

$P_{\min} = 0{,}5327\ \text{GPa}$,

$q = 0{,}431\ \text{GPa}$,

Ze (40) nalezneme pro parametr $Q$ hodnotu

$$Q_{\left[\text{GPa}\,\text{m}^{1/6{,}547}\right]} = q l^{1/c} = 0{,}431 \cdot 0{,}5^{1/6{,}547} = 0{,}3877\,\text{GPa}\,\text{m}^{1/6{,}547} \tag{i}$$

Z rovnic (48), (49), (50), (52), (53) za užití numerického výpočtu potřebných gama funkcí a při užití (40) nalezneme potřebné vztahy, umožňující **předpovídat hodnoty statistických charakteristik rozložení pevnosti pro různé upínací délky**.

$$\frac{\overline{P}-P_{\min}}{q} = 0{,}932 \text{ (num. výp.)} \qquad \frac{\overline{P}-P_{\min}}{q} = \frac{\overline{P}-P_{\min}}{Q/l^{1/c}} = \frac{\overline{P}_{[\text{GPa}]}-0{,}5327}{0{,}3877/l_{[\text{m}]}^{1/6{,}547}} = 0{,}932$$

$$\overline{P}_{[\text{GPa}]} = l_{[\text{m}]}^{-1/6{,}547} \cdot 0{,}932 \cdot 0{,}3877 + 0{,}5327 = l_{[\text{m}]}^{-1/6{,}547} \cdot 0{,}3613 + 0{,}5327 \tag{ii}$$

$$\frac{\sigma_P}{q} = 0{,}167 \text{ (num. výp.)} \qquad \frac{\sigma_P}{q} = \frac{\sigma_P}{Q/l^{1/c}} = \frac{\sigma_{P[\text{GPa}]}}{0{,}3877/l_{[\text{m}]}^{1/6{,}547}} = 0{,}167$$

$$\sigma_{P[\text{GPa}]} = l_{[\text{m}]}^{-1/6{,}547} \cdot 0{,}167 \cdot 0{,}3877 = l_{[\text{m}]}^{-1/6{,}547} \cdot 0{,}06475 \tag{iii}$$

$$\frac{\sigma_P}{\overline{P}-P_{\min}} = 0{,}179 \tag{iv}$$

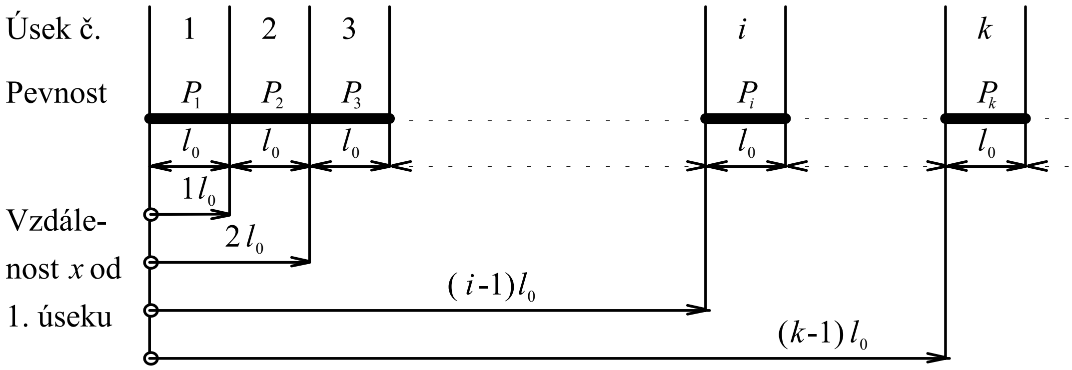
$$v_P = \frac{\sigma_P}{\overline{P}} = \frac{l_{[\text{m}]}^{-1/6{,}547} \cdot 0{,}06475}{l_{[\text{m}]}^{-1/6{,}547} \cdot 0{,}3613 + 0{,}5327} = \frac{1}{5{,}5799 + 8{,}2270\, l_{[\text{m}]}^{1/6{,}547}} \tag{v}$$

$$a = -0{,}43 \tag{vi}$$

$$e = 0{,}151 \tag{vii}$$

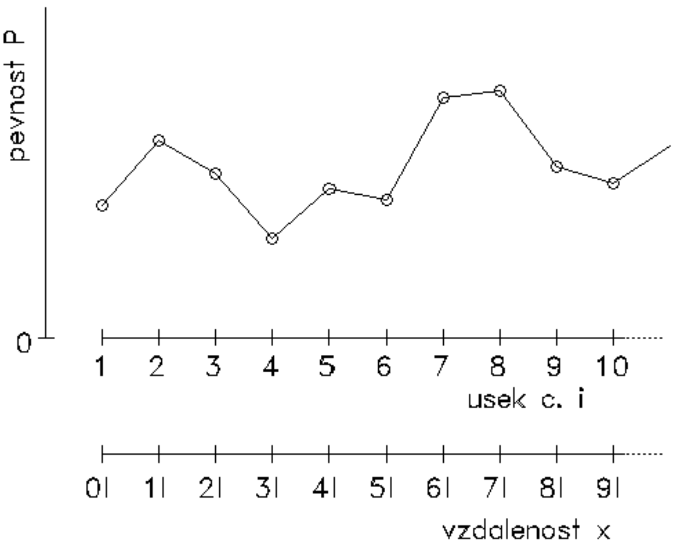
## 1.4 Závislé pevnosti jako Markovský proces

**Pevnosti jako náhodný proces.** Uvažujme (nekonečné) vlákno, které je myšleně rozdělené na úseky délky $l_0$ podle obr. 8.




obr. 8

Úseky označme **pořadovými čísly** $i = 1, 2, \cdots, k, \cdots$. Na každém $i$-tém úseku nalezneme nějako hodnotu **pevnosti** $P_i$ (zjišťovanou při upínací délce $l_0$). Tento postup můžeme nezávisle **opakovat** také na jiných vláknech z téže suroviny. Každé takové opakování je **realizací náhodného procesu**. Část jedné realizace je schematicky znázorněna na obr. 9. Hodnoty pevností jsou vyneseny v závislosti na pořadovém čísle úseku $i$. Při jiných realizacích však nalezneme v úsecích stejného pořadového čísla jiné hodnoty. Pevnosti úseků $P_i$, $i = 1, 2, \cdots$ jsou tedy **náhodné veličiny**.




obr. 9

$P_i$ můžeme též chápat jako funkci, přiřazující pořadovým číslům úseků hodnoty pevností. Protože každé $P_i$ je veličina náhodná, nazýváme funkci $P_i$ **náhodnou funkcí** - v tomto případě funkcí **diskrétního argumentu** $i$, nebo častěji **náhodným procesem s diskrétním argumentem** $i$.

Obecný úsek je určen také svou **vzdáleností** $x$ od úseku č.1. Vzdálenost úseků na obr. 8 přitom chápeme jako vzdálenost odpovídajících si bodů - např. levých konců úseků. Z grafického znázornění plyne

$$x = l_0 \left(i-1\right) l_0 > 0, i = 1, 2, \cdots \tag{58}$$

Uvažovaný náhodný proces může být pak chápán též jako **náhodný proces s diskrétním parametrem** $x$. (Pro takto definovaný náhodný proces platí druhá abscisa v obr. 9.)

**Operátor hustoty pravděpodobnosti.** Rozložení náhodných proměnných bývá popisováno hustotou pravděpodobnosti. V uvažovaném případě má svou **jednorozměrnou hustotu pravděpodobnosti** každá náhodná proměnná $P_i$, $i = 1, 2, \cdots$. Při realizacích vzniknou také uspořádané dvojice hodnot proměnných $P_i, P_{i+a}$ (parametr $a = 0, 1, 2, \cdots$ vyjadřuje rozdíl indexů). Rozložení těchto dvojic je popsáno **dvourozměrnou hustotou pravděpodobnosti**. Můžeme popisovat i rozložení posloupnosti proměnných $P_i, P_{i+a_1}, P_{i+a_2}, \cdots P_{i+a_n}$ (parametry $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ ). Rozložení popisuje **vícerozměrná hustota pravděpodobnosti**.

Všechny hustoty pravděpodobnosti vyjádříme **operátorem hustoty pravděpodobnosti** $f$. Uveďme několik příkladů: *1)* $f(P_{17})$ je hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné $P_{17}$. *2)* $f(P_i)$ je hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné $P_i$. Funkce obecně závisí na zvoleném $i$; pro dvě různé hodnoty $i$ mohou být $f(P_i)$ dvě naprosto odlišné funkce. *3)* $f(P_2, P_8)$ je dvourozměrná hustota pravděpodobnosti dvojice náhodných proměnných $P_2, P_8$. *4)* $f(P_i, P_{i+3})$ je dvourozměrná hustota pravděpodobnosti dvojice náhodných proměnných $P_i, P_{i+3}$. Pro různá $i$ to mohou být zcela různé funkce. *5)* $f(P_{14}, P_{14+a})$ je dvourozměrná hustota pravděpodobnosti dvojice náhodných proměnných $P_{14}, P_{14+a}$. V závislosti na tom, jaký rozdíl indexů $a$ zvolíme, najdeme různé funkce hustoty pravděpodobnosti. *5)* $f(P_1, P_2, \cdots, P_k)$ je $k$-rozměrná hustota pravděpodobnosti rozložení první $k$-tice náhodných proměnných.

**Stacionární náhodný proces.** Obvykle je možné vycházet z *předpokladu*, že uvažovaný náhodný proces je (v užším slova smyslu) **stacionární***). To znamená, že **rozložení posloupnosti pevností $P_i, P_{i+a_1}, P_{i+a_2}, \cdots P_{i+a_n}$ je pro všechny indexy $i$ stejné**. (Rozložení závisí na hodnotách $a_1, a_2, \cdots$, ale nezávisí na tom, kterou proměnnou zvolíme jako první.) Pak také **hustoty pravděpodobnosti $f(P_i)$, $P_i \in (P_{\min}, P_{\min})$ jsou pro všechna $i = 1, 2, \cdots$ stejné funkce**. Odtud vyplývá

- **střední hodnota** $E(P_i) = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P_i f(P_i) \mathrm{d}P_i = \overline{P}$ je **konstanta** pro všechna $i = 1, 2, \cdots$,
- **rozptyl** $D(P_i) = E\left[(P_i - \overline{P})^2\right] = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} (P_i - \overline{P})^2 f(P_i) \mathrm{d}P_i = \sigma_P^2$ je **konstanta** pro všechna $i = 1, 2, \cdots$,
- **směrodatná odchylka** $\sqrt{\sigma_P^2} = \sigma_P$ je **konstanta** pro všechna $i = 1, 2, \cdots$.

(Symbol $E$ je tradičním operátorem střední hodnoty, $D$ je operátorem rozptylu.)

Z předpokladu stacionarity vyplývá, že také **dvourozměrné hustoty pravděpodobnosti $f(P_i, P_{i+k})$ jsou při daném $k$ stejné funkce pro všechna** $i = 1, 2, \cdots$.

*) Přesnou definici lze nalézt v literatuře z oblasti teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Připomeňme jen, že důležité výsledky, které dovozujeme ze stacionarity v užším smyslu, platí i při méně striktním předpokladu tzv. stacionarity v širším smyslu. (Odvození je ovšem méně názorné.)

Pak ovšem

**- kovariance** $E\Big[\big(P_i-\overline{P}\big)\big(P_{i+k}-\overline{P}\big)\Big]=\int\limits_{P_i=P_{\min}}^{P_{\max}}\int\limits_{P_{i+k}=P_{\min}}^{P_{\max}}\big(P_i-\overline{P}\big)\big(P_{i+k}-\overline{P}\big)f\big(P_i,P_{i+k}\big)\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+k}=$

$=\operatorname{cov}\big(P_i,P_{i+k}\big)$ je při daném $k$ **konstanta** pro všechna $i=1,2,\ldots$

(Pro $k=0$ je kovariance $\operatorname{cov}\big(P_i,P_{i+k}\big)=E\Big[\big(P_i-\overline{P}\big)\big(P_i-\overline{P}\big)\Big]=E\Big[\big(P_i-\overline{P}\big)^2\Big]=\sigma_P^2$.)

**- korelační koef.** $\operatorname{cov}\big(P_i,P_{i+k}\big)/\sigma_P^2=\rho\big(P_i,P_{i+k}\big)$ je při daném $k$ **konstanta** pro všechna $i=1,2,\cdots$

**Ergodický náhodný proces.** Vycházejme z *předpokladu*, že uvažovaný náhodný proces je **ergodický***). Pro střední hodnoty a korelace (a také rozptyly, směrodatné odchylky a kovariance) pak stačí znát jen **jednu realizaci** (např. pevnosti $P_i$, naměřené na jediném, dostatečně dlouhém vlákně). Při jedné realizaci má každé $P_i$ jedinou hodnotu a platí

**- střední hodnota** $\overline{P}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}P_i$

**- rozptyl** $\sigma_P^2=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\big(P_i-\overline{P}\big)^2$

**- směrodatná odchylka** $\sigma_P=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\big(P_i-\overline{P}\big)^2}$

**- kovariance** $\operatorname{cov}\big(P_i,P_{i+k}\big)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\Big[\big(P_i-\overline{P}\big)\big(P_{i+k}-\overline{P}\big)\Big]$

**- korelační koef.** $\rho\big(P_i,P_{i+k}\big)=\dfrac{\operatorname{cov}\big(P_i,P_{i+k}\big)}{\sigma_P^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\Big[\big(P_i-\overline{P}\big)\big(P_{i+k}-\overline{P}\big)\Big]\Big/\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\big(P_i-\overline{P}\big)^2$

(Ergodická vlastnost je výhodná při určování statistických charakteristik z experimentů.)

**Markovský náhodný proces*).** Pro snazší formulaci zaveďme nejprve následující *úmluvu*: výrokem typu "pevnost je $P_i$" nebo "pevnost má hodnotu $P_i$" máme na mysli, že hodnota pevnosti *i*-tého úseku leží někde v diferenciálním intervalu $\big(P_i,\,P_i+\mathrm{d}P_i\big)$. Podobně výrokem typu "posloupnost pevností je $P_i,P_{i+1},\cdots,P_{i+k}$" nebo "posloupnost pevností má hodnotu $P_i,P_{i+1},\cdots,P_{i+k}$" máme na mysli, že prvky této posloupnosti leží někde v diferenciálních intervalech $\big(P_i,\,P_i+\mathrm{d}P_i\big)$, $\big(P_{i+1},\,P_{i+1}+\mathrm{d}P_{i+1}\big)$, $\cdots$, $\big(P_{i+k},\,P_{i+k}+\mathrm{d}P_{i+k}\big)$.

Neznáme-li dosud žádnou pevnost, pak pravděpodobnost, že v úseku č. 1 nalezneme určitou pevnost $P_1$ je dána výrazem $f\big(P_1\big)\mathrm{d}P_1$.

Uvažujme dále, že již známe hodnoty pevnosti $P_1,P_2,\cdots,P_i$ prvých *i* úseků a zkoumejme jaká je pravděpodobnost, že pevnost následujícího úseku č. $i+1$ bude $P_{i+1}$. Kdyby pevnost úseku nezávisela na pevnosti úseků jiných, byla by hledaná pravděpodobnost $f\big(P_{i+1}\big)\mathrm{d}P_{i+1}$ a jednalo by se o případ nezávislých pravděpodobností, řešený v kap. 1.1 až 1.3.

---

*) Přesnou definici pojmu ergodický proces a Markovský proces lze nalézt v literatuře z oblasti teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky.

Obecně pravděpodobnost pevnosti $P_{i+1}$ **závisí na všech předchozích hodnotách** $P_1, P_2, \cdots, P_i$. (Obvykle, když předcházející místa jsou nadprůměrně pevná, je značně pravděpodobné, že také $P_{i+1}$ bude hodnota nadprůměrná - a naopak.) Často však bývá splněn *předpoklad*, že pravděpodobnost pevnosti $P_{i+1}$ **ovlivňuje jenom předcházející hodnota** $P_i$, zatímco hodnoty $P_1, P_2, \cdots, P_{i-1}$ ji (bezprostředně) neovlivňují. (Např. proto, že úseky č. 1 až $i-1$ se s úsekem č. $i+1$ přímo nestýkají a způsob ovlivňování "na dálku" není možný.) Náhodný proces splňující tento předpoklad je **Markovským procesem**.

**Všechny další úvahy budou založeny na předpokladu, že pevnosti úseků vláken odpovídají stacionárnímu, ergodickému a Markovskému náhodnému procesu**.

**Rozložení dvojice pevností $P_i, P_{i+1}$.** Nejprve zaveďme pojem **podmíněné hustoty pravděpodobnosti**. Nepodmíněná hustota pravděpodobnosti $f(P_{i+k})$ vyjadřuje rozdělení pevnosti $P_{i+k}$ bez ohledu na pevnosti v jiných úsecích. Ze všech realizací pevnosti $P_{i+k}$ však můžeme vybrat jenom takové, kterým předcházela v $i$-tém úseku předem daná hodnota pevnosti $P_i$. Rozložení takto vybraných pevností $P_{i+k}$ je popsáno **podmíněnou hustotou pravděpodobnosti** $\varphi(P_{i+k}|P_i)$. Symbol $\varphi$ **je operátorem podmíněné pravděpodobnosti**. První veličina v závorce je **náhodná proměnná**, které se rozložení týká, druhá veličina je chápána jako **parametr**. (Pořadí symbolů proto nelze zaměňovat.)

Pravděpodobnost, že pevnost $i$-tého úseku je $P_i$ je $f(P_i)\mathrm{d}P_i$. **Podmíněná pravděpodobnost**, že pevnost úseku č. $i+1$ je $P_{i+1}$ **za předpokladu**, že pevnost $i$-tého úseku je $P_i$ je $\varphi(P_{i+1}|P_i)\mathrm{d}P_{i+1}$. Konečně pravděpodobnost, že $i$-tý úsek má pevnost $P_i$ **a současně** úsek č. $i+1$ má pevnost $P_{i+1}$ je $f(P_i, P_{i+1})\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}$. Podle pravidla o násobení pravděpodobností pak platí

$$f(P_i, P_{i+1})\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1} = f(P_i)\mathrm{d}P_i \cdot \varphi(P_{i+1}|P_i)\mathrm{d}P_{i+1} \tag{59a}$$

$$f(P_i, P_{i+1}) = f(P_i)\varphi(P_{i+1}|P_i) \tag{59}$$

a odtud také

$$\varphi(P_{i+1}|P_i) = f(P_i, P_{i+1})/f(P_i) \tag{59b}$$

U stacionárního procesu jsou obě funkce na pravé straně poslední rovnice stejné pro všechna $i$. Proto také **podmíněná hustota pravděpodobnosti** $\varphi(P_{i+1}|P_i)$ **je stejná pro všechna** $i$.

**Rozložení pevností $P_i, \cdots, P_{i+k}$.** Pravděpodobnost, že v úsecích č. $i$ až $i+k$ jsou pevnosti $P_i$ až $P_{i+k}$ je dána výrazem $f(P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \cdots, P_{i+k})\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2}\cdots\mathrm{d}P_{i+k}$. Jiný způsob vyjádření plyne z Markovského charakteru náhodného procesu. Uvažujme nejprve $k=2$. Pravděpodobnost, že úseky č. $i$, $i+1$ a $i+2$ mají pevnosti $P_i$, $P_{i+1}$, $P_{i+2}$ je $f(P_i, P_{i+1}, P_{i+2})\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2}$. Tutéž pravděpodobnost lze vyjádřit také součinem dvou dílčích pravděpodobností: *1)* pravděpodobnosti, že úseky č. $i$ a $i+1$ mají pevnosti $P_i$, $P_{i+1}$ a *2)* pravděpodobnosti, že úsek č. $i+2$ má pevnost $P_{i+2}$ **za předpokladu**, že pevnost předchozího úseku č. $i+1$ je $P_{i+1}$. Prvá pravděpodobnost plyne z (59a), druhá je $\varphi(P_{i+2}|P_{i+1})\mathrm{d}P_{i+2}$.

Výsledná pravděpodobnost tedy je dle pravidla o násobení pravděpodobností je

$$f\left(P_i, P_{i+1}, P_{i+2}\right)\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2} = \left[f\left(P_i\right)\mathrm{d}P_i\cdot\varphi\left(P_{i+1}\middle|P_i\right)\mathrm{d}P_{i+1}\right]\cdot\left[\varphi\left(P_{i+2}\middle|P_{i+1}\right)\mathrm{d}P_{i+2}\right] =$$

$$= f\left(P_i\right)\varphi\left(P_{i+1}\middle|P_i\right)\varphi\left(P_{i+2}\middle|P_{i+1}\right)\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2} \qquad (60a)$$

Nyní lze analogickou úvahu postupně opakovat pro $k = 3$, poté pro $k = 4$, atd., až při posledním opakování nalezneme

$$f\left(P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \cdots, P_{i+k}\right)\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2}\cdots\mathrm{d}P_{i+k} =$$

$$= \Big[f\left(P_i\right)\mathrm{d}P_i\cdot\varphi\big(P_{i+1}\left(P_i\right)\mathrm{d}P_{i+1}\cdot\varphi\big(P_{i+2}\left(P_{i+1}\right)\mathrm{d}P_{i+2}\cdots\cdot\varphi\big(P_{i+k-1}\left(P_{i+k-2}\right)\mathrm{d}P_{i+k-1}\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big[\varphi\big(P_{i+k}\left(P_{i+k-1}\right)\mathrm{d}P_{i+k}\Big] =$$

$$= f\left(P_i\right)\varphi\big(P_{i+1}\left(P_i\right)\varphi\big(P_{i+2}\left(P_{i+1}\right)\cdots\varphi\big(P_{i+k}\left(P_{i+k-1}\right)\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2}\cdots\mathrm{d}P_{i+k} \qquad (60b)$$

$$k = 1, 2, \cdots$$

$$f\left(P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \cdots, P_{i+k}\right) = f\left(P_i\right)\varphi\big(P_{i+1}\left(P_i\right)\varphi\big(P_{i+2}\left(P_{i+1}\right)\cdots\varphi\big(P_{i+k}\left(P_{i+k-1}\right) =$$

$$= f\left(P_i\right)\prod_{j=1}^{k}\varphi\big(P_{i+j}\left(P_{i+j-1}\right)\big) \quad k = 1, 2, \cdots \qquad (60)$$

Všechny funkce na pravé straně rovnice (60) jsou u stacionárního procesu stejné pro všechna $i$, a proto také **hustota pravděpodobnosti** $f\left(P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \cdots, P_{i+k}\right)$ **je stejná pro všechna** $i$.

## Rozložení dvojice pevností $P_i, P_{i+k}$.

Pravděpodobnost, že $i$-tý úsek má pevnost $P_i$ a současně úsek č. $i+k$ má pevnost $P_{i+k}$ je $f\left(P_i, P_{i+k}\right)\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+k}$. Tuto pravděpodobnost můžeme vyjádřit též součinem dvou pravděpodobností: *1)* pravděpodobnosti $f\left(P_i\right)\mathrm{d}P_i$, že prvý úsek má pevnost $P_i$ a *2)* pravděpodobnosti, že úsek č. $i+k$ má pevnost $P_{i+k}$ **za předpokladu**, že prvý úsek má pevnost $P_i$. Tato **podmíněná pravděpodobnost** je $\varphi\left(P_{i+k}\middle|P_i\right)\mathrm{d}P_{i+k}$, kde $\varphi\left(P_{i+k}\middle|P_i\right)$ je **podmíněnou hustotou pravděpodobnosti**. Podle pravidla o násobení pravděpodobností platí

$$f\left(P_i, P_{i+k}\right)\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+k} = f\left(P_i\right)\mathrm{d}P_i\cdot\varphi\big(P_{i+k}\left(P_i\right)\mathrm{d}P_{i+k} \qquad (61a)$$

$$f\left(P_i, P_{i+k}\right) = f\left(P_i\right)\varphi\big(P_{i+k}\left(P_i\right)\big) \qquad k = 1, 2, \cdots \qquad (61)$$

Pravděpodobnost, že prvý úsek má pevnost $P_i$ a současně úsek č. $i+k$ má pevnost $P_{i+k}$ lze vyjádřit také jiným způsobem. Z teorie pravděpodobnosti nalezneme při následujícím užití (60) vztah

$$f\left(P_i, P_{i+k}\right) = \int\limits_{P_{i+1}=P_{\min}}^{P_{\max}}\int\limits_{P_{i+2}=P_{\min}}^{P_{\max}}\cdots\int\limits_{P_{i+k-1}=P_{\min}}^{P_{\max}} f\left(P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \cdots, P_{i+k-1}, P_{i+k}\right)\cdot$$

$$\cdot\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2}\cdots\mathrm{d}P_{i+k-1} =$$

$$= \int\limits_{P_{i+1}=P_{\min}}^{P_{\max}}\int\limits_{P_{i+2}=P_{\min}}^{P_{\max}}\cdots\int\limits_{P_{i+k-1}=P_{\min}}^{P_{\max}} f\left(P_i\right)\left[\prod_{j=1}^{k}\varphi\big(P_{i+j}\left(P_{i+j-1}\right)\big)\right]\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2}\cdots\mathrm{d}P_{i+k-1} =$$

$$= f\left(P_i\right)\int\limits_{P_{i+1}=P_{\min}}^{P_{\max}}\int\limits_{P_{i+2}=P_{\min}}^{P_{\max}}\cdots\int\limits_{P_{i+k-1}=P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\prod_{j=1}^{k}\varphi\big(P_{i+j}\left(P_{i+j-1}\right)\big)\right]\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2}\cdots\mathrm{d}P_{i+k-1} \qquad (62)$$

$$k = 2, 3, \cdots$$

Porovnáním rovnic (61) a (62) můžeme vyjádřit podmíněnou hustotu pravděpodobnosti $\varphi\left(P_{i+k}\middle|P_i\right)$ vztahem

$$f\left(P_i,P_{i+k}\right)=f\left(P_i\right)\varphi\left(P_{i+k}\left(P_i\right)=\right.$$

$$=f\left(P_i\right)\int\limits_{P_{i+1}=P_{\min}}^{P_{\max}}\int\limits_{P_{i+2}=P_{\min}}^{P_{\max}}\cdots\int\limits_{P_{i+k-1}=P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\prod_{j=1}^{k}\varphi\left(P_{i+j}\left(P_{i+j-1}\right)\right]\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2}\cdots\mathrm{d}P_{i+k-1}\right.$$

$$\varphi\left(P_{i+k}\left(P_i\right)=\int\limits_{P_{i+1}=P_{\min}}^{P_{\max}}\int\limits_{P_{i+2}=P_{\min}}^{P_{\max}}\cdots\int\limits_{P_{i+k-1}=P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\prod_{j=1}^{k}\varphi\left(P_{i+j}\left(P_{i+j-1}\right)\right]\mathrm{d}P_{i+1}\mathrm{d}P_{i+2}\cdots\mathrm{d}P_{i+k-1}\right.\right. \qquad (63)$$

$$k=2,3,\cdots$$

Při stacionárním procesu jsou integrované funkce a meze integrálů stejné pro všechna $i$. Proto také **podmíněná hustota pravděpodobnosti** $\varphi\left(P_{i+k}\middle|P_i\right)$ **je stejná pro všechna** $i$.

**Statistické charakteristiky.** U stacionárního Markovského procesu lze vyjádřit pro všechna $i=1,2,\cdots$ a $k=1,2,\cdots$ hustotu pravděpodobnosti $f\left(P_i,P_{i+k}\right)$ a podmíněnou hustotu pravděpodobnosti $\varphi\left(P_{i+k}\middle|P_i\right)$ z rovnic (61) a (63). Pro konkrétní výpočet **je nutno znát jen dvě funkce** (stejné pro všechna $i$): **hustotu pravděpodobnosti** $f\left(P_i\right)$ **a podmíněnou hustotu pravděpodobnosti** $\varphi\left(P_{i+1}\middle|P_i\right)$. Z vlastností stacionárního procesu pak nalezneme **střední hodnotu**

$$\overline{P}=E\left(P_i\right)=\int_{P_{\min}}^{P_{\max}}P_i\,f\left(P_i\right)\mathrm{d}P_i \qquad (64)$$

**rozptyl**

$$\sigma_P^2=E\left[\left(P_i-\overline{P}\right)^2\right]=\int_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left(P_i-\overline{P}\right)^2f\left(P_i\right)\mathrm{d}P_i \qquad (65a)$$

$$\sigma_P^2=E\left[\left(P_i-\overline{P}\right)^2\right]=E\left(P_i^2-2P_i\overline{P}+\overline{P}^2\right)=E\left(P_i^2\right)-2\overline{P}\,E\left(P_i\right)+\overline{P}^2=$$

$$=E\left(P_i^2\right)-2\overline{P}^2+\overline{P}^2=E\left(P_i^2\right)-\overline{P}^2=\int_{P_{\min}}^{P_{\max}}P_i^2\,f\left(P_i\right)\mathrm{d}P_i-\overline{P}^2 \qquad (65)$$

a **směrodatnou odchylku**

$$\sigma_P=\sqrt{\sigma_P^2} \qquad (66)$$

Dále vyjádříme **kovarianci**

$$\mathrm{cov}\left(P_i,P_{i+k}\right)=E\left[\left(P_i-\overline{P}\right)\left(P_{i+k}-\overline{P}\right)\right]=\int\limits_{P_i=P_{\min}}^{P_{\max}}\int\limits_{P_{i+k}=P_{\min}}^{P_{\max}}\left(P_i-\overline{P}\right)\left(P_{i+k}-\overline{P}\right)f\left(P_i,P_{i+k}\right)\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+k} \qquad (67a)$$

$$\mathrm{cov}\left(P_i,P_{i+k}\right)=E\left[\left(P_i-\overline{P}\right)\left(P_{i+k}-\overline{P}\right)\right]=E\left(P_iP_{i+k}-P_i\overline{P}-\overline{P}P_{i+k}+\overline{P}^2\right)=$$

$$=E\left(P_iP_{i+k}\right)-\overline{P}\,E\left(P_i\right)-\overline{P}\,E\left(P_{i+k}\right)+\overline{P}^2=E\left(P_iP_{i+k}\right)-\overline{P}^2-\overline{P}^2+\overline{P}^2=$$

$$=E\left(P_iP_{i+k}\right)-\overline{P}^2=\int\limits_{P_i=P_{\min}}^{P_{\max}}\int\limits_{P_{i+k}=P_{\min}}^{P_{\max}}P_iP_{i+k}\,f\left(P_i,P_{i+k}\right)\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+k}-\overline{P}^2 \qquad (67)$$

Pojem kovariance je rozšiřován i pro $k=0$ a platí

$$\mathrm{cov}\left(P_i,P_i\right)=E\left[\left(P_i-\overline{P}\right)\left(P_i-\overline{P}\right)\right]=E\left[\left(P_i-\overline{P}\right)^2\right]=\sigma_P^2 \qquad (67b)$$

**Korelační koeficient** je pak dán výrazem

$$\rho\left(P_i,P_{i+k}\right)=\mathrm{cov}\left(P_i,P_{i+k}\right)/\sigma_P^2 \qquad \left(\ \rho\left(P_i,P_i\right)=\mathrm{cov}\left(P_i,P_i\right)/\sigma_P^2=1\ \right) \qquad (68)$$

**Lineárně transformovaný náhodný proces.** Náhodné proměnné $Q_i$, $i = 1, 2, \cdots$, definujme **lineární transformací** proměnných $P_i$.

$$Q_i = aP_i + b\, i = 1, 2, \cdots a \neq 0, b \ldots \text{konstanty} \tag{69}$$

**Střední hodnota** těchto proměnných je

$$\overline{Q} = E(Q_i) = E(a\,P_i + b) = a\,E(P_i) + b = a\,\overline{P} + b \tag{70}$$

**Rozptyl** a **směrodatnou odchylku** je možno vyjádřit tvarem

$$\sigma_Q^2 = D(Q_i) = E\left\{\left[Q_i - \overline{Q}\right]^2\right\} = E\left\{\left[(a\,P_i + b) - (a\,\overline{P} + b)\right]^2\right\} =$$

$$= E\left\{\left[a(P_i - \overline{P})\right]^2\right\} = a^2 E\left\{\left[P_i - \overline{P}\right]^2\right\} = a^2\sigma_P^2 \tag{71}$$

$$\sigma_Q = \sqrt{\sigma_Q^2} = \sqrt{a^2\sigma_P^2} = |a|\,\sigma_P \tag{72}$$

Pro **kovarianci** a pro **korelační koeficient** platí

$$\operatorname{cov}(Q_i, Q_{i+k}) = E\left[(Q_i - \overline{Q})(Q_{i+k} - \overline{Q})\right] =$$

$$= E\left[\left(\{aP_i + b\} - \{a\overline{P} + b\}\right)\left(\{aP_{i+k} + b\} - \{a\overline{P} + b\}\right)\right] = E\left[a^2 (P_i - \overline{P})(P_{i+k} - \overline{P})\right] =$$

$$= a^2 E\left[(P_i - \overline{P})(P_{i+k} - \overline{P})\right] = a^2 \operatorname{cov}(P_i, P_{i+k}) \tag{73}$$

$$\rho(Q_i, Q_{i+k}) = \frac{\operatorname{cov}(Q_i, Q_{i+k})}{\sigma_Q^2} = \frac{a^2 \operatorname{cov}(P_i, P_{i+k})}{a^2\sigma_P^2} = \frac{\operatorname{cov}(P_i, P_{i+k})}{\sigma_P^2} = \rho(P_i, P_{i+k}) \tag{74}$$

Protože všechny výrazy na pravé straně rovnic (70) až (74) jsou stejné pro všechna $i$, jsou také $\overline{Q}, \sigma_Q^2$ a $\sigma_Q, \operatorname{cov}(Q_i, Q_{i+k})$ a $\rho(Q_i, Q_{i+k})$ **stejné pro všechna** $i$. Stejně jako náhodný proces $P_i$, také **náhodný proces $Q_i$ je stacionární, ergodický a Markovský**.

**Centrovaný náhodný proces.** Nejčastěji se používají dva typy lineárních transformací: centrovaný náhodný proces a normovaný náhodný proces. **Centrované náhodné proměnné** jsou dány vztahem

$$P_i^\circ = P_i - \overline{P}\, i = 1, 2, \cdots \tag{75}$$

V porovnání s rovnicí (69) je zde $a = 1$ a $b = -\overline{P}$. Z rovnic (70) až (74) nalezneme statistické charakteristiky

$$\overline{P^{\mathrm{o}}} = \overline{P} - \overline{P} = 0 \tag{76}$$

$$\sigma_{P^{\mathrm{o}}}^2 = \sigma_P^2 \tag{77}$$

$$\sigma_{P^{\mathrm{o}}} = \sigma_P \tag{78}$$

$$\operatorname{cov}(P_i^{\mathrm{o}}, P_{i+k}^{\mathrm{o}}) = \operatorname{cov}(P_i, P_{i+k}) \tag{79}$$

$$\rho(P_i^{\mathrm{o}}, P_{i+k}^{\mathrm{o}}) = \rho(P_i, P_{i+k}) \tag{80}$$

**Normovaný náhodný proces.** Obvykle se zavádí **normované náhodné proměnné** vztahem

$$U_i = \frac{P_i - \overline{P}}{\sigma_P} = \frac{1}{\sigma_P} P_i - \frac{\overline{P}}{\sigma_P} \tag{81}$$

V porovnání s rovnicí (69) je zde $a = 1/\sigma_P$ a $b = -\overline{P}/\sigma_P$.

Z rovnic (70) až (74) nalezneme statistické charakteristiky

$$\overline{U} = (1/\sigma_P)\,\overline{P} - (\overline{P}/\sigma_P) = 0 \tag{82}$$

$$\sigma_U^2 = (1/\sigma_P)^2\,\sigma_P^2 = 1 \tag{83}$$

$$\sigma_U = \sqrt{\sigma_U^2} = 1 \tag{84}$$

$$\operatorname{cov}(U_i, U_{i+k}) = (1/\sigma_P)^2 \operatorname{cov}(P_i, P_{i+k}) = \rho(P_i, P_{i+k}) \tag{85}$$

$$\rho(U_i, U_{i+k}) = \rho(P_i, P_{i+k}) \tag{86}$$

Připomeňme, že stejně jako náhodný proces $P_i$, také centrovaný náhodný proces a normovaný náhodný proces jsou stacionární, ergodické a Markovské.

## Součet několika nezávislých Markovských procesů.

Uvažujme, že náhodný proces $P_i$ je součtem dvou stacionárních, ergodických, Markovských a vzájemně **nezávislých** náhodných procesů ${}^{(1)}P_i$ a ${}^{(2)}P_i$. (U všech veličin příslušných k danému procesu budeme uvádět index tohoto procesu vlevo nahoře v závorce.)

$$P_i = {}^{(1)}P_i + {}^{(2)}P_i \tag{87}$$

Pak pro každé $i = 1, 2, \cdots$ je **střední hodnota**

$$\overline{P} = E(P_i) = E\left({}^{(1)}P_i + {}^{(2)}P_i\right) = E\left({}^{(1)}P_i\right) + E\left({}^{(2)}P_i\right) = \overline{{}^{(1)}P} + \overline{{}^{(2)}P} \tag{88}$$

Protože sčítané náhodné procesy jsou **nezávislé**, platí pro každé $i = 1, 2, \cdots$ a $k = 0, 1, 2, \cdots$ , že **střední hodnota součinu** je

$$E\left({}^{(1)}P_i\,{}^{(2)}P_{i+k}\right) = E\left({}^{(2)}P_i\,{}^{(1)}P_{i+k}\right) = E\left({}^{(1)}P_i\right)E\left({}^{(2)}P_{i+k}\right) = E\left({}^{(2)}P_i\right)E\left({}^{(1)}P_{i+k}\right) = \overline{{}^{(1)}P}\;\overline{{}^{(2)}P} \tag{89}$$

**Rozptyl** a **směrodatná odchylka** jsou s využitím (65), (88) a (89)

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= E\left[P_i^2\right] - \overline{P}^2 = E\left[\left({}^{(1)}P_i + {}^{(2)}P_i\right)^2\right] - \overline{P}^2 = E\left({}^{(1)}P_i^2 + 2\,{}^{(1)}P_i\,{}^{(2)}P_i + {}^{(2)}P_i^2\right) - \overline{P}^2 = \\
&= E\left({}^{(1)}P_i^2\right) + 2E\left({}^{(1)}P_i\right)E\left({}^{(2)}P_i\right) + E\left({}^{(2)}P_i^2\right) - \left(\overline{{}^{(1)}P} + \overline{{}^{(2)}P}\right)^2 = \\
&= E\left({}^{(1)}P_i^2\right) + 2\,\overline{{}^{(1)}P}\;\overline{{}^{(2)}P} + E\left({}^{(2)}P_i^2\right) - \left(\overline{{}^{(1)}P}\right)^2 - 2\,\overline{{}^{(1)}P}\;\overline{{}^{(2)}P} - \left(\overline{{}^{(2)}P}\right)^2 = \\
&= \left[E\left({}^{(1)}P_i^2\right) - \left(\overline{{}^{(1)}P}\right)^2\right] + \left[E\left({}^{(2)}P_i^2\right) - \left(\overline{{}^{(2)}P}\right)^2\right] = {}^{(1)}\sigma_P^2 + {}^{(2)}\sigma_P^2
\end{aligned} \tag{90}$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2} = \sqrt{{}^{(1)}\sigma_P^2 + {}^{(2)}\sigma_P^2} \tag{91}$$

S využitím vztahů (67), (88) a (89) nalezneme pro **kovarianci** vztah

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(P_i, P_{i+k}) &= E\left[\left(P_i - \overline{P}\right)\left(P_{i+k} - \overline{P}\right)\right] = E\left(P_i P_{i+k}\right) - \overline{P}^2 = \\
&= E\left[\left({}^{(1)}P_i + {}^{(2)}P_i\right)\left({}^{(1)}P_{i+k} + {}^{(2)}P_{i+k}\right)\right] - \overline{P}^2 = \\
&= E\left[{}^{(1)}P_i\,{}^{(1)}P_{i+k} + {}^{(1)}P_i\,{}^{(2)}P_{i+k} + {}^{(2)}P_i\,{}^{(1)}P_{i+k} + {}^{(2)}P_i\,{}^{(2)}P_{i+k}\right] - \overline{P}^2 = \\
&= E\left({}^{(1)}P_i\,{}^{(1)}P_{i+k}\right) + E\left({}^{(1)}P_i\,{}^{(2)}P_{i+k}\right) + E\left({}^{(2)}P_i\,{}^{(1)}P_{i+k}\right) + E\left({}^{(2)}P_i\,{}^{(2)}P_{i+k}\right) - \left(\overline{{}^{(1)}P} + \overline{{}^{(2)}P}\right)^2 = \\
&= E\left({}^{(1)}P_i\,{}^{(1)}P_{i+k}\right) + E\left({}^{(1)}P_i\right)E\left({}^{(2)}P_{i+k}\right) + E\left({}^{(2)}P_i\right)E\left({}^{(1)}P_{i+k}\right) + E\left({}^{(2)}P_i\,{}^{(2)}P_{i+k}\right) - \left(\overline{{}^{(1)}P} + \overline{{}^{(2)}P}\right)^2 = \\
&= E\left({}^{(1)}P_i\,{}^{(1)}P_{i+k}\right) + \overline{{}^{(1)}P}\;\overline{{}^{(2)}P} + \overline{{}^{(2)}P}\;\overline{{}^{(1)}P} + E\left({}^{(2)}P_i\,{}^{(2)}P_{i+k}\right) - \left(\overline{{}^{(1)}P}\right)^2 + 2\,\overline{{}^{(1)}P}\;\overline{{}^{(2)}P} - \left(\overline{{}^{(2)}P}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\mathrm{cov}(P_i, P_{i+k}) = \left[E\left({}^{(1)}P_i\,{}^{(1)}P_{i+k}\right) - \left(\overline{{}^{(1)}P}\right)^2\right] + \left[E\left({}^{(2)}P_i\,{}^{(2)}P_{i+k}\right) - \left(\overline{{}^{(2)}P}\right)^2\right] =$$

$$= \mathrm{cov}\left({}^{(1)}P_i, {}^{(1)}P_{i+k}\right) + \mathrm{cov}\left({}^{(2)}P_i, {}^{(2)}P_{i+k}\right) \qquad (92)$$

a pro **korelační koeficient** vztah

$$\rho(P_i, P_{i+k}) = \frac{\mathrm{cov}(P_i, P_{i+k})}{\sigma_P^2} = \frac{\mathrm{cov}\left({}^{(1)}P_i, {}^{(1)}P_{i+k}\right) + \mathrm{cov}\left({}^{(2)}P_i, {}^{(2)}P_{i+k}\right)}{\sigma_P^2} =$$

$$= \frac{{}^{(1)}\sigma_P^2}{\sigma_P^2}\frac{\mathrm{cov}\left({}^{(1)}P_i, {}^{(1)}P_{i+k}\right)}{{}^{(1)}\sigma_P^2} + \frac{{}^{(2)}\sigma_P^2}{\sigma_P^2}\frac{\mathrm{cov}\left({}^{(2)}P_i, {}^{(2)}P_{i+k}\right)}{{}^{(2)}\sigma_P^2} =$$

$$= \frac{{}^{(1)}\sigma_P^2}{\sigma_P^2}\rho\left({}^{(1)}P_i, {}^{(1)}P_{i+k}\right) + \frac{{}^{(2)}\sigma_P^2}{\sigma_P^2}\rho\left({}^{(2)}P_i, {}^{(2)}P_{i+k}\right) \qquad (93)$$

Protože výrazy na pravých stranách rovnic (87) až (93) jsou nezávislé na indexu *i* (sčítané procesy jsou stacionární a Markovské), jsou také charakteristiky na levých stranách nezávislé na *i*. Tedy **součet dvou vzájemně nezávislých, stacionárních, ergodických a Markovských procesů** ${}^{(1)}P_i$ **a** ${}^{(2)}P_i$ **je stacionární, ergodický a Markovský proces** $P_i$.

Ke sčítané dvojici náhodných procesů bychom nyní mohli přičíst další náhodný proces a nalezli bychom analogické rovnice. Obecně pro součet *M* nezávislých náhodných procesů

$$P_i = \sum_{m=1}^{M} {}^{(m)}P_i \qquad (94)$$

nalezneme **střední hodnotu**, **rozptyl** a **směrodatnou odchylku** z rovnic

$$\overline{P} = \sum_{m=1}^{M} \overline{{}^{(m)}P} \qquad (95)$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{m=1}^{M} {}^{(m)}\sigma_P^2 \qquad (96)$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{m=1}^{M} {}^{(m)}\sigma_P^2} \qquad (97)$$

a pro **kovarianci** a **korelační koeficient** platí

$$\mathrm{cov}(P_i, P_{i+k}) = \sum_{m=1}^{M} \mathrm{cov}\left({}^{(m)}P_i, {}^{(m)}P_{i+k}\right) \qquad (98)$$

$$\rho(P_i, P_{i+k}) = \frac{1}{\sigma_P^2}\sum_{m=1}^{M}\left[{}^{(m)}\sigma_P^2\, \rho\left({}^{(m)}P_i, {}^{(m)}P_{i+k}\right)\right] \qquad (99)$$

Také v tomto případě platí, že **součet všech nezávislých, stacionárních, ergodických a Markovských procesů** ${}^{(m)}P_i$ **je proces stacionární, ergodický a Markovský**.

**Simulace.** Náhodný proces $P_i$ známe, známe-li hustotu pravděpodobnosti $f(P_i)$ a podmíněnou hustotu pravděpodobnosti $\varphi(P_{i+1}|P_i)$; každá z těchto funkcí je stejná pro všechna *i*. Na základě funkcí *f* a φ můžeme na počítači **generovat** náhodné proměnné s těmito rozloženími; příslušné programy jsou **generátory náhodných proměnných**. (Generátor *f* nezávisí na žádném parametru, generátor φ musí znát hodnotu parametru $P_i$.)

**Realizaci náhodného procesu $P_i$ je možné simulovat na počítači**. Lze postupovat následujícím způsobem:

*1)* Generátorem *f* vygenerujeme hodnotu, kterou považujeme za hodnotu $P_1$.

*2)* Do generátoru φ vložíme jako parametr hodnotu $P_1$ (určenou v předchozím bodě) a vygenerujeme hodnotu $P_2$. (Tato hodnota byla tedy vygenerována z podmíněné hustoty pravděpodobnosti $\varphi(P_2|P_1)$.)

*3)* Do generátoru φ vložíme jako parametr hodnotu $P_2$ (určenou v předchozím bodě) a vygenerujeme hodnotu $P_3$.

$\vdots$

*i)* Do generátoru φ vložíme jako parametr hodnotu $P_{i-1}$ (určenou v předchozím bodě) a vygenerujeme hodnotu $P_i$.

$\vdots$

Takto simulovaná realizace náhodného procesu má stejné všechny pravděpodobnostní a statistické vlastnosti, jako realizace nalezená experimentálně. (Simulované hodnoty ovšem pořídíme mnohem rychleji a v mnohem větším rozsahu, než experiment. Musíme ovšem znát funkce *f* a φ.) Pokud je simulovaný proces součtem několika nezávislých procesů dílčích, lze simulovat každý dílčí proces samostatně a využít pak vztahů (94) až (99).

**Korelační a normovaná korelační funkce.** Kovariance $\mathrm{cov}(P_i P_{i+k})$ i korelační koeficient $\rho(P_i P_{i+k})$ jsou stejné pro všechna *i*. Mají však různé hodnoty pro různá $k = 0, 1, 2, \cdots$.; jsou to **funkce** (pouze) **argumentu** *k*. Funkce

$$\mathrm{cov}(P_i P_{i+k}) = \mathrm{cov}_P(k) \tag{100}$$

argumentu *k* bývá nazývána (nenormovaná) **korelační funkce** náhodného procesu. Funkce

$$\rho(P_i P_{i+k}) = \rho_P(k) \tag{101}$$

argumentu *k* bývá nazývána **normovaná korelační funkce** náhodného procesu. Povšimněme si, že argument *k* je vlastně **rozdíl** pořadových čísel úseků vlákna.

**Vzdálenost jako parametr náhodného procesu.** Vzdálenost *i*-tého úseku od 1. úseku má dle (58) hodnotu $l_0(i-1)$. Vzdálenost úseku č. $i+k$ od 1. úseku je analogicky $l_0(i+k-1)$. Vzdálenost úseku č. $i+k$ od *i*-tého úseku je pak

$$x = l_0(i+k-1) - l_0(i-1) = l_0 k \tag{102}$$

Korelační a normovanou korelační funkci můžeme tedy vyjádřit také jako funkci **vzdálenosti** *x* mezi úseky; tyto funkce **označíme symboly** $\mathrm{cov}_P(x)$ a $\rho_P(x)$. Protože $k = 0, 1, 2, \cdots$, mohou vzdálenosti nabývat jenom diskrétní hodnoty $x = 0, l_0, 2l_0, \cdots$. Obvykle se však výsledky zobecňují zavedením *předpokladu*, že **vztahy odvozené pro diskrétní vzdálenost platí i pro obecně chápanou reálnou vzdálenost** $x \in \langle 0, \infty)$.

## 1.5 Závislé pevnosti jako proces Gaussovský a Markovský.

**Výchozí hustoty pravděpodobnosti.** Pevnosti vláken i jiných typů délkových textilií často vyhovují náhodným procesům popsaným v předchozí kapitole. K jejich úplnému popisu stačí znalost dvou hustot pravděpodobnosti $f$ a $\varphi$. Někdy je možné popsat tyto funkce **normálním Gaussovým rozložením pravděpodobnosti**. To znamená, že **meze pevností** $P_{\min} = -\infty$, $P_{\max} = \infty$, pro **rozložení pevnosti** $P_i$ platí hustota pravděpodobnosti

$$f(P_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P} \exp\left\{-\frac{\left(P_i - \overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \overline{P}\ldots\text{střední hodnota} \\ \sigma_P^2\ldots\text{rozptyl} \end{matrix}\right\} \text{(parametry)} \tag{103}$$

a pro **podmíněné rozložení pevnosti** $P_{i+1}$ **za předpokladu, že předchozí pevnost je určitá hodnota** $P_i$ platí hustota pravděpodobnosti

$$\varphi\left(P_{i+1}\left(P_i\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{\left(P_{i+1} - \left[\overline{P} + r\left(P_i - \overline{P}\right)\right]\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right\} \tag{104}$$

$$r = \rho\left(P_i P_{i+1}\right) \ldots \text{korelační koeficient mezi } P_i \text{ a } P_{i+1} (r\ldots \text{ parametr}) \tag{105}$$

Podmíněná hustota pravděpodobnosti je též normální, ale její střední hodnota je $\left[\overline{P} + r\left(P_i - \overline{P}\right)\right]$ a rozptyl je $\sigma_P^2\left(1-r^2\right)$.

**Hustotu pravděpodobnosti dvojice** $P_i, P_{i+1}$ vyjádříme z (59) při užití (103) a (104).

$$f\left(P_i, P_{i+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P} \exp\left\{-\frac{\left(P_i - \overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{\left(P_{i+1} - \left[\overline{P} + r\left(P_i - \overline{P}\right)\right]\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_P^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{\left(P_i - \overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2} - \frac{\left(P_{i+1} - \left[\overline{P} + r\left(P_i - \overline{P}\right)\right]\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_P^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{\left(P_i - \overline{P}\right)^2\left(1-r^2\right)}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)} - \frac{\left(\left[P_{i+1} - \overline{P}\right] - r\left(P_i - \overline{P}\right)\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_P^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{\left(P_i - \overline{P}\right)^2 - r^2\left(P_i - \overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left(P_{i+1} - \overline{P}\right)^2 - 2r\left(P_i - \overline{P}\right)\left(P_{i+1} - \overline{P}\right) + r^2\left(P_i - \overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right\}$$

$$f\left(P_i, P_{i+1}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_P^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{\left(P_i - \overline{P}\right)^2 - 2r\left(P_i - \overline{P}\right)\left(P_{i+1} - \overline{P}\right) + \left(P_{i+1} - \overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right\} \tag{106}$$

(Poslední výraz je známým vztahem, uváděným pro dvourozměrné normální rozložení v příručkách statistiky.)

Rovnicí (81) se obvykle zavádí **normovaný normální proces** $U_i$, který se nyní pohybuje v mezích $U_{\max} = -\infty$ a $U_{\min} = \infty$. Pro **hustotu pravděpodobnosti** $f$ pak ze (103) platí

$$f\left(U_i\right) = f\left(P_i\right)\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}U_i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P}\exp\left\{-\frac{U_i^2}{2}\right\}\cdot\sigma_P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{U_i^2}{2}\right\} \tag{107}$$

$$U_i = \frac{P_i - \overline{P}}{\sigma_P} \qquad P_i = \sigma_P U_i + \overline{P} \qquad \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}U_i} = \sigma_P$$

Podobně pro **podmíněnou hustotu pravděpodobnosti** $\varphi$ ze (104) nalezneme

$$\varphi\left(U_{i+1}\middle|U_i\right) = \varphi\left(P_{i+1}\middle|P_i\right)\frac{\mathrm{d}P_{i+1}}{\mathrm{d}U_{i+1}} =$$

$$U_i = \frac{P_i - \overline{P}}{\sigma_P} \qquad P_i = \sigma_P U_i + \overline{P}$$

$$U_{i+1} = \frac{P_{i+1} - \overline{P}}{\sigma_P} \qquad P_{i+1} = \sigma_P U_{i+1} + \overline{P} \qquad \frac{\mathrm{d}P_{i+1}}{\mathrm{d}U_{i+1}} = \sigma_P$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\left(\sigma_P U_{i+1} + \overline{P} - \left[\overline{P} + r\left(\sigma_P U_i + \overline{P} - \overline{P}\right)\right]\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right\}\cdot\sigma_P =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\left(\sigma_P U_{i+1} - \sigma_P r U_i\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\left(U_{i+1} - rU_i\right)^2}{2\left(1-r^2\right)}\right\} \tag{108}$$

a **hustotu pravděpodobnosti dvojice** $U_i, U_{i+1}$ vyjádříme z (59) při užití (107) a (108)

$$f\left(U_i, U_{i+1}\right) = f\left(U_i\right)\varphi\left(U_{i+1}\middle|U_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{U_i^2}{2}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\left(U_{i+1} - rU_i\right)^2}{2\left(1-r^2\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{U_i^2\left(1-r^2\right)}{2\left(1-r^2\right)} - \frac{\left(U_{i+1} - rU_i\right)^2}{2\left(1-r^2\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{U_i^2 - r^2U_i^2}{2\left(1-r^2\right)} - \frac{U_{i+1}^2 - 2rU_iU_{i+1} + r^2U_i^2}{2\left(1-r^2\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{U_i^2 - 2rU_iU_{i+1} + U_{i+1}^2}{2\left(1-r^2\right)}\right\} \tag{109}$$

(Také tento vztah je běžně uváděný v příručkách statistiky.)

Rozložení proměnné $U_{i+k}$ za podmínky, že v $i$-tém úseku je daná hodnota $U_i$ je popsáno **podmíněnou hustotou pravděpodobnosti** $\varphi\left(U_{i+k}\middle|U_i\right)$. Dle (63) a (108) je

$$\varphi\left(U_{i+k}\left(U_i\right)\right) = \int\limits_{U_{i+1}=-\infty}^{\infty}\int\limits_{U_{i+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{U_{i+k-1}=-\infty}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k}\varphi\left(U_{i+j}\left(U_{i+j-1}\right)\right)\right]\mathrm{d}U_{i+1}\mathrm{d}U_{i+2}\cdots\mathrm{d}U_{i+k-1} =$$

$$= \int\limits_{U_{i+1}=-\infty}^{\infty}\int\limits_{U_{i+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{U_{i+k-1}=-\infty}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\left(U_{i+j} - rU_{i+j-1}\right)^2}{2\left(1-r^2\right)}\right\}\right]\mathrm{d}U_{i+1}\mathrm{d}U_{i+2}\cdots\mathrm{d}U_{i+k-1} =$$

kde $k = 2, 3, \cdots$ (110)

**Matematické vztahy.** Pro analytické řešení pravé strany rovnice (110) musíme nejprve zformulovat některé obecně platné matematické vztahy.

Uvažujme, že $x, y, z$ jsou reálné proměnné. Z matematické analýzy je známo, že platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \qquad a > 0 \qquad \text{(Laplace-Gaussův integrál)} \tag{111}$$

Ve shodě se zvyklostmi dále označíme

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \tag{112}$$

S ohledem na (111) platí též

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{erfc}(-\infty) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{1} = 2 \\ \operatorname{erfc}(\infty) &= \lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{q}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{112a}$$

S použitím předchozích vztahů dále nalezneme

$$\int_{\xi}^{\infty} e^{-a^2x^2+bx}\,\mathrm{d}x = \int_{\xi}^{\infty} e^{-a^2x^2+bx-\frac{b^2}{4a^2}}\, e^{+\frac{b^2}{4a^2}}\,\mathrm{d}x = e^{\frac{b^2}{4a^2}}\int_{\xi}^{\infty} e^{-\left(ax-\frac{b}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = e^{\frac{b^2}{4a^2}}\int_{a\xi-\frac{b}{2a}}^{\infty} e^{-y^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{a} =$$

$$y = ax - \frac{b}{2a} \qquad \mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x$$

$$= e^{\frac{b^2}{4a^2}}\,\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfc}\left(a\,\xi - \frac{b}{2a}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\,e^{\frac{b^2}{4a^2}}\operatorname{erfc}\left(a\,\xi - \frac{b}{2a}\right) \tag{113}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+bx}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\,e^{\frac{b^2}{4a^2}}\operatorname{erfc}(-\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\,e^{\frac{b^2}{4a^2}}\,2 = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\,e^{\frac{b^2}{4a^2}} \tag{113a}$$

Nyní definujme pomocnou funkci

$$p_n(y,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^{2n}}}\exp\left[-\frac{\left(y-r^n x\right)^2}{2\left(1-r^{2n}\right)}\right] \tag{114}$$

(Porovnáním výrazů (108) a (114) nalezneme $\varphi\left(U_{i+1}\middle|U_i\right) = p_1\left(U_{i+1},U_i\right)$.)

Bude též nutné znát **analytický tvar integrálu** $\int_{-\infty}^{\infty} p_n(y,x)\; p_1(z,y)\,\mathrm{d}y$. Užitím (114) můžeme tento integrál zapsat tvarem

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(y,x)\; p_1(z,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^{2n}}}\exp\left[-\frac{\left(y-r^n x\right)^2}{2\left(1-r^{2n}\right)}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{(z-ry)^2}{2\left(1-r^2\right)}\right]\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^{2n}}\,\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\left(y-r^n x\right)^2}{2\left(1-r^{2n}\right)} - \frac{(z-ry)^2}{2\left(1-r^2\right)}\right]\mathrm{d}y \tag{115a}$$

Výraz v hranaté závorce lze upravit

$$-\frac{\left(y-r^{n}x\right)^{2}}{2\left(1-r^{2n}\right)}-\frac{\left(z-ry\right)^{2}}{2\left(1-r^{2}\right)}=-\frac{\left(1-r^{2}\right)\left(y^{2}-2r^{n}xy+r^{2n}x^{2}\right)+\left(1-r^{2n}\right)\left(z^{2}-2ryz+r^{2}y^{2}\right)}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)}=$$

$$=-\frac{y^{2}-2r^{n}xy+r^{2n}x^{2}-r^{2}y^{2}+2r^{n+2}xy-r^{2n+2}x^{2}+z^{2}-2ryz+r^{2}y^{2}-r^{2n}z^{2}+2r^{2n+1}yz-r^{2n+2}y^{2}}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)}=$$

$$=-\frac{r^{2n}x^{2}\left(1-r^{2}\right)+z^{2}\left(1-r^{2n}\right)+y^{2}\left(1-r^{2n+2}\right)-2ry\left(+r^{n-1}x-r^{n+1}x+z-r^{2n}z\right)}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)}=$$

$$=-\frac{r^{2n}x^{2}\left(1-r^{2}\right)+z^{2}\left(1-r^{2n}\right)+y^{2}\left(1-r^{2n+2}\right)-2ry\left[r^{n-1}x\left(1-r^{2}\right)+z\left(1-r^{2n}\right)\right]}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)}=$$

$$=-\frac{x^{2}\,r^{2n}\left(1-r^{2}\right)+z^{2}\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)}-\frac{y^{2}\left(1-r^{2n+2}\right)-y\,2r\left[r^{n-1}x\left(1-r^{2}\right)+z\left(1-r^{2n}\right)\right]}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)} \qquad (115b)$$

Označíme-li

$$a^{2}=\frac{1-r^{2n+2}}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)} \qquad b=\frac{r\left[r^{n-1}x\left(1-r^{2}\right)+z\left(1-r^{2n}\right)\right]}{\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)} \qquad (115c)$$

můžeme výraz (115b) vyjádřit ve tvaru

$$-\frac{\left(y-r^{n}x\right)^{2}}{2\left(1-r^{2n}\right)}-\frac{\left(z-ry\right)^{2}}{2\left(1-r^{2}\right)}=-\frac{x^{2}\,r^{2n}\left(1-r^{2}\right)+z^{2}\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)}-a^{2}y^{2}+by \qquad (115d)$$

a integrál (115a) lze za užití (115d) a (113a) vyjádřit rovnicí

$$\int_{-\infty}^{\infty}p_{n}\left(y,x\right)\,p_{1}\left(z,y\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^{2n}}\,\sqrt{1-r^{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\left(y-r^{n}x\right)^{2}}{2\left(1-r^{2n}\right)}-\frac{\left(z-ry\right)^{2}}{2\left(1-r^{2}\right)}\right]\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^{2n}}\,\sqrt{1-r^{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^{2}\,r^{2n}\left(1-r^{2}\right)+z^{2}\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)}-a^{2}y^{2}+by\right]\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^{2n}}\,\sqrt{1-r^{2}}}\exp\left[-\frac{x^{2}\,r^{2n}\left(1-r^{2}\right)+z^{2}\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)}\right]\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^{2}y^{2}+by}\,\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^{2n}}\,\sqrt{1-r^{2}}}\exp\left[-\frac{x^{2}\,r^{2n}\left(1-r^{2}\right)+z^{2}\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)}\right]\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp\left(\frac{b^{2}}{4a^{2}}\right) \qquad (115e)$$

Z rovnice (115c) však plyne

$$\frac{b^{2}}{4a^{2}}=\frac{r^{2}\left[r^{n-1}x\left(1-r^{2}\right)+z\left(1-r^{2n}\right)\right]^{2}}{\left(1-r^{2n}\right)^{2}\left(1-r^{2}\right)^{2}}\,\frac{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2}\right)}{4\left(1-r^{2n+2}\right)}=$$

$$=\frac{x^{2}r^{2n}\left(1-r^{2}\right)^{2}+2xzr^{\,2n}\left(1-r^{2}\right)\left(1-r^{2n}\right)+z^{2}r^{2}\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^{2}\right)\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}\right)} \qquad (115f)$$

Dosazením (115c) a (115f) do (115e) konečně vznikne vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(y,x)\, p_1(z,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^{2n}}\,\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{x^2r^{2n}\left(1-r^2\right)+z^2\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^2\right)}\right]\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^{2n}}\,\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{x^2r^{2n}\left(1-r^2\right)+z^2\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^2\right)}\right]\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\pi}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-r^{2n}}\,\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^{2n+2}}}\exp\left[\frac{x^2r^{2n}\left(1-r^2\right)^2+2xzr^{2n}\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)+z^2r^2\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^{2n+2}}}\exp\left[-\frac{x^2r^{2n}\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n+2}\right)+z^2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}\right)}{2\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{-x^2r^{2n}\left(1-r^2\right)^2-2xzr^{2n}\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)-z^2r^2\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}\right)}\right] \tag{115g}$$

Analytický výraz v předchozím vztahu je hledaným řešením integrálu. Jeho tvar je však možno podstatně zjednodušit. Výraz v hranatých závorkách lze totiž upravit

$$-\frac{x^2r^{2n}\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n+2}\right)+z^2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}\right)}{2\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}\right)}-$$

$$-\frac{-x^2r^{2n}\left(1-r^2\right)^2-2xzr^{n+1}\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)-z^2r^2\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}\right)}=$$

$$=-\frac{x^2r^{2n}\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n+2}-1+r^2\right)+z^2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}-r^2+r^{2n+2}\right)-2xzr^{n+1}\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}\right)}=$$

$$=-\frac{x^2r^{2n}\left(1-r^2\right)r^2\left(1-r^{2n}\right)+z^2\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^2\right)-2xzr^{n+1}\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)}{2\left(1-r^2\right)\left(1-r^{2n}\right)\left(1-r^{2n+2}\right)}=$$

$$=-\frac{x^2r^{2n+2}+z^2-2xzr^{n+1}}{2\left(1-r^{2n+2}\right)}=-\frac{\left(z-r^{n+1}x\right)^2}{2\left(1-r^{2(n+1)}\right)} \tag{115h}$$

Dosazením (115h) do (115g) a porovnáním se (114) najdeme konečný výraz pro **analytický tvar integrálu** $\int_{-\infty}^{\infty} p_n(y,x)\, p_1(z,y)\,\mathrm{d}y$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(y,x)\, p_1(z,y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^{2(n+1)}}}\exp\left[-\frac{\left(z-r^{n+1}x\right)^2}{2\left(1-r^{2(n+1)}\right)}\right] \tag{115i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(y,x)\, p_1(z,y)\,\mathrm{d}y = p_{n+1}(z,x) \tag{115}$$

**Výpočet podmíněné hustoty pravděpodobnosti $\varphi\left(\boldsymbol{U_{i+k}}\middle|\boldsymbol{U_i}\right)$.** Rovnici (110) je možné postupně upravovat užitím (114) a (115), a to následujícím způsobem

$$\varphi\left(U_{i+k}\left(U_i\right) = \int\limits_{U_{i+1}=-\infty}^{\infty}\int\limits_{U_{i+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{U_{i+k-1}=-\infty}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k} p_1\left(U_{i+j},U_{i+j-1}\right)\right]\mathrm{d}U_{i+1}\mathrm{d}U_{i+2}\cdots\mathrm{d}U_{i+k-1} =\right.$$

$$= \int\limits_{U_{i+1}=-\infty}^{\infty}\int\limits_{U_{i+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{U_{i+k-1}=-\infty}^{\infty}\left[\prod_{j=3}^{k} p_1\left(U_{i+j},U_{i+j-1}\right)\right] p_1\left(U_{i+1},U_i\right) p_1\left(U_{i+2},U_{i+1}\right)\mathrm{d}U_{i+1}\mathrm{d}U_{i+2}\cdots\mathrm{d}U_{i+k-1} =$$

$$= \int\limits_{U_{i+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{U_{i+k-1}=-\infty}^{\infty}\left[\prod_{j=3}^{k} p_1\left(U_{i+j},U_{i+j-1}\right)\right]\left[\int\limits_{U_{i+1}=-\infty}^{\infty} p_1\left(U_{i+1},U_i\right)\cdot p_1\left(U_{i+2},U_{i+1}\right)\mathrm{d}U_{i+1}\right]\mathrm{d}U_{i+2}\cdots\mathrm{d}U_{i+k-1} =$$

$$= \int\limits_{U_{i+2}=-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{U_{i+k-1}=-\infty}^{\infty}\left[\prod_{j=3}^{k} p_1\left(U_{i+j},U_{i+j-1}\right)\right] p_2\left(U_{i+2},U_i\right)\mathrm{d}U_{i+2}\cdots\mathrm{d}U_{i+k-1} =$$

$$= \int\limits_{U_{i+3}=-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{U_{i+k-1}=-\infty}^{\infty}\left[\prod_{j=4}^{k} p_1\left(U_{i+j},U_{i+j-1}\right)\right]\left[\int\limits_{U_{i+2}=-\infty}^{\infty} p_2\left(U_{i+2},U_i\right)\cdot p_1\left(U_{i+3},U_{i+2}\right)\mathrm{d}U_{i+2}\right]\mathrm{d}U_{i+3}\cdots\mathrm{d}U_{i+k-1} =$$

$$= \int\limits_{U_{i+3}=-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{U_{i+k-1}=-\infty}^{\infty}\left[\prod_{j=4}^{k} p_1\left(U_{i+j},U_{i+j-1}\right)\right] p_3\left(U_{i+3},U_i\right)\mathrm{d}U_{i+3}\cdots\mathrm{d}U_{i+k-1} \qquad (116a)$$

Opakováním tohoto postupu nakonec nalezneme

$$\varphi\left(U_{i+k}\middle|U_i\right) = p_k\left(U_{i+k},U_i\right) \qquad (116b)$$

a užitím (114) konečně

$$\varphi\left(U_{i+k}\middle|U_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^{2k}}}\exp\left[-\frac{\left(U_{i+k}-r^k U_i\right)^2}{2\left(1-r^{2k}\right)}\right] \qquad (116)$$

**Hustota pravděpodobnosti dvojice $\boldsymbol{U_i, U_{i+k}}$.** Vyjdeme-li z rovnice (61) a použijeme-li vztahy (107) a (116), nalezneme hustotu pravděpodobnosti

$$f\left(U_i,U_{i+k}\right) = f\left(U_i\right)\varphi\left(U_{i+k}\middle|U_i\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{U_i^2}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^{2k}}}\exp\left[-\frac{\left(U_{i+k}-r^k U_i\right)^2}{2\left(1-r^{2k}\right)}\right] \qquad (117a)$$

$$f\left(U_i,U_{i+k}\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^{2k}}}\exp\left[-\frac{U_i^2\left(1-r^{2k}\right)}{2\left(1-r^{2k}\right)}-\frac{\left(U_{i+k}-r^k U_i\right)^2}{2\left(1-r^{2n}\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^{2k}}}\exp\left[-\frac{U_i^2-r^{2k}U_i^2+U_{i+k}^2-2r^kU_iU_{i+k}+r^{2k}U_i^2}{2\left(1-r^{2k}\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^{2k}}}\exp\left[-\frac{U_i^2-2r^kU_iU_{i+k}+U_{i+k}^2}{2\left(1-r^{2k}\right)}\right] \qquad (117)$$

**Statistické charakteristiky normovaného procesu.** Normovaný proces $U_i$ má dle (82) až (84) **střední hodnotu** $\overline{U} = 0$, **rozptyl** a **směrodatnou odchylku** $\sigma_U^2 = \sigma_U = 1$. Užitím obecného vztahu (65) platí pro **střední hodnotu kvadrátu**

$$E\left(U_i^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} U_i^2 f\left(U_i\right) \mathrm{d}U_i = \sigma_U^2 + \overline{U}^2 = 1 - 0 = 1 \tag{118}$$

Pro **kovarianci** a **korelační koeficient** platí rovnice (85) a (86) a užitím (117a) a (118) lze odvodit vztah

$$\operatorname{cov}\left(U_i, U_{i+k}\right) = \rho\left(U_i, U_{i+k}\right) = \int_{U_i=-\infty}^{\infty} \int_{U_{i+k}=-\infty}^{\infty} U_i U_{i+k} f\left(U_i, U_{i+k}\right) \mathrm{d}U_i \mathrm{d}U_{i+k} - \overline{U}^2 =$$

$$= \int_{U_i=-\infty}^{\infty} \int_{U_{i+k}=-\infty}^{\infty} U_i U_{i+k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{U_i^2}{2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^{2k}}} \exp\left[-\frac{\left(U_{i+k} - r^k U_i\right)^2}{2\left(1-r^{2k}\right)}\right] \mathrm{d}U_i \mathrm{d}U_{i+k} - 0 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{U_i^2}{2}\right] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} U_{i+k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^{2k}}} \exp\left[-\frac{\left(U_{i+k} - r^k U_i\right)^2}{2\left(1-r^{2k}\right)}\right] \mathrm{d}U_{i+k} \right\} \mathrm{d}U_i =$$

$$V = \frac{U_{i+k} - r^k U_i}{\sqrt{1-r^{2k}}} \qquad U_{i+k} = V\sqrt{1-r^{2k}} + r^k U_i \qquad \mathrm{d}U_{i+k} = \mathrm{d}V\sqrt{1-r^{2k}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{U_i^2}{2}\right] \left\{ \frac{\sqrt{1-r^{2k}}}{\sqrt{1-r^{2k}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(V\sqrt{1-r^{2k}} + r^k U_i\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{V^2}{2}\right] \mathrm{d}V \right\} \mathrm{d}U_i =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{U_i^2}{2}\right] \left\{ \sqrt{1-r^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} V \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{V^2}{2}\right] \mathrm{d}V + r^k U_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{V^2}{2}\right] \mathrm{d}V \right\} \mathrm{d}U_i =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{U_i^2}{2}\right] \left\{ \sqrt{1-r^{2k}} \cdot 0 + r^k U_i \cdot 1 \right\} \mathrm{d}U_i =$$

$$= r^k \int_{-\infty}^{\infty} U_i^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{U_i^2}{2}\right] \mathrm{d}U_i = r^k E\left(U_i^2\right) = r^k \cdot 1 = r^k \tag{119}$$

**Statistické charakteristiky nenormovaného procesu.** Náhodný proces $P_i$ (stacionární, ergodický, Markovský a normální) je charakterizován svou **střední hodnotou** $\overline{P}$ a svým **rozptylem** $\sigma_P^2$, nebo **směrodatnou odchylkou** $\sigma_P$. Pro **kovarianci** platí z (85) za užití (119) vztah

$$\operatorname{cov}\left(P_i, P_{i+k}\right) = \sigma_P^2 \operatorname{cov}\left(U_i, U_{i+k}\right) = \sigma_P^2 r^k \tag{120}$$

Pro **korelační koeficient** z (86) a (119) plyne

$$\rho\left(P_i, P_{i+k}\right) = \rho\left(U_i, U_{i+k}\right) = r^k \tag{121}$$

Konečně připomeňme, že předchozí výrazy platí pro všechna $i$, takže **korelační funkce** je

$$\operatorname{cov}_P\left(k\right) = \operatorname{cov}\left(P_i, P_{i+k}\right) = \sigma_P^2 r^k \tag{120a}$$

a **normovaná korelační funkce** je

$$\rho_P\left(k\right) = \rho\left(P_i, P_{i+k}\right) = r^k \tag{121a}$$

Korelační i normovaná korelační funkce jsou tedy **exponenciálně klesající**.

**Simulace.** Princip simulace, popsaný v minulé kapitole, je pro normální náhodný proces $P_i$ snazší v tom, že postačí pouze jediný generátor normovaného normálního (Gaussova) rozložení. Podmíněnou hustotu pravděpodobnosti φ z rovnice (108) je totiž možné upravit. Zaveďme pomocné náhodné proměnné

$$V_{i+1} = \frac{U_{i+1} - rU_i}{\sqrt{1-r^2}} \text{ kde } \sqrt{1-r^2}\,, rU_i \ldots \text{parametry} \tag{122}$$

$$U_{i+1} = \sqrt{1-r^2}\, V_{i+1} + rU_i \tag{122a}$$

$$\frac{\mathrm{d}U_{i+1}}{\mathrm{d}V_{i+1}} = \sqrt{1-r^2} \tag{122b}$$

Hustota pravděpodobnosti rozložení každé této pomocné náhodné proměnné $V_{i+1}$ je užitím (108)

$$f(V_{i+1}) = \varphi\left(U_{i+1} \middle| U_i\right) \frac{\mathrm{d}U_{i+1}}{\mathrm{d}V_{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{V_{i+1}^2}{2}\right\} \sqrt{1-r^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{V_{i+1}^2}{2}\right\} \tag{123}$$

To však je **hustota pravděpodobnosti normované normální veličiny**. Náhodnou hodnotu veličiny $U_{i+1}$ tedy určíme z rovnice (122a), do které jsme dosadili $V_{i+1}$ vygenerované z normovaného normálního rozložení.

Předpokládejme, že známe hodnoty $\overline{P}, \sigma_P, r$ normálního rozložení pevností $P_i$. Generování hodnot $P_i$ pak může probíhat podle následujícího schématu:

*1)* Užitím (81) pro $i = 1$ nalezneme

$$P_1 = \sigma_P U_1 + \overline{P} \tag{i}$$

přičemž hodnotu $U_1$ vygenerujeme podle (107) generátorem hodnot normovaného normálního rozložení.

*2)* Užitím (81) pro $i = 1,2$ a užitím (122a) pro $i = 1$ postupně najdeme

$$\begin{aligned} P_2 &= \sigma_P U_2 + \overline{P} = \sigma_P\left(\sqrt{1-r^2}\, V_2 + rU_1\right) + \overline{P} = \sigma_P\left(\sqrt{1-r^2}\, V_2 + r\frac{P_1 - \overline{P}}{\sigma_P}\right) + \overline{P} = \\ &= \sigma_P \sqrt{1-r^2}\, V_2 + rP_1 - r\overline{P} + \overline{P} = \\ &= \sigma_P \sqrt{1-r^2}\, V_2 + r\left(P_1 - \overline{P}\right) + \overline{P} \end{aligned} \tag{ii}$$

přičemž hodnotu $P_1$ známe z předchozího bodu a hodnotu $V_2$ vygenerujeme podle (123) generátorem hodnot normovaného normálního rozložení.

*3)* Užitím (81) pro $i = 2,3$ a užitím (122a) pro $i = 2$ analogicky najdeme

$$P_3 = \sigma_P \sqrt{1-r^2}\, V_3 + r\left(P_2 - \overline{P}\right) + \overline{P} \tag{iii}$$

přičemž hodnotu $P_2$ známe z předchozího bodu a hodnotu $V_3$ vygenerujeme podle (123) generátorem hodnot normovaného normálního rozložení.

M

*k)* Užitím (81) pro $i = k-1, k$ a užitím (122a) pro $i = k-1$ najdeme

$$P_k = \sigma_P \sqrt{1-r^2}\, V_k + r\left(P_{k-1} - \overline{P}\right) + \overline{P} \tag{iv}$$

přičemž hodnotu $P_{k-1}$ známe z předchozího bodu a hodnotu $V_k$ vygenerujeme podle (123) generátorem hodnot normovaného normálního rozložení.

$\vdots$

**Součet několika nezávislých normálních Markovských procesů.** Uvažujme součet $M$ nezávislých náhodných procesů dle rovnice (94). Nechť každý z těchto procesů $m = 1, 2, \cdots, M$ je normální s parametry ${}^{(m)}\overline{P},\ {}^{(m)}\sigma_P,\ {}^{(m)}r$. Pro **střední hodnotu**, **rozptyl** a **směrodatnou odchylku** užijeme přímo rovnice (95) až (97). Pro **kovarianci**, resp. **korelační funkci** platí vztah (98), který společně s rovnicí (120a) vede na konečný tvar

$$\mathrm{cov}_P(k) = \mathrm{cov}(P_i, P_{i+k}) = \sum_{m=1}^{M} \mathrm{cov}\left({}^{(m)}P_i,\ {}^{(m)}P_{i+k}\right) = \sum_{m=1}^{M}\left[{}^{(m)}\sigma_p^2\ {}^{(m)}r^k\right] \tag{124}$$

Podobně pro **korelační koeficient**, resp. **normovanou korelační funkci** platí vztah (99), který společně s rovnicí (121a) vede na konečný tvar

$$\rho_P(k) = \rho(P_i, P_{i+k}) = \frac{1}{\sigma_P^2}\sum_{m=1}^{M}\left[{}^{(m)}\sigma_P^2\ \rho\left({}^{(m)}P_i,\ {}^{(m)}P_{i+k}\right)\right] = \frac{1}{\sigma_P^2}\sum_{m=1}^{M}\left[{}^{(m)}\sigma_P^2\ {}^{(m)}r^k\right] \tag{125}$$

## 1.6 Vztah pevnosti a upínací délky při závislých pevnostech.

V kapitole 1.1 jsme v návaznosti na obr. 1 vyjádřili **princip nejslabšího článku**: Nemá-li se přetrhnout celý úsek vlákna s upínací délkou $l$, nesmí se přetrhnout žádný z jeho úseků délky $l_0$. Nechť upínací délku $l$ tvoří $k+1$ úseků délky $l_0$ s pořadovými čísly $i, i+1, i+2, \cdots, i+k$.

$$l = l_0(k+1) \qquad k = \frac{l}{l_0} - 1 \tag{126}$$

(Mezi vzdáleností koncových úseků $x$ a upínací délkou $l$ tedy ze (102) a (126) platí $l = x + l_0$.) Proti kap. 1.1 až 1.3 nyní uvažujeme, že úseky délky $l_0$ mají navzájem **závislé pevnosti**, které splňují předpoklady **náhodného procesu stacionárního, ergodického a Markovského**.

**Rozložení pevností při obecné upínací délce.** Hustota pravděpodobnosti rozložení pevností $P_i, P_{i+1}, \cdots, P_{i+k}$ na úsecích s pořadovými čísly $i, i+1, i+2, \cdots, i+k$ je popsána rovnicí (60). Pravděpodobnost $\left[1 - G\left(P^*, k\right)\right]$, že pevnost každého úseku bude **větší**, než nějaká zvolená hodnota $P^*$ je pak dána výrazem

$$1 - G\left(P^*, k\right) = \int\limits_{P_i = P^*}^{\infty} \int\limits_{P_{i+1} = P^*}^{\infty} \cdots \int\limits_{P_{i+k} = P^*}^{\infty} f\left(P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \cdots, P_{i+k}\right) \mathrm{d}P_i \mathrm{d}P_{i+1} \cdots \mathrm{d}P_{i+k} = \tag{127a}$$

$$= \int\limits_{P_i = P^*}^{\infty} \int\limits_{P_{i+1} = P^*}^{\infty} \cdots \int\limits_{P_{i+k} = P^*}^{\infty} \left[f(P_i) \prod_{j=1}^{k} \varphi\left(P_{i+j}\left(P_{i+j-1}\right)\right)\right] \mathrm{d}P_i \mathrm{d}P_{i+1} \cdots \mathrm{d}P_{i+k} k = 1, 2, \cdots$$

To je však pravděpodobnost, že se úsek délky $l$ **nepřetrhne**.

Pravděpodobnost $G\left(P^*, k\right)$, že úsek délky $l$ se naopak silou $P^*$ **přetrhne** je doplňkem výrazu (127a) do hodnoty 1. Tato pravděpodobnost je **distribuční funkcí** pevnosti úseků s upínací délkou $l = l_0(k+1)$ a platí pro ni

$$G\left(P^*, k\right) = 1 - \int\limits_{P_i = P^*}^{\infty} \int\limits_{P_{i+1} = P^*}^{\infty} \cdots \int\limits_{P_{i+k} = P^*}^{\infty} \left[f(P_i) \prod_{j=1}^{k} \varphi\left(P_{i+j}\left(P_{i+j-1}\right)\right)\right] \mathrm{d}P_i \mathrm{d}P_{i+1} \cdots \mathrm{d}P_{i+k} k = 1, 2, \cdots \tag{127}$$

V distribuční funkci $G\left(P^*,k\right)$ je $P^*$ náhodná **proměnná** a $k$ je **parametr**, vztažený rovnicí (126) k upínací délce $l$, nebo rovnicí (102) ke vzdálenosti koncových úseků $x$.

**Hustota pravděpodobnosti** pevnosti $P^*$ při upínací délce $l$ je derivací předchozího vztahu podle proměnné $P^*$.

$$g\left(P^*,k\right)=\frac{\partial G\left(P^*,k\right)}{\partial P^*}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial P^*}\left\{\int\limits_{P_i=P^*}^{\infty}\int\limits_{P_{i+1}=P^*}^{\infty}\cdots\int\limits_{P_{i+k}=P^*}^{\infty}\left[f\left(P_i\right)\prod_{j=1}^{k}\varphi\left(P_{i+j}\left(P_{i+j-1}\right)\right]\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}\cdots\mathrm{d}P_{i+k}\right\}k=1,2,\cdots \tag{128}$$

Poznamenejme, že pokud upínací délka $l=l_0$, je dle (126) $k=0$, pevnost $P^*=P_i$ a hustota pravděpodobnosti je popsána přímo funkcí

$$g\left(P^*,0\right)=f\left(P_i\right) \tag{128a}$$

Jestliže pevnosti úseků délky $l_0$ splňují nejen předpoklady stacionárního, ergodického a Markovského ale také **normálního (Gaussovského)** náhodného procesu, můžeme vyjádřit hustotu pravděpodobnosti $g\left(P^*,k\right)$ dosazením (103) a (104) do (128) ve tvaru

$$g\left(P^*,k\right)=-\frac{\partial}{\partial P^*}\left\{\int\limits_{P_i=P^*}^{\infty}\int\limits_{P_{i+1}=P^*}^{\infty}\cdots\int\limits_{P_{i+k}=P^*}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P}\exp\left(-\frac{\left(P_i-\overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2}\right)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P\sqrt{1-r^2}}\exp\left(-\frac{\left(P_{i+j}-\left[\overline{P}+r\left(P_{i+j-1}-\overline{P}\right)\right]\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right)\right]\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}\cdots\mathrm{d}P_{i+k}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P\sqrt{1-r^2}}\right)^k\frac{\partial}{\partial P^*}\left\{\int\limits_{P_i=P^*}^{\infty}\int\limits_{P_{i+1}=P^*}^{\infty}\cdots\int\limits_{P_{i+k}=P^*}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{\left(P_i-\overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2}\right)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\prod_{j=1}^{k}\exp\left(-\frac{\left(P_{i+j}-\left[\overline{P}+r\left(P_{i+j-1}-\overline{P}\right)\right]\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right)\right]\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}\cdots\mathrm{d}P_{i+k}\right\}k=1,2,\cdots \tag{129}$$

Jednodušší tvar má hustota pravděpodobnosti **lineárně transformované** veličiny

$$U^*=\frac{P^*-\overline{P}}{\sigma_P}\qquad\left(P^*=\sigma_P U^*+\overline{P}\right) \tag{130}$$

(Povšimněme si, že tato veličina není normovaná. Střední hodnota $\overline{P}$ a směrodatná odchylka $\sigma_P$ se totiž týkají pevností na úsecích délky $l_0$, zatímco $P^*$ je pevnost při upínací délce $l$.)

Pro určení hustoty pravděpodobnosti nejprve označme v rovnici (129) výraz ve složených závorkách symbolem $I$.

$$I=\int\limits_{P_i=P^*}^{\infty}\int\limits_{P_{i+1}=P^*}^{\infty}\cdots\int\limits_{P_{i+k}=P^*}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{\left(P_i-\overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2}\right)\cdot\prod_{j=1}^{k}\exp\left(-\frac{\left(P_{i+j}-\left[\overline{P}+r\left(P_{i+j-1}-\overline{P}\right)\right]\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1-r^2\right)}\right)\right]\mathrm{d}P_i\mathrm{d}P_{i+1}\cdots\mathrm{d}P_{i+k} \tag{131}$$

Ve shodě s (81) zaveďme **normované proměnné**

$$\left.\begin{array}{ll} U_{i+j} = \dfrac{P_{i+j} - \overline{P}}{\sigma_P} & P_{i+j} = \sigma_P U_{i+j} + \overline{P} \\ & \dfrac{\partial P_{i+j}}{\partial U_{i+j}} = \sigma_P \\ & \left( \text{je-li } j_1 \neq j_2 \text{, pak } \dfrac{\partial P_{i+j_1}}{\partial U_{i+j_2}} = 0 \right) \end{array}\right\} j = 0, 1, \cdots, k \tag{132}$$

Vztahy (132) použijeme jako substituce ve vícenásobném integrálu (131). Příslušný Jakobián je

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P_i}{\partial U_i} & \dfrac{\partial P_i}{\partial U_{i+1}} & \cdots & \dfrac{\partial P_i}{\partial U_{i+k}} \\ \dfrac{\partial P_{i+1}}{\partial U_i} & \dfrac{\partial P_{i+1}}{\partial U_{i+1}} & \cdots & \dfrac{\partial P_{i+1}}{\partial U_{i+k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial P_{i+k}}{\partial U_i} & \dfrac{\partial P_{i+k}}{\partial U_{i+1}} & \cdots & \dfrac{\partial P_{i+k}}{\partial U_{i+k}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_P & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_P & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_P \end{vmatrix} = \sigma_P^{k+1} \tag{133}$$

a funkci (131) lze vyjádřit užitím (130), (132) a (133) tvarem

$$I = \int\limits_{P_i = P^*}^{\infty} \int\limits_{P_{i+1} = P^*}^{\infty} \cdots \int\limits_{P_{i+k} = P^*}^{\infty} \left[ \exp\left( -\frac{\left(P_i - \overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2} \right) \cdot \prod_{j=1}^{k} \exp\left( -\frac{\left(P_{i+j} - \left[\overline{P} + r\left(P_{i+j-1} - \overline{P}\right)\right]\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1 - r^2\right)} \right) \right] \mathrm{d}P_i \mathrm{d}P_{i+1} \cdots \mathrm{d}P_{i+k} =$$

$$= \int\limits_{U_i = U^*}^{\infty} \int\limits_{U_{i+1} = U^*}^{\infty} \cdots \int\limits_{U_{i+k} = U^*}^{\infty} \left[ \exp\left( -\frac{U_i^2}{2} \right) \cdot \prod_{j=1}^{k} \exp\left( -\frac{\left(\sigma_P U_{i+j} + r\sigma_P U_{i+j}\right)^2}{2\sigma_P^2\left(1 - r^2\right)} \right) \right] \cdot \left( J \left( \cdot \mathrm{d}U_i \mathrm{d}U_{i+1} \cdots \mathrm{d}U_{i+k} = \right.\right.$$

$$= \sigma_P^{k+1} \int\limits_{U_i = U^*}^{\infty} \int\limits_{U_{i+1} = U^*}^{\infty} \cdots \int\limits_{U_{i+k} = U^*}^{\infty} \left[ \exp\left( -\frac{U_i^2}{2} \right) \cdot \prod_{j=1}^{k} \exp\left( -\frac{\left(U_{i+j} + rU_{i+j}\right)^2}{2\left(1 - r^2\right)} \right) \right] \mathrm{d}U_i \mathrm{d}U_{i+1} \cdots \mathrm{d}U_{i+k} \tag{134}$$

Derivaci funkce $I$ podle $P^*$, obsaženou ve vztahu (129), nyní vyjádříme tvarem

$$\frac{\partial I}{\partial P^*} = \frac{\partial I}{\partial U^*} \frac{\mathrm{d}U^*}{\mathrm{d}P^*} \tag{135}$$

a hustotu pravděpodobnosti $g\left(P^*, k\right)$ můžeme zapsat následujícím způsobem

$$g\left(P^*, k\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P \sqrt{1 - r^2}} \right)^k \frac{\partial I}{\partial P^*} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P \sqrt{1 - r^2}} \right)^k \frac{\partial I}{\partial U^*} \frac{\mathrm{d}U^*}{\mathrm{d}P^*} \tag{136}$$

Hustotu pravděpodobnosti rozložení transformované hodnoty $U^*$ při daném parametru $k$ označíme symbolem $g\left(U^*, k\right)$. Dle pravidel teorie pravděpodobnosti platí mezi hustotami pravděpodobnosti proměnných $U^*$ a $P^*$ vztah

$$g\left(P^*, k\right) = g\left(U^*, k\right) \frac{\mathrm{d}U^*}{\mathrm{d}P^*} \tag{137}$$

Z ekvivalence pravých stran posledních dvou rovnic nalezneme

$$g\left(U^*,k\right)\frac{\mathrm{d}U^*}{\mathrm{d}P^*}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P\sqrt{1-r^2}}\right)^k\frac{\partial I}{\partial U^*}\frac{\mathrm{d}U^*}{\mathrm{d}P^*}$$

$$g\left(U^*,k\right)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P\sqrt{1-r^2}}\right)^k\frac{\partial I}{\partial U^*} \tag{138a}$$

a užitím (134) vznikne výsledný výraz pro **hustotu pravděpodobnosti proměnné** $U^*$.

$$g\left(U^*,k\right)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P\sqrt{1-r^2}}\right)^k\frac{\partial I}{\partial U^*}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P\sqrt{1-r^2}}\right)^k\frac{\partial}{\partial U^*}\left\{\sigma_P^{k+1}\int\limits_{U_i=U^*}^{\infty}\int\limits_{U_{i+1}=U^*}^{\infty}\cdots\int\limits_{U_{i+k}=U^*}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{U_i^2}{2}\right)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\prod_{j=1}^{k}\exp\left(-\frac{\left(U_{i+j}+rU_{i+j}\right)^2}{2\left(1-r^2\right)}\right)\right]\mathrm{d}U_i\mathrm{d}U_{i+1}\cdots\mathrm{d}U_{i+k}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}\right)^k\frac{\partial}{\partial U^*}\left\{\int\limits_{U_i=U^*}^{\infty}\int\limits_{U_{i+1}=U^*}^{\infty}\cdots\int\limits_{U_{i+k}=U^*}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{U_i^2}{2}\right)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\prod_{j=1}^{k}\exp\left(-\frac{\left(U_{i+j}+rU_{i+j}\right)^2}{2\left(1-r^2\right)}\right)\right]\mathrm{d}U_i\mathrm{d}U_{i+1}\cdots\mathrm{d}U_{i+k}\right\} \tag{138}$$

Tato hustota pravděpodobnosti nezávisí ani na $\overline{P}$, ani na $\sigma_P$, ale (kromě parametru *k*) jenom na *r*.

**Simulační výpočty.** Jak je zřejmé, jsou funkce (128) či (129) i (138) poměrně složité. Jejich praktické vyjádření je obtížné a ještě obtížněji se z nich vyjadřují statistické charakteristiky. Tyto informace je naopak snadné získat s využitím **simulačních** postupů.

Uvažujme, že experimentálně zjišťované pevnosti $P_i$ na nějaké (krátké) upínací délce $l_0$ potvrzují předpoklad stacionárního ergodického a Markovského náhodného procesu, nebo součtu několika nezávislých procesů tohoto typu. Uvažujme, že vyhodnocením experimentálních dat byla pro každý náhodný proces stanovena hustota pravděpodobnosti $f$ a podmíněná hustota pravděpodobnosti φ. Pak je možné pevnosti $P_i$ generovat na počítači postupem dle kap. 1.4, nebo v případě Gaussova normálního procesu postupem dle kap. 1.5.

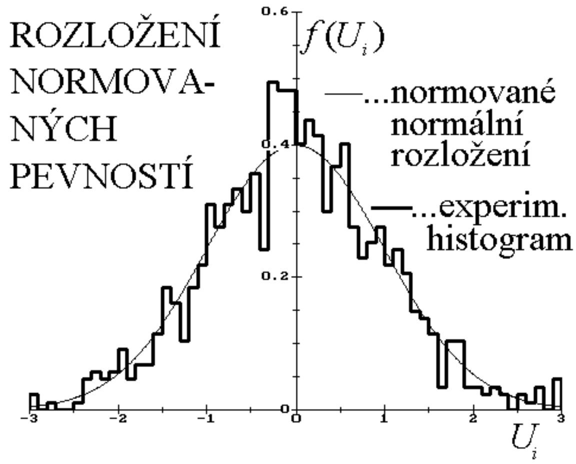
Každých $k+1$ po sobě vygenerovaných hodnot $\left\{P_i,P_{i+1},\cdots P_{i+k}\right\}\equiv\left\{P_{i+j}\right\}_{j=0}^{j=k}$ vyjadřuje pevnosti na jednotlivých po sobě jdoucích úsecích $l_0$, které dohromady tvoří dle (126) délku *l*. Pevnost $P_i^*$ úseku délky *l* je pak charakterizována **nejmenší hodnotou** ze všech hodnot $\left\{P_{i+j}\right\}_{j=0}^{j=k}$.

$$P_i^*=\min\left\{P_{i+j}\right\}_{j=0}^{j=k} \tag{139}$$

Počítačem lze v krátkém čase vygenerovat dostatečné množství pevností $P_i^*$ a z tohoto souboru stanovit pro dané $k$ jak hustotu pravděpodobnosti $g(P^*,k)$, tak i statistické charakteristiky tohoto rozložení. Ze stejných vygenerovaných hodnot lze hodnocení opakovat pro různá $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ a určit tak $g(P^*,k)$ v potřebném rozsahu $k$, t.j. pro potřebné upínací délky $l = l_0, 2l_0, \ldots$ . (Je-li třeba určit rozložení a statistické charakteristiky na upínací délce, která není celistvým násobkem délky $l_0$, je vhodné užít interpolace.)

**Příklad.** Byla studována pevnost bavlněné příze mykané (29,5 tex, zákrut 710 m$^{-1}$). Základní upínací délka byla zvolena $l_0 = 50\,\text{mm}$. (Žádné vlákno nemohlo být drženo současně v obou čelistech dynamometru.) V náhodně vybraném místě příze byly vyznačeny za sebou 50 mm úseky č. $1, 2, \cdots, 60$. Pevnosti byly zjišťovány na 30 úsecích č. $1, 3, 5, \cdots, 59$. Část příze před úsekem č. 1 a úseky č. $2, 4, \cdots, 60$ sloužily pro upnutí v čelistech dynamometru (z každé strany trhaného úseku 25 mm). Měření bylo opakováno na 30 místech příze, náhodně vybraných ze 6 potáčů. Celkem tedy bylo provedeno $30 \cdot 30 = 900$ trhů. (Nekorektní trhy - přetrhy v čelistech a j. - byly z hodnocení vyloučeny.) Základní statistické charakteristiky naměřeného souboru pevností jsou uvedeny v tabulce.

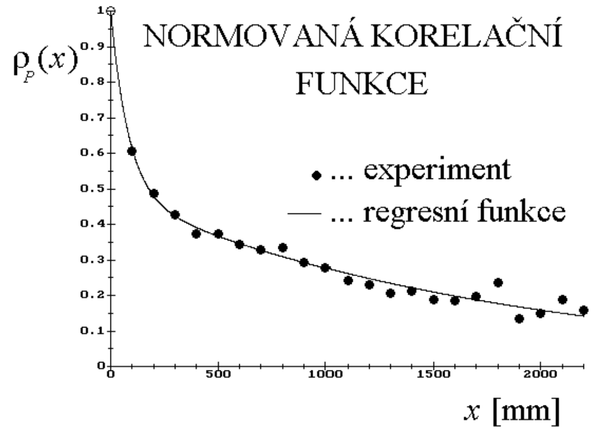
| *veličina* | *označení* | *hodnota* |
|---|---|---|
| upínací délka | $l_0\,[\text{mm}]$ | 50 |
| poč. platných trhů | - | 871 |
| střední pevnost | $\bar{P}\,[\text{N}]$ | 4,5179 |
| směr. odchylka | $\sigma_P\,[\text{N}]$ | 0,5670 |
| variační koef. | $v_P\,[-]$ | 0,1255 (12,55 %) |
| koef. šikmosti | $a\,[-]$ | 0,0162 |
| koef. špičatosti | $e\,[-]$ | 0,3050 |




obr. 10

Naměřené hodnoty $P_i$ byly normovány vztahem $U_i = (P_i - \bar{P})/\sigma_P$ dle (81). Nalezená hustota pravděpodobnosti $f(U_i)$ je vyjádřena histogramem v obr. 10. Ve stejném grafu je vynesena též hustota pravděpodobnosti normovaného normálního rozložení dle (107). Jak je zřejmé z porovnání grafů i z hodnot koeficientů šikmosti a špičatosti (které se příliš neliší od nuly) lze zjištěné rozložení považovat přibližně za normální.

Z naměřených hodnot byly běžným způsobem vypočteny kovariance a poté korelační koeficienty $\rho(U_i, U_{i+2})$, $\rho(U_i, U_{i+4})$, $\rho(U_i, U_{i+6})$, $\cdots$. (Připomeňme, že k disposici byly jen hodnoty $U_1, U_3, U_5, \cdots$.) Podle (86) jsou však korelační koeficienty mezi normovanými veličinami stejné jako mezi původními veličinami, takže $\rho(U_i, U_{i+2}) = \rho(P_i, P_{i+2})$, $\rho(U_i, U_{i+4}) = \rho(P_i, P_{i+4})$, atd. Hodnoty korelačních koeficientů lze vztáhnout také ke vzdálenosti $x$ úseků; dle (102) jsou úseky s pořadovými čísly $i, i+2$ vzdáleny $2 \cdot l_0 = 2 \cdot 50 = 100\,\text{mm}$, úseky s pořadovými čísly $i, i+4$ jsou vzdáleny $4 \cdot l_0 = 4 \cdot 50 = 200\,\text{mm}$ atd. Ve shodě se závěrem kap. 1.4 značíme korelační koeficienty vztažené ke vzdálenosti úseků symbolem $\rho_P(x)$; tedy $\rho(U_i, U_{i+2}) = \rho(P_i, P_{i+2}) = \rho_P(100\,\mathrm{mm})$ atd. Hodnoty korelačních koeficientů jsou ilustrovány na obr. 11. (Přímo z (68) plyne $\rho_P(0\,\mathrm{mm}) = 1$.)




obr. 11

Vyhodnocené koeficienty korelace charakterizují normovanou korelační funkci. Její průběh uspokojivě vyjadřuje regresní vztah ve tvaru součtu dvou exponenciálních funkcí.

$$\rho_P(x) = 0{,}51718 e^{-0{,}011913x} + +0{,}48282 e^{-0{,}00055713x} \qquad \text{(i)}$$

$x \ldots$ vzdálenost v mm

Vzhledem k rozdílu $k$ indexů platí podobně

$$\rho_P(k) = \rho(U_i, U_{i+k}) = 0{,}51718 e^{-0{,}59565k} + +0{,}48282 e^{-0{,}0278565k} \qquad \text{(ii)}$$

kde $k = x_{[\mathrm{mm}]}/50$

Průběh funkce (i) je rovněž ukázán na obr. 11.

Protože celý náhodný proces je normální a jeho normovaná korelační funkce je ve shodě se (125) rovna součtu exponenciálních funkcí, *předpokládáme*, že náhodný proces $P_i$ je součtem **dvou** nezávislých stacionárních, ergodických a Markovských procesů ${}^{(1)}P_i$ a ${}^{(2)}P_i$. Pak je $M = 2$ a platí jak obecnější rovnice (94) až (99), tak i rovnice (124) a (125). V daném případě z rovnice (125) při následném použití (i) plyne

$$\rho_P(k) = \frac{{}^{(1)}\sigma_P^2}{\sigma_P^2}\,{}^{(1)}r^k + \frac{{}^{(2)}\sigma_P^2}{\sigma_P^2}\,{}^{(2)}r^k = 0{,}51718 e^{-0{,}59565k} + 0{,}48282 e^{-0{,}0278565k} \qquad \text{(iii)}$$

Porovnáním odpovídajících si výrazů při použití zjištěné hodnoty $\sigma_P = 0{,}5670\,\mathrm{N}$ nalezneme pro dílčí procesy $(1)$ a $(2)$ hodnoty směrodatných odchylek a korelačních koeficientů mezi sousedními úseky

$$\frac{{}^{(1)}\sigma_P^2}{\sigma_P^2} = 0{,}51718 \qquad {}^{(1)}\sigma_P = \sqrt{0{,}51718}\,\sigma_P = \sqrt{0{,}51718}\cdot 0{,}5670 = 0{,}40776\,\mathrm{N} \qquad \text{(iv)}$$

$$\frac{{}^{(2)}\sigma_P^2}{\sigma_P^2} = 0{,}48282 \qquad {}^{(2)}\sigma_P = \sqrt{0{,}48282}\,\sigma_P = \sqrt{0{,}48282}\cdot 0{,}5670 = 0{,}39398\,\mathrm{N} \qquad \text{(v)}$$

$${}^{(1)}r^k = e^{-0{,}59565k} \qquad {}^{(1)}r = e^{-0{,}59565} = 0{,}55120 \qquad \text{(vi)}$$

$${}^{(2)}r^k = e^{-0{,}0278565k} \qquad {}^{(2)}r = e^{-0{,}0278565} = 0{,}97253 \qquad \text{(vii)}$$

Pro výpočetní simulaci hodnot ${}^{(1)}P_i$ a ${}^{(2)}P_i$ chybí znalost středních hodnot těchto náhodných procesů. Proto se pracovalo s centrovanými náhodnými procesy ${}^{(1)}P_i^{\mathrm{o}}$ a ${}^{(2)}P_i^{\mathrm{o}}$, definovanými dle (75) vztahy

$${}^{(1)}P_i^{\mathrm{o}} = {}^{(1)}P_i - \overline{{}^{(1)}P} \qquad {}^{(2)}P_i^{\mathrm{o}} = {}^{(2)}P_i - \overline{{}^{(2)}P} \qquad \text{(viii)}$$

Ze simulačních vztahů (v závěru předchozí kapitoly) plyne postup generování centrovaných veličin ${}^{(1)}P_i^{\mathrm{o}}$ a ${}^{(2)}P_i^{\mathrm{o}}$. V tomto příkladě platí s využitím (iv) až (vii) následující simulační vztahy.

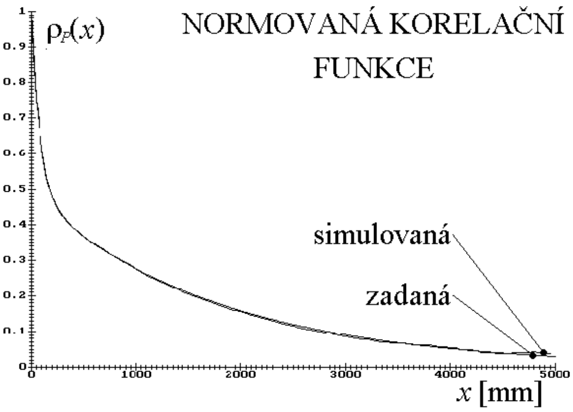
$$\left.\begin{array}{l|l}
{}^{(1)}P_1^\circ = {}^{(1)}\sigma_P U & {}^{(2)}P_1^\circ = {}^{(2)}\sigma_P U \\
{}^{(1)}P_2^\circ = {}^{(1)}\sigma_P \sqrt{1-{}^{(1)}r^2}\,U + {}^{(1)}r\,{}^{(1)}P_1^\circ = & {}^{(2)}P_2^\circ = {}^{(2)}\sigma_P \sqrt{1-{}^{(2)}r^2}\,U + {}^{(2)}r\,{}^{(2)}P_1^\circ \\
\quad = 0,40776\sqrt{1-0,55120^2}\,U + & \quad = 0,39398\sqrt{1-0,97253^2}\,U + \\
\quad + 0,55120\,{}^{(1)}P_1^\circ = & \quad + 0,97253\,{}^{(2)}P_1^\circ = \\
\quad = 0,34022\,U + 0,55120\,{}^{(1)}P_1^\circ & \quad = 0,09171\,U + 0,97253\,{}^{(2)}P_1^\circ \\
\quad \vdots & \quad \vdots \\
{}^{(1)}P_j^\circ = 0,34022\,U + 0,55120\,{}^{(1)}P_{j-1}^\circ & {}^{(2)}P_j^\circ = 0,09171\,U + 0,97253\,{}^{(2)}P_{j-1}^\circ \\
\quad \vdots & \quad \vdots
\end{array}\right\} \qquad \text{(ix)}$$

kde každé $U$ označuje nezávisle vygenerovanou hodnotu normovaného normálního rozložení. Hodnota $P_i$ je pak dle (94), (95), (viii) a při užití zjištěné pevnosti $\overline{P} = 4,5179\,\mathrm{N}$

$$\begin{aligned} P_i &= {}^{(1)}P_i + {}^{(2)}P_i = {}^{(1)}P_i^\circ + \overline{{}^{(1)}P} + {}^{(2)}P_i^\circ + \overline{{}^{(2)}P} = {}^{(1)}P_i^\circ + {}^{(2)}P_i^\circ + \overline{P} = \\ &= {}^{(1)}P_i^\circ + {}^{(2)}P_i^\circ + 4,5179 \quad [\mathrm{N}] \end{aligned} \qquad \text{(x)}$$

Simulace tedy vyžadovala generovat ${}^{(1)}P_i^\circ$ a ${}^{(2)}P_i^\circ$ postupem dle (ix) a vyčíslovat $P_i$ dle (x).

Byly simulovány pevnosti v 10000 částech příze. Každá část byla interpretována jako délka $5000\,\mathrm{mm}$, sestávající ze 100 úseků délky $l_0 = 50\,\mathrm{mm}$. Celkem tedy bylo generová-no $10000 \cdot 100 = 10^6$ pevností $50\,\mathrm{mm}$ úseků. Pro kontrolu byla z vygenerovaných hodnot, stejně jako dříve z hodnot experimentálních, stanovena normovaná korelační funkce. Téměř identický průběh normované korelační funkce zadané vztahem (i) a funkce vygenerované, zná-zorněný na obr. 12, dokládá správnost použitého postupu.




obr. 12

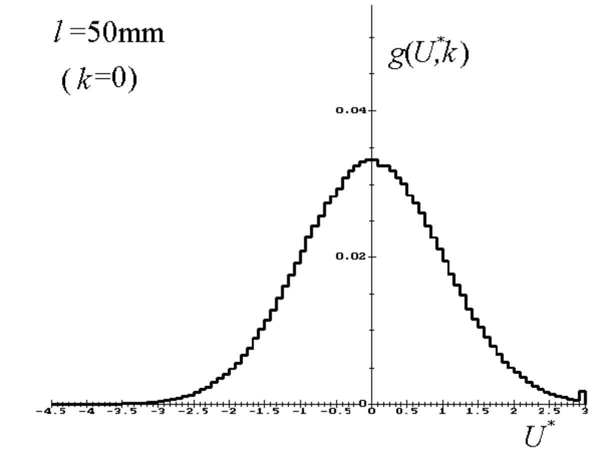
Z vygenerovaných pevností $P_i$ na výchozí upínací délce $50\,\mathrm{mm}$ se dále vyhodnocovaly pevnosti $P_i^*$ na upínacích délkách, daných celým násobkem $50\,\mathrm{mm}$. Podle (126) příslušel ke každé upínací délce parametr $k = (l/l_0) - 1 = \left(l_{[\mathrm{mm}]}/50\right) - 1$. Použité přiřazení ukazuje tabulka

| upínací délka $l$ [mm] | 50 | 100 | 150 | $\cdots$ | 5000 |
|---|---|---|---|---|---|
| parametr $k$ | 0 | 1 | 2 | $\cdots$ | 99 |

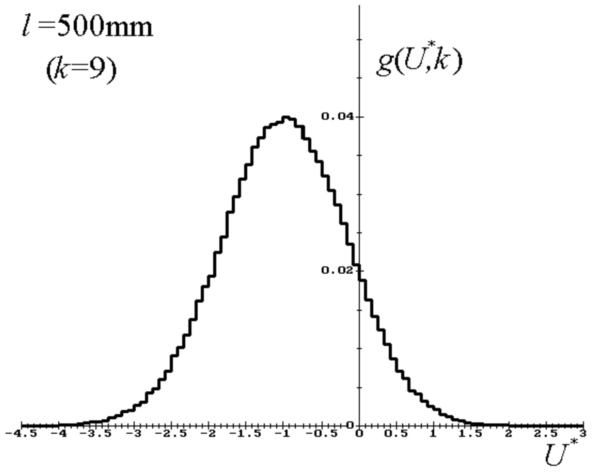
Pevnosti $P_i^*$ příslušející k upínací délce $l$ se vypočítávaly podle vztahu (139). Např. pro upínací délku $150\,\mathrm{mm}$ se pevnosti určovaly z rovnice $P_i^* = \min\left\{P_{i+j}\right\}_{j=0}^{j=2} = \min\left\{P_i, P_{i+1}, P_{i+2}\right\}$, t.j. jako minimum ze všech vygenerovaných trojic po sobě jdoucích hodnot $P_i$.

Vygenerované hodnoty pevností byly též přepočteny na transformované hodnoty dle (130). S užitím konkrétních hodnot základních charakteristik tedy platí

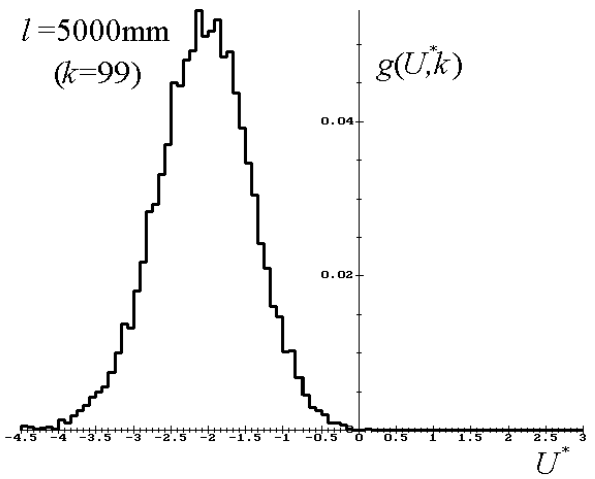
$$U_i^* = \left(P_i^* - \overline{P}\right)/\sigma_P = \left(P_{i[\mathrm{N}]}^* - 4,5179\right)/0,5670 \qquad \text{(xi)}$$




a)




b)




c)
obr. 13

Z množiny simulovaných hodnot $U_i^*$ náhodné proměnné $U^*$ bylo možné vyhodnotit histogramy hustoty pravděpodobnosti $g\left(U^*,k\right)$, kde $k=\left(l_{[\mathrm{mm}]}/50\right)-1$. Tři příklady jsou uvedeny na obr. 13a) až c).

Obr. 13a) zobrazuje hustotu pravděpodobnosti při upínací délce 50 mm ($k=0$). V tomto případě se jedná přímo o normované hodnoty měřených pevností, které - z definice užitého modelu i na obr. 11 - tvoří normované normální rozložení.

Obr. 13b) ukazuje rozložení transformovaných pevností při upínací délce 500 mm ($k=9$). I z běžného pohledu je zřejmé, že střední hodnota se zmenšila a také směrodatná odchylka je menší (histogram je vyšší a užší).

Na obr. 13c) je histogram rozložení transformovaných pevností při upínací délce 5000 mm ($k=99$). Také zde pokračoval dále trend ve snižování střední hodnoty a snižování směrodatné odchylky. Je rovněž možné postřehnout určitou asymetrii rozložení. (Vlevo je poněkud "protáhlejší".)

Méně "hladký" průběh histogramu na obr. 13c) je dán již relativně malým počtem simulovaných úseků. Počet simulovaných trhů totiž závisí na upínací délce či parametru $k$ a je vyjádřen výrazem

$$\left[\begin{matrix} \textit{počet simul.} \\ \textit{částí příze} \end{matrix}\right] \cdot \left[\left(\begin{matrix} \textit{počet úseků} \\ l_0 \ \textit{v 1 části} \end{matrix}\right) - k\right]$$

a v tomto příkladě tedy výrazem (užito (126))

$$10000\left[100-k\right]=10000\left[100-\left(\frac{l}{l_0}-1\right)\right]=$$

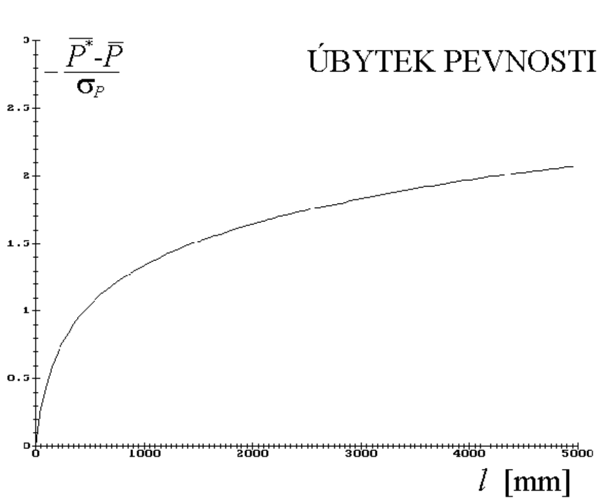
$$=10000\left[101-\frac{l_{[\mathrm{mm}]}}{50}\right]=1{,}01\cdot 10^6-200 l_{[\mathrm{mm}]}$$

Odtud pro délku 50 mm je simulovaný počet trhů $10^6$, pro délku 500 mm je simulovaný počet trhů $9{,}1\cdot 10^5$ a pro upínací délku 5000 mm je simulovaný počet trhů jen $10^4$.

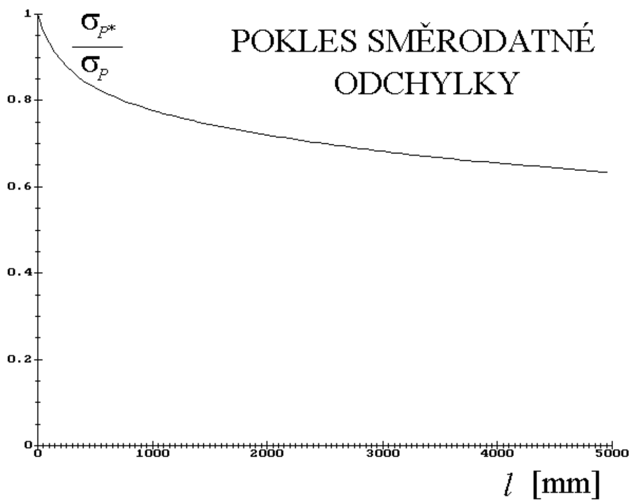
Z vygenerovaných souborů pevností na jednotlivých tržných délkách bylo možné vyjádřit střední hodnotu a směrodatnou odchylku. Výsledky pro některé délky jsou uvedeny v tabulce (sloupce označené "simulace").

| upínací délka $l\,[\mathrm{mm}]$ | střední hodnota $\overline{U^*} = \dfrac{\overline{P^*} - \overline{P}}{\sigma_P} = \dfrac{\overline{P^*}[\mathrm{N}] - 4{,}5179}{0{,}5670}$ | | směrodatná odchylka $\sigma_{U^*} = \dfrac{\sigma_{P^*}}{\sigma_P} = \dfrac{\sigma_{P^*}[\mathrm{N}]}{0{,}5670}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | simulace | aproximace | simulace | aproximace |
| 50 | 0,00 | 0 | 1,00 | 1 |
| 100 | -0,27 | -0,32 | 0,96 | 0,95 |
| 150 | -0,45 | -0,50 | 0,93 | 0,92 |
| 200 | -0,58 | -0,63 | 0,91 | 0,90 |
| 250 | -0,68 | -0,72 | 0,89 | 0,89 |
| 300 | -0,76 | -0,80 | 0,88 | 0,87 |
| 400 | -0,90 | -0,92 | 0,86 | 0,85 |
| 500 | -1,00 | -1,01 | 0,84 | 0,83 |
| 600 | -1,08 | -1,08 | 0,82 | 0,82 |
| 800 | -1,21 | -1,19 | 0,80 | 0,80 |
| 1000 | -1,31 | -1,28 | 0,78 | 0,79 |
| 2000 | -1,63 | -1,53 | 0,72 | 0,74 |
| 3000 | -1,82 | -1,68 | 0,68 | 0,72 |
| 4000 | -1,96 | -1,77 | 0,66 | 0,70 |
| 5000 | -2,07 | -1,85 | 0,63 | 0,69 |

Graficky jsou změny výsledky simulace znázorněny na grafech v obr. 14.




a)




b)

obr. 14

Na délce $50\,\mathrm{mm}$ byla nalezena střední pevnost $4{,}5179\,\mathrm{N}$, t.j. napětí $4{,}5179/29{,}5 = 0{,}15315\,\mathrm{N\,tex^{-1}}$ a směrodatná odchylka $0{,}5670\,\mathrm{N}$, t.j. $0{,}5670/29{,}5 = 0{,}01922\,\mathrm{N\,tex^{-1}}$ (variační koeficient pevnosti 12,55%).

Na upínací délce $500\,\mathrm{mm}$ byla podle (130) predikována pevnost $\overline{P^*} = \sigma_P \overline{U^*} + \overline{P}$ a po dosazení nalezených hodnot se vypočetlo $\overline{P^*} = 0{,}5670 \cdot (-1{,}00) + 4{,}5179 = 3{,}9509\,\mathrm{N}$; odpovídající napětí je $3{,}9509/29{,}5 = 0{,}13393\,\mathrm{N\,tex^{-1}}$. Současně byla predikována směrodatná odchylka $\sigma_{P^*} = \sigma_{U^*}\sigma_P$ a po dosazení nalezených hodnot $\sigma_{P^*} = 0{,}84 \cdot 0{,}5670 = 0{,}47628\,\mathrm{N}$, nebo v hodnotách napětí $0{,}47628/29{,}5 = = 0{,}016145\,\mathrm{N\,tex^{-1}}$ (variační koeficient pevnosti 12,05%)

Analogicky na délce $5000\,\mathrm{mm}$ byla stejným postupem predikována pevnost $3{,}34421\,\mathrm{N}$, t.j. $0{,}11336\,\mathrm{N\,tex^{-1}}$ a směrodatná odchylka $0{,}35721\,\mathrm{N}$, t.j. $0{,}012109\,\mathrm{N\,tex^{-1}}$ (var. koeficient pevnosti 10,68%).

Uvedeným postupem bylo tedy možno predikovat statistické charakteristiky dané příze na různých upínacích délkách. Byly též zkonstruovány empirické vztahy, které aproximují výsledky simulačních výpočtů. Je zajímavé, že pro hrubou orientaci bylo možné užít typ funkcí (31) a (32) resp. (34) a (35), t.j. Peirceovu aproximační formuli, ovšem s jinými parametry. Ve sledovaném příkladě se ukázaly jako nejvhodnější výrazy

$$\sigma_{P^*} = \sigma_P \left(\frac{l}{l_0}\right)^{-\frac{1}{12{,}5}} \qquad \left(\sigma_{U^*} = \frac{\sigma_{P^*}}{\sigma_P} = \left(\frac{l}{l_0}\right)^{-\frac{1}{12{,}5}}\right) \tag{xii}$$

$$\overline{P^*} = \overline{P} + 6\sigma_P \left[\left(\frac{l}{l_0}\right)^{-\frac{1}{12{,}5}} - 1\right] \qquad \left(\overline{U^*} = \frac{\overline{P^*} - \overline{P}}{\sigma_P} = 6\left[\left(\frac{l}{l_0}\right)^{-\frac{1}{12{,}5}} - 1\right]\right) \tag{xiii}$$

Hodnoty vypočtené podle této aproximace jsou rovněž uvedeny v předchozí tabulce (označení "aproximace"). Stanovená aproximace je v daném příkladě přijatelná pro hrubý odhad asi do délky $2000\,\mathrm{mm}$.

# 2. STOCHASTICKÉ MODELOVÁNÍ TAŽNOSTI VLÁKEN A DÉLKOVÝCH TEXTILIÍ PŘI RŮZNÉ UPÍNACÍ DÉLCE

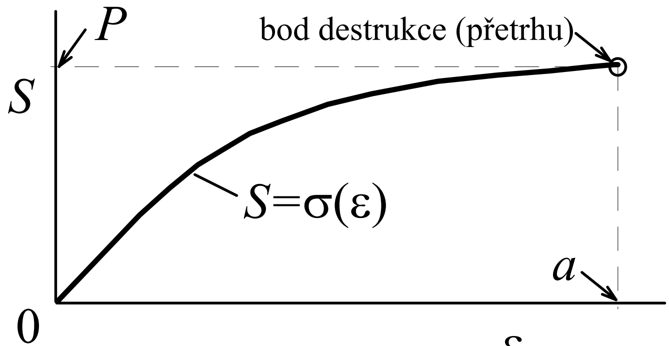
## 2.1 Tahová pracovní křivka a její inverzní funkce

**Síla a deformace.** Uvažujme, že na úsek vlákna, nebo jiné délkové textilie, působí tahová **síla** $S$, která způsobuje **poměrné prodloužení** $\varepsilon$. V okamžiku přetrhu dosáhne síla $S$ právě hodnoty **pevnosti** $P$ (t.j. $S = P$) a poměrné prodloužení $\varepsilon$ je právě **tažností** $a$ (t.j. $\varepsilon = a$). Mezi silou $S$ a poměrným prodloužením $\varepsilon$ existuje funkční závislost

$$S = \sigma(\varepsilon) \qquad \varepsilon \in \langle 0, a \rangle \tag{140}$$

nazývaná **tahová pracovní křivka**. Je schematicky znázorněná na obr. 15. Evidentně platí

$$0 = \sigma(0)\ldots\text{prochází počatkem} \quad P = \sigma(a)\ldots\text{prochází bodem } (a, P) \tag{140a}$$



obr. 15

Tahové pracovní křivky textilních útvarů splňují obvykle *předpoklad*, že jsou **hladké, monotónně rostoucí**. Pak ke každé funkci $\sigma(\varepsilon)$ existuje **inverzní funkce**

$$\varepsilon = \tau(S) \qquad S \in \langle 0, P \rangle \tag{141}$$

Platí tedy $\tau\big[\sigma(\varepsilon)\big] = \varepsilon$ a dle (140a) též

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \tau(0)\ldots\text{prochází počátkem} \\ a &= \tau(P)\ldots\text{prochází bodem } (P, a) \end{aligned}\right\} \tag{141a}$$

**Tahové pracovní křivky definované pevností a tažností.** Průběhy tahových pracovních křivek zkoumaných úseků (stejné upínací délky) jsou obecně rozmanité. Mnohdy však uspokojivě splňují následující *předpoklad:* **Úseky, které mají stejnou pevnost $P$ a tažnost $a$ mají také stejnou tahovou pracovní funkci $\sigma(\varepsilon)$ (a inverzní tahovou pracovní funkci $\tau(\varepsilon)$).** Jinak řečeno, specifický průběh tahové pracovní křivky každého úseku je určen hodnotou jeho pevnosti a tažnosti. Tahové pracovní křivky **všech úseků** lze pak vyjádřit **společnou funkcí** $\overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P, a)$ proměnné $\varepsilon$ a parametrů $P$ a $a$. Lze psát

$$S = \sigma(\varepsilon) = \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P, a) \tag{142}$$

a ze (140a) speciálně

$$0 = \sigma(0) = \overset{\circ}{\sigma}(0, P, a) \qquad P = \sigma(a) = \overset{\circ}{\sigma}(a, P, a) \tag{142a}$$

Inverzní tahovou pracovní křivku lze pak zapsat funkcí $\overset{\circ}{\tau}(S, P, a)$ proměnné $S$ a parametrů $P$ a $a$

$$\varepsilon = \tau(S) = \overset{\circ}{\tau}(S, P, a) \tag{143}$$

a ze (141a) speciálně

$$0 = \tau(0) = \overset{\circ}{\tau}(0, P, a) \qquad P = \tau(P) = \overset{\circ}{\tau}(P, P, a) \tag{143a}$$

**"Vzorová" tahová pracovní křivka.** Podle (142) mají různě pevné a tažné úseky obecně různou tahovou pracovní křivku, resp. dle (143) různou inverzní tahovou pracovní křivku; mají totiž jiné hodnoty $P$ a $a$. (Ze souboru pevností a tažností úseků určujeme m.j. **střední pevnost** $\overline{P}$ a **střední tažnost** $\overline{a}$.) Tahové pracovní křivky všech úseků však často bývají navzájem jakýmsi způsobem **podobné**, t.j. jsou nějakým zvětšeným či zmenšeným obrazem vhodné, pro všechny úseky společné **"vzorové" tahové pracovní křivky** $\overline{\sigma}(\varepsilon)$. Zavádíme ji jako monotónně rostoucí funkci, procházející počátkem a bodem střední pevnosti a střední tažnosti.

$$\left.\begin{array}{l} S=\overline{\sigma}(\varepsilon) \quad \varepsilon\in\left(0,a_{\max}\right( \; a_{\max}\ldots\text{maximální hodnota} \\ \qquad 0=\overline{\sigma}(0)\ldots\text{prochází počátkem} \quad \overline{P}=\overline{\sigma}(\overline{a})\ldots\text{prochází bodem } \left(\overline{a},\overline{P}\right) \end{array}\right\} \tag{144}$$

K této funkci existuje inverzní funkce - **"vzorová" inverzní tahová pracovní křivka**.

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon=\overline{\tau}(S) \quad S\in\left(0,P_{\max}\right( \; P_{\max}\ldots\text{maximální hodnota} \\ \qquad 0=\overline{\tau}(0)\ldots\text{prochází počátkem} \quad \overline{a}=\overline{\tau}\left(\overline{P}\right)\ldots\text{prochází bodem } \left(\overline{P},\overline{a}\right) \end{array}\right\} \tag{145}$$

(Přirozeně platí $\overline{\tau}\left[\overline{\sigma}(\varepsilon)\right]=\varepsilon$ a také $\overline{\sigma}\left[\overline{\tau}(S)\right]=S$.)

Podobnost tahové pracovní křivky jednotlivých úseků se "vzorovou" tahovou křivkou, nebo podobnost inverzní tahové pracovní křivky se "vzorovou" inverzní tahovou pracovní křivkou je možné definovat různě. Zavedeme dvě definice, které budeme nazývat **teorémy podobnosti**.

**Teorém napěťové podobnosti** definujeme následujícím *předpokladem*: **individuální tahovou pracovní křivku každého úseku lze vyjádřit vztahem**

$$S=\sigma(\varepsilon)=k\,\overline{\sigma}(\varepsilon) \qquad \varepsilon\in\langle 0,a\rangle \tag{146}$$

Pro každý úsek lze stanovit hodnotu jeho **individuálního parametru** $k$ ze vztahů (140a) a (146).

$$P=\sigma(a)=k\;\overline{\sigma}(a) \qquad k=\frac{P}{\overline{\sigma}(a)} \tag{147}$$

Užitím (147) ve (146) nalezneme vyjádření pro **tahovou pracovní křivku** ve tvaru

$$S=\frac{P}{\overline{\sigma}(a)}\overline{\sigma}(\varepsilon) \qquad \varepsilon\in\langle 0,a\rangle \tag{148}$$

Povšimněme si, že na pravé straně jsou vedle proměnné ε již jen parametry $P$ a $a$. Funkce (148) je speciálním případem funkce (142), kde $\overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon,P,a)=P\,\overline{\sigma}(\varepsilon)/\overline{\sigma}(a)$ a teorém napěťové podobnosti je speciálním případem tahových pracovních křivek definovaných pevností a tažností.

Pro úplnost uveďme, že vztah (148) lze zapsat tvarem $\overline{\sigma}(\varepsilon)=\left(\overline{\sigma}(a)/P\right)S$ a invertací této funkce - s přihlédnutím ke (145) - nalezneme **inverzní funkci k tahové pracovní křivce**.

$$\overline{\tau}\left[\overline{\sigma}(\varepsilon)\right]=\overline{\tau}\left[\frac{\overline{\sigma}(a)}{P}S\right] \qquad \varepsilon=\overline{\tau}\left[\frac{\overline{\sigma}(a)}{P}S\right] \qquad S\in\langle 0,P\rangle \tag{149}$$

**Teorém deformační podobnosti** definujeme alternativním *předpokladem*: **individuální inverzní tahovou pracovní křivku každého úseku lze vyjádřit vztahem**

$$\varepsilon=\tau(S)=c\,\overline{\tau}(S) \qquad S\in\langle 0,P\rangle \tag{150}$$

Pro každý úsek lze stanovit hodnotu jeho **individuálního parametru** $c$ ze vztahů (141a) a (150).

$$a = \tau(P) = c\,\overline{\tau}(P) \qquad c = \frac{a}{\overline{\tau}(P)} \tag{151}$$

Užitím (151) ve (150) nalezneme vyjádření pro **inverzní tahovou pracovní křivku** ve tvaru

$$\varepsilon = \frac{a}{\overline{\tau}(P)}\overline{\tau}(S) \qquad S \in \langle 0, P\rangle \tag{152}$$

Opět si povšimněme, že na pravé straně jsou vedle proměnné $S$ již jen parametry $P$ a $a$. Funkce (152) je speciálním případem funkce (143), kde $\overset{\circ}{\tau}(S,P,a) = a\,\overline{\tau}(S)/\overline{\tau}(P)$, a proto teorém deformační podobnosti je rovněž speciálním případem tahových pracovních křivek definovaných pevností a tažností.

Pro úplnost uveďme, že vztah (152) lze vyjádřit ve tvaru $\overline{\tau}(S) = \left(\overline{\tau}(P)/a\right)\varepsilon$ a invertací této funkce - s přihlédnutím ke (144) - nalezneme **tahovou pracovní křivku**.

$$\overline{\sigma}\left[\overline{\tau}(S)\right] = \overline{\sigma}\left[\frac{\overline{\tau}(P)}{a}\varepsilon\right] \qquad S = \overline{\sigma}\left[\frac{\overline{\tau}(P)}{a}\varepsilon\right] \qquad \varepsilon \in \langle 0, a\rangle \tag{153}$$

Vztahy (148), (149) jsou obecně odlišné od výrazů (153) a (152), neboť teorém deformační podobnosti je **jiným** typem podobnosti, než je teorém napěťové podobnosti. Oba teorémy jsou splněny současně jenom ve dvou speciálních případech: *1)* jsou-li tahové pracovní křivky všech úseků lineární, nebo *2)* Jsou-li tahové pracovní křivky všech úseků shodného tvaru.

**Lineární tahové pracovní křivky.** Ve zvláštním případě je **tahová pracovní křivka** a **inverzní tahová pracovní křivka** každého úseku **lineární**. Potom mají nutně tvary

$$S = \frac{P}{a}\varepsilon \qquad \varepsilon \in \langle 0, a\rangle \tag{154}$$

$$\varepsilon = \frac{a}{P}S \qquad S \in \langle 0, P\rangle \tag{155}$$

**"Vzorová" tahová pracovní křivka** a **"vzorová" inverzní křivka** musí pak být rovněž lineární (a ovšem dle (145) procházet bodem střední pevnosti a tažnosti). Musí tedy platit

$$\overline{\sigma}(\varepsilon) = \frac{\overline{P}}{\overline{a}}\varepsilon \tag{156}$$

$$\overline{\tau}(S) = \frac{\overline{a}}{\overline{P}}S \tag{157}$$

Vyjádřením $\varepsilon$ ze (156) a jeho dosazením do (154) nalezneme

$$S = \frac{P}{a}\varepsilon = \frac{P}{a}\left(\frac{\overline{a}\,\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\overline{P}}\right) = \frac{P\overline{a}}{a\overline{P}}\overline{\sigma}(\varepsilon) \qquad S = k\,\overline{\sigma}(\varepsilon) \quad \text{kde } k = \frac{P\overline{a}}{a\overline{P}},\ \varepsilon \in \langle 0, a\rangle \tag{158}$$

kde $k$ je individuální parametr úseku. Vztah (158) odpovídá definici (146) teorému **napěťové** podobnosti. Podobně dosazením $S$ ze (157) do (155) nalezneme

$$\varepsilon = \frac{a}{P}S = \frac{a}{P}\left(\frac{\overline{P}\,\overline{\tau}(S)}{\overline{a}}\right) = \frac{a\overline{P}}{P\overline{a}}\overline{\tau}(S) \qquad \varepsilon = c\,\overline{\tau}(S) \quad \text{kde } c = \frac{a\overline{P}}{P\overline{a}},\ S \in \langle 0, P\rangle \tag{159}$$

kde $c = 1/k$ je individuální parametr úseku.

Vztah (159) odpovídá definici (150) teorému **deformační** podobnosti.

Souhrnně tedy **lineární tahové pracovní křivky splňují současně teorém napěťové podobnosti a teorém deformační podobnosti** (s jedinou "vzorovou" funkcí dle (156), či (157) ).

**Shodné tvary tahových pracovních křivek.** V jiném zvláštním případě jsou tvary tahových pracovních křivek všech úseků vyjádřeny **stejnou** (jednou společnou) tahovou pracovní křivkou dle (140) (stejnou funkcí $\sigma$). Také inverzní tahová pracovní křivka (141) je stejná (stejná funkce $\tau$). Křivky jednotlivých úseků se pak odlišují jen koncovými hodnotami pevnosti $P$ a tažnosti $a$, svázanými navíc vazbou $P = \sigma(a)$, resp. $a = \tau(P)$.)

Vyjdeme nejprve ze **"vzorové" tahové pracovní křivky** popsané vztahem

$$\overline{\sigma}(\varepsilon) = \frac{\overline{P}}{\sigma(\overline{a})}\sigma(\varepsilon) \quad \left( \begin{array}{l} \overline{\sigma}(0) = \dfrac{\overline{P}}{\sigma(\overline{a})}\sigma(0) = 0 \ldots \text{prochází počátkem} \\ \overline{\sigma}(\overline{a}) = \dfrac{\overline{P}}{\sigma(\overline{a})}\sigma(\overline{a}) = \overline{P} \ldots \text{prochází bodem } (\overline{a}, \overline{P}) \end{array} \right) \tag{160}$$

(V tomto zvláštním případě je $\sigma$ jediná společná funkce, a proto i $\overline{\sigma}$ dle (160) je jediná společná funkce.) Přímo z předchozího výrazu nalezneme

$$S = \sigma(\varepsilon) = \frac{\sigma(\overline{a})}{\overline{P}}\overline{\sigma}(\varepsilon) = k\,\overline{\sigma}(\varepsilon) \qquad k = \frac{\sigma(\overline{a})}{\overline{P}} \tag{161}$$

kde individuální parametr úseku $k$ je dokonce společný pro všechny úseky. Vztah (161) odpovídá dle (146) teorému **napěťové** podobnosti.

Můžeme vyjít také z jiné **"vzorové" inverzní tahové pracovní křivky**, dané vztahem

$$\overline{\tau}(S) = \frac{\overline{a}}{\tau(\overline{P})}\tau(S) \quad \left( \begin{array}{l} \overline{\tau}(0) = \dfrac{\overline{a}}{\tau(\overline{P})}\tau(0) = 0 \ldots \text{prochází počátkem} \\ \overline{\tau}(\overline{P}) = \dfrac{\overline{a}}{\tau(\overline{P})}\tau(\overline{P}) = \overline{a} \ldots \text{prochází bodem } (\overline{P}, \overline{a}) \end{array} \right) \tag{162}$$

(Tato definice je nezávislá na (160), takže funkce (160) a (162) **nejsou** navzájem inverzní.)
Z předchozího výrazu nalezneme přímo

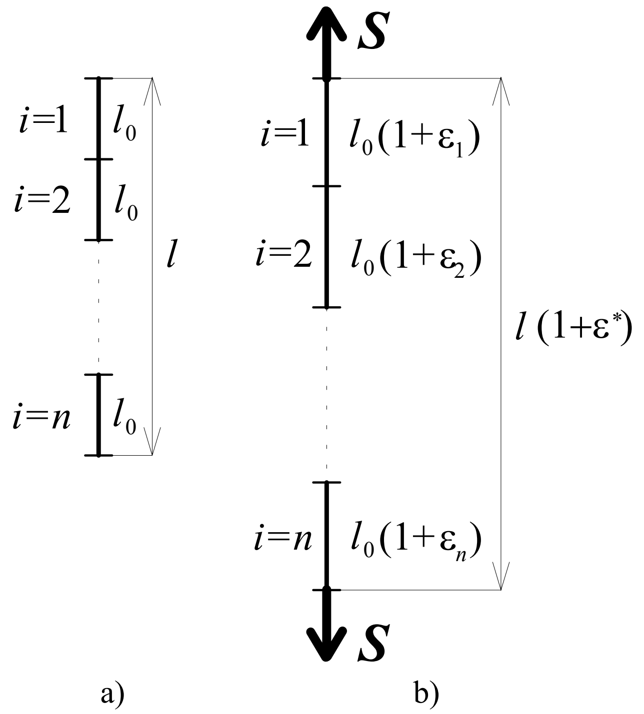
$$\varepsilon = \tau(S) = c\,\overline{\tau}(S) \text{ kde } c = \frac{\tau(\overline{P})}{\overline{a}} \cdots \text{indiv. param. úseku (nyní společný)} \tag{163}$$

což je vztah, který odpovídá definici (150) teorému **deformační** podobnosti.

**Shodné tvary tahových pracovních křivek úseků splňují teorém napěťové podobnosti** (se "vzorovou" tahovou pracovní křivkou (160) ) **a současně teorém deformační podobnosti** (se "vzorovou" inverzní tahovou křivkou (162) ).

## 2.2 Tažnost "dlouhého" úseku.

**Poměrné prodloužení dlouhého úseku.** Na obr. 16a) je **"dlouhý" úsek** (vlákna či jiné délkové textilie) **délky** $l$ tvořený $n$ **"krátkými" úseky délky** $l_0$. Tahová síla $S$ -



obr. 16

obr. 16b) - způsobí poměrné prodloužení $\varepsilon^*$ dlouhého úseku a současně poměrná prodloužení $\varepsilon_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, krátkých úseků. Přímo z obr. 16b) užitím $l = nl_0$ nalezneme

$$l\left(1+\varepsilon^*\right) = \sum_{i=1}^{n} l_0\left(1+\varepsilon_i\right)$$

$$nl_0\left(1+\varepsilon^*\right) = l_0\sum_{i=1}^{n}\left(1+\varepsilon_i\right)$$

$$n + n\varepsilon^* = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\varepsilon_i\right) = n + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$$

$$\varepsilon^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \qquad (164)$$

## Princip ekvivalence a tahová pracovní křivka dlouhého úseku.

V kap.1 byl pro pevnost dlouhého úseku užit tzv. princip nejslabšího článku. Nyní zavedeme *obecnější předpoklad*, nazvaný **princip ekvivalence: Zatížíme-li vnější tahovou silou** $S$ **dlouhý úsek** $l$ (obr. 16)**, pak každý krátký úsek** $l_0$ **se deformuje, nebo destruuje stejně, jako kdybychom jej vyjmuli a samo-statně zatížili stejně velkou vnější tahovou silou** $S$. (Princip nejslabšího článku je evidentně součástí takto formulovaného principu ekvivalence.)

Vyjmeme-li z dlouhého úseku na obr. 16a) *i*-tý - krátký úsek a zkoumáme-li samostatně jeho závislost mezi působící vnější silou $S$ a vzniklým poměrným prodloužením $\varepsilon_i$, nalezneme tahovou pracovní křivku $S = \sigma_i\left(\varepsilon_i\right)$, $\varepsilon_i \in \left\langle 0, a_i\right\rangle$, inverzní tahovou pracovní křivku $\varepsilon_i = \tau_i\left(S\right)$, $S \in \left\langle 0, P_i\right\rangle$, jeho pevnost $P_i$ a tažnost $a_i$.

Pokud platí princip ekvivalence, je možné vyjádřit poměrná prodloužení $\varepsilon_i$ v rovnici (164) takto nalezenými výsledky. **Poměrné prodloužení dlouhého úseku** $\varepsilon^*$ pak je

$$\varepsilon^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i\left(S\right) \quad \text{pokud } \varepsilon_i \in \left\langle 0, a_i\right\rangle \text{ pro všechna } i = 1, 2, \cdots, n \qquad (165)$$

(Je-li $\varepsilon_i > a_i$ je *i*-tý krátký úsek přetržen, funkce $\tau_i\left(S\right)$ a tím i $\varepsilon^*$nejsou definovány.)

Funkce (165) vzájemně přiřazuje sílu $S$ působící na dlouhý úsek (i na všechny jej tvořící krátké úseky - obr. 16b) ) a poměrné prodloužení $\varepsilon^*$ tohoto dlouhého úseku. Je to **inverzní tahová pracovní křivka dlouhého úseku**.

**Pevnost a tažnost dlouhého úseku.** S postupně rostoucí silou $S$ se zvětšuje hodnota poměrného prodloužení $\varepsilon_i = \tau_i\left(S\right)$ každého krátkého úseku. Dle (165) potom roste i hodnota poměrného prodloužení $\varepsilon^*$ dlouhého úseku. Uvažovaný děj skončí v okamžiku, když se (alespoň) jeden z krátkých úseků - jejž nazýváme **nejslabším článkem -** přetrhne; pevnost nejslabšího článku je pevností dlouhého úseku (viz kap. 1). Poměrné prodloužení nejslabšího článku při přetrhu je dáno hodnotou jeho tažnosti. Síla, která přetrhla nejslabší článek však zatěžovala i ostatní krátké úseky, avšak pod úroveň jejich pevnosti. Poměrná prodloužení ostatních krátkých úseků budou proto menší, než jsou jejich tažnosti.

Na obr. 16 jsou krátké úseky označeny pořadovými čísly $i = 1, 2, \cdots, n$ postupně tak, jak jsou za sebou. Je však možné přiřadit jim pořadová čísla též libovolným jiným způsobem (např. "na přeskáčku") a odvozené výrazy, např. (165), zůstanou platné. Pro přehlednější vyjádření proto můžeme přijmout následující *indexovou konvenci*: **nejslabšímu článku je přiřazeno poř. č. 1**. (Označování ostatních úseků není blíže určeno.) Nejslabší článek má tedy tahovou pracovní křivku $S = \sigma_1(\varepsilon_1)$, inverzní tahovou pracovní křivku $\varepsilon_1 = \tau_1(S)$, pevnost $P_1$ , tažnost $a_1$ a platí pro něj ze (140a) a (141a) $P_1 = \sigma_1(a_1)$ a $a_1 = \tau_1(P_1)$.

**Pevnost $P^*$ dlouhého úseku** je nyní vyjádřena jednoduchým zápisem

$$P^* = P_1 \tag{166}$$

**Tažnost $a^*$ dlouhého úseku** je hodnotou poměrného prodloužení $\varepsilon^*$ při zatížení silou odpovídající jeho pevnosti, $S = P^*$. Ze (165) při užití (166) a (141a) pak nalezneme

$$a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i\left(P^*\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i\left(P_1\right) = \frac{1}{n}\left\{\tau_1\left(P_1\right) + \sum_{i=2}^{n}\tau_i\left(P_1\right)\right\} = \frac{1}{n}\left\{a_1 + \sum_{i=2}^{n}\tau_i\left(P_1\right)\right\} \tag{167}$$

Všimněme si, že tažnost dlouhého úseku nezávisí jen na nejslabším článku (jak je tomu u pevnosti), ale na průběhu inverzních tahových pracovních křivek **všech** krátkých úseků. Dále si všimněme, že pro všechna $i = 2, 3, \cdots, n$ platí $\tau_i\left(P_1\right) \le a_i$ .(Tyto úseky nejsou nejslabším článkem, takže $P_1 \le P_i$, což znamená, že $\varepsilon_i = \tau_i\left(P_1\right) \le \tau_i\left(P_i\right) = a_i$.) Z výrazu (167) tedy vyplývá, že - s výjimkou případu stejné pevnosti u všech krátkých úseků - **tažnost dlouhého úseku je vždy menší než střední hodnota tažnosti krátkých úseků**, které jej tvoří.

**Tažnost dlouhého úseku při tahových pracovních křivkách definovaných pevností a tažností.** Jsou-li tahové pracovní křivky krátkých úseků definované jejich pevnostmi a tažnostmi, je možné vyjádřit inverzní tahovou pracovní křivku každého *i*-tého krátkého úseku, $i = 2, 3, \cdots, n$ rovnicí (143).

$$\tau_i(S) = \varepsilon_i = \mathring{\tau}(S, P_i, a_i) \tag{168}$$

Rovnice (167) má pak tvar

$$a^* = \frac{1}{n}\left\{a_1 + \sum_{i=2}^{n}\tau_i\left(P_1\right)\right\} = \frac{1}{n}\left\{a_1 + \sum_{i=2}^{n}\mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right)\right\} \tag{169}$$

Připomeňme, že funkce $\mathring{\tau}$ je společná pro všechny krátké úseky.

**Tažnost dlouhého úseku při deformační podobnosti.** Platí-li pro krátké úseky **teorém deformační podobnosti**, je možné vyjádřit inverzní tahovou pracovní křivku každého *i*-tého krátkého úseku, $i = 2, 3, \cdots, n$ rovnicí (152).

$$\tau_i(S) = \varepsilon_i = \frac{a_i}{\overline{\tau}(P_i)}\overline{\tau}(S) \qquad S \in \langle 0, P_i \rangle \tag{170}$$

Rovnice (167) má pak tvar

$$a^* = \frac{1}{n}\left\{a_1 + \sum_{i=2}^{n}\tau_i(P_1)\right\} = \frac{1}{n}\left\{a_1 + \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{a_i}{\overline{\tau}(P_i)}\overline{\tau}(P_1)\right]\right\} = \frac{1}{n}\left\{a_1 + \overline{\tau}(P_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{\overline{\tau}(P_i)}\right\} \tag{171}$$

Uvažujeme-li **lineární tahové pracovní křivky**, pak "vzorová" inverzní funkce krátkých úseků vyplývá z rovnice (157) a vztah (171) můžeme upravit takto

$$a^* = \frac{1}{n}\left\{a_1 + \left(\frac{\bar{a}}{\overline{P}}P_1\right)\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{\left(\frac{\bar{a}}{\overline{P}}P_i\right)}\right\} = \frac{1}{n}\left\{a_1 + P_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{P_i}\right\} \tag{172}$$

**Shodné inverzní tahové pracovní křivky** $(\tau_1(S) = \tau_2(S) = \ldots = \tau_n(S) = \tau(S))$ lze vyjádřit jedinou společnou funkcí $\tau(S)$ a "vzorová" inverzní funkce pro deformační podobnost plyne ze (162). Vztah (171) pak vyjádříme ve tvaru

$$a^* = \frac{1}{n}\left\{a_1 + \left(\frac{\bar{a}}{\tau(\overline{P})}\tau(P_1)\right)\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{\left(\frac{\bar{a}}{\tau(\overline{P})}\tau(P_i)\right)}\right\} = \frac{1}{n}\left\{a_1 + \tau(P_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{\tau(P_i)}\right\} \tag{173}$$

## 2.3 Rozložení pevností a tažností při stochastické nezávislosti "krátkých" úseků

**Rozložení na krátkých úsecích.** Krátké úseky, vyjímané z dlouhých úseků, mají různou pevnost $P$ a tažnost $a$. Uspořádaná dvojice $(P, a)$ je **náhodným vektorem**, jehož rozložení popisuje dvourozměrná **hustota pravděpodobnosti** $u(P,a)$, kde

$$\left.\begin{array}{l} P \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ a \in (a_{\min}, a_{\max}) \end{array}\right\} \omega \ldots \text{definiční obor hustoty pravděpodobnosti } u(P,a) \tag{174}$$

takže platí

$$\iint_{\omega} u(P,a)\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}a = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}a\right]\mathrm{d}P = 1 \tag{175}$$

**Marginální rozložení pevností** $P$ (t.j. rozložení jen pevností bez ohledu na tažnosti) je popsáno **hustotu pravděpodobnosti**

$$f(P) = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}a \tag{176}$$

nebo **distribuční funkcí**

$$F(P) = \int_{P_{\min}}^{P} f(P)\,\mathrm{d}P = \int_{P_{\min}}^{P}\left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}a\right]\mathrm{d}P \tag{177}$$

Distribuční funkce vyjadřuje pravděpodobnost, že pevnost náhodně vybraného úseku bude menší, než $P$. Pravděpodobnost, že tato pevnost bude naopak větší než $P$ je dána výrazem $1-F(P)$. Užitím vztahů (175), (177) a (176) nalezneme

$$1-F(P)=1-\int_{P_{\min}}^{P} f(P)\,\mathrm{d}P=\int_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}a\right]\mathrm{d}P-\int_{P_{\min}}^{P}\left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}a\right]\mathrm{d}P=$$

$$=\int_{P}^{P_{\max}}\left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}a\right]\mathrm{d}P=\int_{P}^{P_{\max}} f(P)\,\mathrm{d}P \qquad (178)$$

(Poznámka: V kap. 1.1 a dalších je pro $f(P)$ a $F(P)$ užíváno označení $f(P,l_0)$ a $F(P,l_0)$.)

**Podmíněná hustota pravděpodobnosti** $\varphi(a|P_1)$ popisuje rozložení tažností podmnožiny úseků, jejichž **pevnost je právě** $P=P_1$. Obecně platí $u(P,a)=f(P)\,\varphi(a|P)$, takže užitím (176) můžeme psát

$$\varphi(a(P_1)=\frac{u(P_1,a)}{f(P_1)}=\frac{u(P_1,a)}{\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} u(P_1,a)\,\mathrm{d}a} \qquad P_1\ldots\text{parametr} \qquad (179)$$

**Podmíněnou střední hodnotu tažnosti** uvažované podmnožiny úseků označme $\overline{a(P_1)}$. Platí

$$\overline{a(P_1)}=\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a\,\varphi(a|P_1)\,\mathrm{d}a=\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a\frac{u(P_1,a)}{f(P_1)}\,\mathrm{d}a=\frac{1}{f(P_1)}\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a\,u(P_1,a)\,\mathrm{d}a \qquad (180)$$

Konečně **hustota pravděpodobnosti** $u_1(P,a)$ **rozložení podmnožiny těch úseků, jejichž pevnost** $P\geq P_1$ je z teorie pravděpodobnosti a užitím (178) dána tvarem

$$u_1(P,a)=\frac{u(P,a)}{\int_{P_1}^{P_{\max}}\left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}a\right]\mathrm{d}P}=\frac{u(P,a)}{1-F(P_1)} \qquad \begin{array}{l} P\in(P_1,P_{\max})\ldots\text{proměnná} \\ P_1\in(P_{\min},P_{\max})\ldots\text{parametr}\end{array} \qquad (181)$$

**Rozložení na dlouhých úsecích.** Každý dlouhý úsek $l$ je tvořen $n$-ticí krátkých úseků délky $l_0$ podobně, jako na obr. 16a). Obecně mohou být pevnosti a tažnosti těchto krátkých úseků vzájemně stochasticky závislé. (V kap. 1.4 až 1.6 jsou studovány důsledky závislé pevnosti krátkých úseků na pevnost dlouhého úseku.) Někdy však lze přijmout následující *předpoklad nezávislosti*: **Pevnosti a tažnosti všech krátkých úseků** (tvořících dlouhé úseky) **jsou vzájemně stochasticky nezávislé**. (Analogický předpoklad, avšak jen pro pevnosti, byl zaveden již v kap. 1.1; z něj vycházela řešení v kap. 1.2 a 1.3.)

V $n$-tici krátkých úseků, tvořících dlouhý úsek, je vždy alespoň jeden krátký úsek nejméně pevný. Podle konvence přijaté v minulé kapitole přiřazujeme tomuto nejslabšímu článku pořadové číslo 1. (Předpokládáme platnost principu ekvivalence - kap. 2.1 - a tudíž i principu nejslabšího článku.) Podle (166) je pevnost nejslabšího článku i pevností celého dlouhého úseku ($P_1=P^*$). Pro **hustotu pravděpodobnosti** $f_l(P_1)$ **rozložení pevnosti** $P_1$ nejslabších článků dlouhých úseků byl v kap. 1.1 odvozen vztah (7). V nynější symbolice má tvar

$$f_l(P_1)=n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1} \qquad P_1\in(P_{\min},P_{\max}) \qquad (182)$$

(Dřívější $P$ je nyní značeno $P_1$, dřívější $f(P,l)$ je nyní $f_l(P_1)$, dřívější $f(P,l_0)$ je nyní $f(P_1)$, dřívější $F(P,l_0)$ je nyní $F(P_1)$. Kromě toho je $l/l_0 = n$.)

Pro **hustotu pravděpodobnosti** $u_l(P_1,a_1)$ **rozložení pevnosti** $P_1$ **a tažnosti** $a_1$ **nejslabších článků dlouhých úseků** platí z teorie pravděpodobnosti

$$u_l(P_1,a_1) = f_l(P_1)\,\varphi(a_1|P_1) \tag{183}$$

Užitím (182) a (179) ve vztahu (183) pak nalezneme

$$u_l(P_1,a_1) = \left\{n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\right\}\left\{\frac{u(P_1,a_1)}{f(P_1)}\right\} = n\,u(P_1,a_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1} \tag{184}$$

Konečně stanovme hustotu pravděpodobnosti rozložení pevností a tažností u $n$-tic krátkých úseků, jež tvoří dlouhé úseky. Krátkým úsekům příslušejí dvojice $P_i, a_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$, z toho nejslabším článkům dvojice $P_1, a_1$. Rozložení dvojic $P_1, a_1$ popisuje hustota pravděpodobnosti $u_l(P_1,a_1)$, rozložení ostatních dvojic $P_i, a_i,\ i = 2, \cdots, n$ hustoty pravděpodobnosti $u_1(P_i,a_i)$. Při zavedeném předpokladu nezávislosti je **hustota pravděpodobnosti** $\psi(P_1,P_2,\cdots,P_n,a_1,a_2,\cdots,a_n)$ rozložení náhodných proměnných $P_1,P_2,\cdots,P_n,\ a_1,a_2,\cdots,a_n$, dána **součinem** dílčích hustot pravděpodobnosti. S využitím (184) a (181) nalezneme

$$\psi(P_1,P_2,\cdots,P_n,a_1,a_2,\cdots,a_n) = u_l(P_1,a_1)\,u_1(P_2,a_2)\cdots u_1(P_n,a_n) = u_l(P_1,a_1)\prod_{i=2}^{n}u_1(P_i,a_i) =$$

$$= nu(P_1,a_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\prod_{i=2}^{n}\frac{u(P_i,a_i)}{1-F(P_1)} = nu(P_1,a_1)\prod_{i=2}^{n}u(P_i,a_i) = n\prod_{i=1}^{n}u(P_i,a_i) \tag{185}$$

kde

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ a_1 \in (a_{\min}, a_{\max}) \\ \left.\begin{array}{l} P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max}) \end{array}\right\} i = 2, 3, \cdots, n \end{array}\right\} \text{definiční oblast } \kappa \tag{186}$$

## 2.4 Střední hodnota tažnosti "dlouhých" úseků při stochasticky nezávislých "krátkých" úsecích

**Definice střední tažnosti dlouhých úseků.** Tažnost $a^*$ dlouhého úseku závisí v obecném případě dle rovnice (167) nejen na pevnostech a tažnostech krátkých úseků, ale i na jejich inverzních tahových pracovních křivkách $\tau_i$. Pro stanovení **střední hodnoty tažnosti** $\overline{a^*}$ **dlouhých úseků** je v uvažovaném obecném případě nezbytné znát **rozložení pravděpodobností výskytu náhodných funkcí** $\tau_i$. Konkrétní řešení takového problému musí vždy vycházet z nějakých předběžných informací o stochastickém charakteru náhodných funkcí $\tau_i$ a v obecnějších případech bývá obtížné.

Snazší vyjádření nalezneme, jsou-li u krátkých úseků **tahové pracovní křivky definované pevností a tažností** ve smyslu rovnic (142) a (143). Tažnost dlouhého úseku pak je - dle (169) - jen funkcí pevností a tažností jej tvořících krátkých úseků a **střední hodnotu tažnosti dlouhých úseků** při stochasticky nezávislých krátkých úsecích můžeme vyjádřit užitím hustoty pravděpodobnosti $\psi\left(P_1, P_2, \cdots, P_n, a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$ definované rovnicí (185). Platí

$$\overline{a^*} = \int_{\kappa} \ldots \int a^* \psi\left(P_1, P_2, \cdots, P_n, a_1, a_2, \cdots, a_n\right) \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \tag{187}$$

kde κ je oblast integrace dle (186). Dosazením výrazů (169) a (185) do (187) získáme tvar

$$\begin{aligned}\overline{a^*} &= \int_{\kappa} \ldots \int \frac{1}{n} \left\{ a_1 + \sum_{i=2}^{n} \mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right) \right\} \left[ n \prod_{i=1}^{n} u\left(P_i, a_i\right) \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n = \\ &= \int_{\kappa} \ldots \int \left\{ a_1 + \sum_{i=2}^{n} \mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right) \right\} \left[ \prod_{i=1}^{n} u\left(P_i, a_i\right) \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \end{aligned} \tag{188}$$

V opakovaném násobení Π a v integrační oblasti κ můžeme bez újmy na obecnosti **změnit označení** indexu *i* na index *j*. Předchozí vztah lze pak vyjádřit výrazem

$$\begin{aligned}\overline{a^*} &= \int_{\kappa} \ldots \int \left\{ a_1 + \sum_{i=2}^{n} \mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right) \right\} \left[ \prod_{j=1}^{n} u\left(P_j, a_j\right) \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n = \\ &= \int_{\kappa} \ldots \int \left\{ \left[ \prod_{j=1}^{n} u\left(P_j, a_j\right) \right] a_1 + \left[ \prod_{j=1}^{n} u\left(P_j, a_j\right) \right] \left[ \sum_{i=2}^{n} \mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right) \right] \right\} \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n = \\ &= \int_{\kappa} \ldots \int \left\{ a_1 u\left(P_1, a_1\right) \left[ \prod_{j=2}^{n} u\left(P_j, a_j\right) \right] + u\left(P_1, a_1\right) \left[ \prod_{j=2}^{n} u\left(P_j, a_j\right) \right] \left[ \sum_{i=2}^{n} \mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right) \right] \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \end{aligned}$$

nebo přehledněji ve tvaru

$$\overline{a^*} = I_1 + I_2 \tag{189}$$

kde

$$I_1 = \int_{\kappa} \ldots \int a_1 u\left(P_1, a_1\right) \left[ \prod_{j=2}^{n} u\left(P_j, a_j\right) \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \tag{190}$$

$$I_2 = \int_{\kappa} \ldots \int u\left(P_1, a_1\right) \left[ \prod_{j=2}^{n} u\left(P_j, a_j\right) \right] \left[ \sum_{i=2}^{n} \mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right) \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \tag{191}$$

**Úprava integrálů.** Užitím integrační oblasti κ dle (186) nalezneme pro **prvý integrál** $I_1$ ze (190)

$$I_1 = \iint\limits_{\substack{P_1 \in \left(P_{\min}, P_{\max}\right) \\ a_1 \in \left(a_{\min}, a_{\max}\right)}} a_1\, u\left(P_1, a_1\right) \left[ \prod_{j=2}^{n} \iint\limits_{\substack{P_j \in \left(P_1, P_{\max}\right) \\ a_j \in \left(a_{\min}, a_{\max}\right)}} u\left(P_j, a_j\right) \mathrm{d}P_j\, \mathrm{d}a_j \right] \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}a_1 \tag{192}$$

Pro každý člen v součinu Π platí vztah (178) a navazující integrací za užití (180) vznikne

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_{\substack{P_1 \in \left(P_{\min}, P_{\max}\right) \\ a_1 \in \left(a_{\min}, a_{\max}\right)}} a_1\, u\left(P_1, a_1\right) \left[ \prod_{j=2}^{n} \left(1 - F\left(P_1\right)\right) \right] \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}a_1 = \iint\limits_{\substack{P_1 \in \left(P_{\min}, P_{\max}\right) \\ a_1 \in \left(a_{\min}, a_{\max}\right)}} a_1\, u\left(P_1, a_1\right) \left[1 - F\left(P_1\right)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}a_1 = \\ &= \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[1 - F\left(P_1\right)\right]^{n-1} \left[ \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a_1\, u\left(P_1, a_1\right) \mathrm{d}a_1 \right] \mathrm{d}P_1 \end{aligned} \tag{193a}$$

$$I_1 = \int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \left[ \int\limits_{a_{\min}}^{a_{\max}} a_1\, u(P_1, a_1)\, \mathrm{d}a_1 \right] \mathrm{d}P_1 = \int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overline{a(P_1)}\, f(P_1) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{193}$$

(Veličina $\overline{a(P_1)}$, definovaná rovnicí (180), vyjadřuje podmíněnou střední hodnotu tažnosti těch úseků, jejichž pevnost je právě $P_1$.)

Pro **druhý integrál** získáme úpravou vztahu (191) tvar

$$I_2 = \sum_{i=2}^{n} \int_{\kappa} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_1, a_1) \left[ \prod_{j=2}^{n} u(P_j, a_j) \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \tag{194}$$

Veličiny $P_i, a_i$ patří mezi integrační proměnné určitého integrálu, takže při jeho výpočtu vymizí. Proto má v sumaci integrál stejnou hodnotou pro každé $i$. Pak platí

$$I_2 = (n-1) \int_{\kappa} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_1, a_1) \left[ \prod_{j=2}^{n} u(P_j, a_j) \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n$$

$$= (n-1) \int_{\kappa} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_1, a_1)\, u(P_i, a_i) \left[ \prod_{\substack{j=2,3,\cdots n \\ j \neq i}} u(P_j, a_j) \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \tag{195}$$

Užitím (178) a (176) postupně nalezneme

$$I_2 = (n-1) \int\limits_{\substack{P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ a_1 \in (a_{\min}, a_{\max}) \\ P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_1, a_1)\, u(P_i, a_i) \cdot$$

$$\cdot \left[ \prod_{\substack{j=1,2,\cdots n \\ j \neq i}} \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} u(P_j, a_j)\, \mathrm{d}P_j \mathrm{d}a_j \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_i \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_i =$$

$$= (n-1) \int\limits_{\substack{P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ a_1 \in (a_{\min}, a_{\max}) \\ P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_1, a_1)\, u(P_i, a_i) \left[ \prod_{\substack{j=1,2,\cdots n \\ j \neq i}} \left(1 - F(P_1)\right) \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_i \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_i =$$

$$= (n-1) \int\limits_{\substack{P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ a_1 \in (a_{\min}, a_{\max}) \\ P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_1, a_1)\, u(P_i, a_i) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_i \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_i \tag{196a}$$

$$I_2 = (n-1) \iiint\limits_{\substack{P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i) \left[ \int\limits_{a_{\min}}^{a_{\max}} u(P_1, a_1)\, \mathrm{d}a_1 \right] u(P_i, a_i) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i =$$

$$= (n-1) \iiint\limits_{\substack{P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, f(P_1)\, u(P_i, a_i) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \tag{196b}$$

$$I_2 = (n-1)\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \overset{\circ}{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \right] f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1 \tag{196}$$

Integrál v hranaté závorce lze upravit užitím vztahu (181) do tvaru

$$\iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \overset{\circ}{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i = \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \overset{\circ}{\tau}(P_1, P_i, a_i) \left\{ u_1(P_i, a_i)\left[1 - F(P_1)\right] \right\} \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i =$$

$$= \left[1 - F(P_1)\right] \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \overset{\circ}{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u_1(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \tag{197}$$

Připomeňme, že $u_1(P_i, a_i)$ je hustotou pravděpodobnosti rozložení pevnosti $P_i$ a tažnosti $a_i$ těch krátkých úseků, jejichž pevnost je větší než hodnota $P_1$. Výraz $\overset{\circ}{\tau}(P_1, P_i, a_i)$ je inverzní tahovou pracovní křivkou, t.j. je poměrným prodloužením úseku s pevnosti $P_i$ a tažnosti $a_i$, při jeho zatížení silou $P_1$. Dvojný integrál v posledním výrazu je proto **střední hodnota poměrného prodloužení úseků s pevností $P_i > P_1$, při zatížení silou $P_1$**. Tuto veličinu označíme symbolem

$$\overline{\varepsilon(P_1)} = \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \overset{\circ}{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u_1(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \tag{198}$$

Užitím vztahů (198) a (197) ve (196) nalezneme pro integrál $I_2$ výraz

$$I_2 = (n-1)\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \left[1 - F(P_1)\right] \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \overset{\circ}{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u_1(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \right] f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1 =$$

$$= (n-1)\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overline{\varepsilon(P_1)}\, f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{199}$$

**Střední hodnota tažnosti $\overline{a^*}$.** Střední hodnota tažnosti dlouhých úseků je dle rov. (189) součtem integrálů $I_1$ a $I_2$. Užitím (193) a (199) najdeme **obecnou rovnici** pro $\overline{a^*}$.

$$\overline{a^*} = \int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overline{a(P_1)}\, f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 + (n-1)\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overline{\varepsilon(P_1)}\, f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 =$$

$$= \int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \overline{a(P_1)} + (n-1)\overline{\varepsilon(P_1)} \right] f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{200}$$

**Střední tažnost $\overline{a^*}$ při teorému deformační podobnosti.** Ukázali jsme, že zvláštním případem tahových pracovních křivek definovaných pevností a tažností je teorém deformační podobnosti a že z porovnání (143) a (152) plyne $\overset{\circ}{\tau}(S, P, a) = a\,\overline{\tau}(S)/\overline{\tau}(P)$. Platí také

$$\overset{\circ}{\tau}(P_1, P_i, a_i) = \overline{\tau}(P_1)\frac{a_i}{\overline{\tau}(P_i)} \tag{201}$$

Pro střední hodnotu poměrného prodloužení krátkých úseků s pevností $P_i > P_1$ při jejich zatížení silou $P_1$ pak nalezneme z definice (198) za postupného užití (201), (181) a (180)

$$\overline{\varepsilon(P_1)} = \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \tau(P_1) \frac{a_i}{\tau(P_i)} u_1(P_i, a_i)\,\mathrm{d}P_i\,\mathrm{d}a_i = \tau(P_1) \int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a_i\, u_1(P_i, a_i)\,\mathrm{d}a_i}{\tau(P_i)} \mathrm{d}P_i =$$

$$= \tau(P_1) \int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a_i \frac{u(P_i, a_i)}{1 - F(P_1)} \mathrm{d}a_i}{\tau(P_i)} \mathrm{d}P_i = \tau(P_1) \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a_i\, u(P_i, a_i)\,\mathrm{d}a_i}{\tau(P_i)} \mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} =$$

$$= \tau(P_1) \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\overline{a(P_i)}}{\tau(P_i)} f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} \tag{202}$$

Užitím posledního výrazu ve (199) pak najdeme pro integrál $I_2$ výraz

$$I_2 = (n-1) \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \tau(P_1) \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\overline{a(P_i)}}{\tau(P_i)} f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{203}$$

a pro střední tažnost dlouhého úseku z (200)

$$\overline{a^*} = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \overline{a(P_1)} + (n-1)\tau(P_1) \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\overline{a(P_i)}}{\tau(P_i)} f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} \right] f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{204}$$

**Předpoklad souměrných tažností.** V rovnici (200) je pro každé $P_1$ obecně $\overline{a(P_1)} \neq \overline{\varepsilon(P_1)}$. Často je však možné pro všechna $P_1 \in (P_{\min}, P_{\max})$ *předpokládat*, že **střední hodnota tažností úseků, které mají právě pevnost** $P_1$ - t.j. veličina $\overline{a(P_1)}$ - **je stejná, jako střední poměrné prodloužení úseků s pevností** $P_i > P_1$ **zatížených silou** $P_1$ - t.j. veličina $\overline{\varepsilon(P_1)}$. Předpoklad nazveme **předpokladem souměrných tažností**. (Také je možné říci, že průměr tažností právě se přetrhávajících úseků je stejný, jako průměr okamžitých poměrných prodloužení všech pevnějších úseků.) Zavedený předpoklad je vyjádřen rovnicí

$$\overline{a(P_1)} = \overline{\varepsilon(P_1)} \qquad P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \tag{205}$$

Pro střední hodnotu tažnosti dlouhých úseků potom najdeme z (200) vztah

$$\overline{a^*} = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\overline{\varepsilon(P_1)} + (n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right] f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overline{\varepsilon(P_1)}\, n\, f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{206}$$

**Důsledky teorému deformační podobnosti v předpokladu souměrných tažností.** Platí-li vedle předpokladu souměrných tažností **současně** také teorém deformační podobnosti, je možné ve vztahu (205) vyjádřit veličinu $\overline{\varepsilon(P_1)}$ ve formě výrazu (202).

$$\overline{a(P_1)} = \overline{\varepsilon(P_1)} \qquad \overline{a(P_1)} = \overline{\tau}(P_1)\frac{\int_{P_1}^{P_{max}} \frac{\overline{a(P_i)}}{\overline{\tau}(P_i)} f(P_i)\,dP_i}{1-F(P_1)}$$

$$\int_{P_1}^{P_{max}} \frac{\overline{a(P_i)}}{\overline{\tau}(P_i)} f(P_i)\,dP_i = \frac{\overline{a(P_1)}}{\overline{\tau}(P_1)}\left[1-F(P_1)\right]$$

$$\int_{P_1}^{P_{max}} \left[\frac{\overline{a(P_i)}}{\overline{\tau}(P_i)} - 1\right] f(P_i)\,dP_i + \int_{P_1}^{P_{max}} f(P_i)\,dP_i = \frac{\overline{a(P_1)}}{\overline{\tau}(P_1)}\left[1-F(P_1)\right]$$

$$\int_{P_1}^{P_{max}} \left[\frac{\overline{a(P_i)}}{\overline{\tau}(P_i)} - 1\right] f(P_i)\,dP_i + \left[1-F(P_1)\right] = \frac{\overline{a(P_1)}}{\overline{\tau}(P_1)}\left[1-F(P_1)\right]$$

$$\int_{P_1}^{P_{max}} \left[\frac{\overline{a(P_i)}}{\overline{\tau}(P_i)} - 1\right] f(P_i)\,dP_i = \left[\frac{\overline{a(P_1)}}{\overline{\tau}(P_1)} - 1\right]\left[1-F(P_1)\right] \tag{207a}$$

Derivováním předchozí funkce podle $P_1$ nalezneme

$$-\left[\frac{\overline{a(P_1)}}{\overline{\tau}(P_1)} - 1\right] f(P_1) = \frac{d}{dP_1}\left[\frac{\overline{a(P_1)}}{\overline{\tau}(P_1)} - 1\right]\left[1-F(P_1)\right] + \left[\frac{\overline{a(P_1)}}{\overline{\tau}(P_1)} - 1\right]\left[-f(P_1)\right]$$

$$0 = \frac{d}{dP_1}\left[\frac{\overline{a(P_1)}}{\overline{\tau}(P_1)} - 1\right]\left[1-F(P_1)\right] \tag{207b}$$

Protože obecně je $\left[1-F(P_1)\right] \neq 0$, musí být

$$\frac{d}{dP_1}\left[\frac{\overline{a(P_1)}}{\overline{\tau}(P_1)} - 1\right] = 0 \qquad \frac{\overline{a(P_1)}}{\overline{\tau}(P_1)} = K \qquad \overline{a(P_1)} = K\overline{\tau}(P_1) \qquad K\ldots\text{konstanta} \tag{207c}$$

Pro obecné $P$ tak lze psát

$$\overline{a(P)} = K\overline{\tau}(P) \qquad K\ldots\text{konstanta} \tag{207}$$

V tomto případě jsou tedy nejen tahové křivky jednotlivých krátkých úseků deformačně podobné "vzorové" inverzní tahové pracovní křivce, ale také **křivka podmíněných středních hodnot** $\overline{a(P)}$ **je deformačně podobná "vzorové" inverzní tahové pracovní křivce** $\overline{\tau}(P)$ s konstantou úměrnosti $K$.

**Konstantu** $K$ vyjádříme úpravou a následnou integrací ze (180) při užití (207).

$$\frac{1}{f(P)}\int_{a_{min}}^{a_{max}} a\,u(P,a)\,da = K\overline{\tau}(P) \qquad \int_{a_{min}}^{a_{max}} a\,u(P,a)\,da = K\overline{\tau}(P) f(P)$$

$$\int_{P_{min}}^{P_{max}} \left[\int_{a_{min}}^{a_{max}} a\,u(P,a)\,da\right] dP = \int_{P_{min}}^{P_{max}} \left[K\overline{\tau}(P) f(P)\right] dP \qquad \iint\limits_{\substack{P\in(P_{min},P_{max})\\ a\in(a_{min},a_{max})}} a\,u(P,a)\,da\,dP = K\int_{P_{min}}^{P_{max}} \overline{\tau}(P) f(P)\,dP \tag{208a}$$

Levá strana poslední rovnice je však střední hodnotou tažnosti $\bar{a}$, neboť z definice platí $\bar{a} = \iint\limits_{\substack{P\in(P_{\min},P_{\max}) \\ a\in(a_{\min},a_{\max})}} a\,u(P,a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}P$. Z (208a) pak plyne

$$\bar{a} = K\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \bar{\tau}(P)\,f(P)\,\mathrm{d}P \qquad K = \frac{\bar{a}}{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \bar{\tau}(P)\,f(P)\,\mathrm{d}P} \tag{208}$$

Z výrazů (205), (207) a (208) nalezneme

$$\overline{\varepsilon(P_1)} = \overline{a(P_1)} = K\,\bar{\tau}(P_1) = \bar{a}\,\frac{\bar{\tau}(P_1)}{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \bar{\tau}(P)\,f(P)\,\mathrm{d}P} \tag{209}$$

a z (206) pak užitím (209) získáme pro střední tažnost dlouhých úseků výraz

$$\overline{a^*} = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\bar{a}\,\frac{\bar{\tau}(P_1)}{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \bar{\tau}(P)\,f(P)\,\mathrm{d}P}\right] n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1 = \bar{a}\,\frac{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \bar{\tau}(P_1)\,n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1}{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \bar{\tau}(P)\,f(P)\,\mathrm{d}P} \tag{210}$$

**Lineární tahové pracovní křivky.** Mimořádně jednoduchý výsledek nalezneme v případě, kdy vedle všech předchozích předpokladů platí ještě *předpoklad*, že **tahové pracovní křivky krátkých úseků jsou lineární**. Potom je "vzorová" inverzní tahová pracovní křivka určena rovnicí (157), což užitím v rovnici (210) vede k výrazu

$$\overline{a^*} = \bar{a}\,\frac{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \frac{\bar{a}}{\bar{P}}\,P_1\,n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1}{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \frac{\bar{a}}{\bar{P}}\,P\,f(P)\,\mathrm{d}P} = \bar{a}\,\frac{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P_1\,n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1}{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P\,f(P)\,\mathrm{d}P} \tag{211}$$

Jmenovatel je však **střední hodnotou pevnosti krátkých úseků**, $\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P\,f(P)\,\mathrm{d}P = \bar{P}$. Výraz $n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}$ v integrálu čitatele je dle (182) hustotu pravděpodobnosti $f_l(P_1)$ rozložení pevnosti $P_1$ nejslabších článků dlouhých úseků. Integrál je proto střední hodnotou pevnosti nejslabších článků, čili střední hodnotou pevnosti dlouhých úseků. Tuto veličinu můžeme značit $\overline{P^*}$ (nebo také $\overline{P_1}$, protože ze (166) plyne i $\overline{P^*} = \overline{P_1}$). Vztah (211) má tedy tvar

$$\overline{a^*} = \bar{a}\,\frac{\overline{P^*}}{\bar{P}} \qquad \frac{\overline{a^*}}{\bar{a}} = \frac{\overline{P^*}}{\bar{P}} \tag{212}$$

Jak je zřejmé, v tomto lineárním případě střední tažnost dlouhých úseků v poměru ke střední tažnosti krátkých úseků poklesne ve **stejném poměru**, v jakém se zmenší střední pevnost dlouhých úseků vzhledem ke střední pevnosti krátkých úseků.

## 2.5 Rozptyl tažnosti "dlouhých" úseků při stochasticky nezávislých "krátkých" úsecích

Rozptyl tažnosti dlouhých úseků $\left(\sigma_a^*\right)^2$ je možné vyjádřit známým vztahem

$$\left(\sigma_a^*\right)^2 = \overline{\left(a^*\right)^2} - \left(\overline{a^*}\right)^2 \tag{213}$$

Druhý člen v rozdílu je kvadrátem střední hodnoty tažnosti $\overline{a^*}$, popsané v předchozí kapitole. Prvý člen, označený $\overline{\left(a^*\right)^2}$, vyjadřuje dosud nepopsaný **střední kvadrát tažnosti** dlouhých úseků.

**Kvadrát tažnosti dlouhého úseku.** Rovnice (167) vyjadřuje tažnost dlouhého úseku. Kvadrát tažnosti je pak možné vyjádřit vztahem

$$\begin{aligned}
\left(a^*\right)^2 &= \frac{1}{n^2}\left\{a_1 + \sum_{i=2}^{n}\tau_i\left(P_1\right)\right\}^2 = \frac{1}{n^2}\left\{a_1^2 + 2a_1\sum_{i=2}^{n}\tau_i\left(P_1\right) + \left[\sum_{i=2}^{n}\tau_i\left(P_1\right)\right]^2\right\} = \\
&= \frac{1}{n^2}\left\{a_1^2 + 2a_1\sum_{i=2}^{n}\tau_i\left(P_1\right) + \right. \\
&\quad + \tau_2\left(P_1\right)\ \tau_2\left(P_1\right) + \tau_2\left(P_1\right)\ \tau_3\left(P_1\right) + \cdots + \tau_2\left(P_1\right)\ \tau_n\left(P_1\right) + \\
&\quad + \tau_3\left(P_1\right)\ \tau_2\left(P_1\right) + \tau_3\left(P_1\right)\ \tau_3\left(P_1\right) + \cdots + \tau_3\left(P_1\right)\ \tau_n\left(P_1\right) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad \left. + \tau_n\left(P_1\right)\ \tau_2\left(P_1\right) + \tau_n\left(P_1\right)\ \tau_3\left(P_1\right) + \cdots + \tau_n\left(P_1\right)\ \tau_n\left(P_1\right)\right\}
\end{aligned} \tag{214a}$$

V "úhlopříčce" součtu součinů funkcí $\tau$ jsou druhé mocniny těchže funkcí, zatímco ostatní součiny jsou smíšené. Lze proto psát

$$\left(a^*\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left\{a_1^2 + 2a_1\sum_{i=2}^{n}\tau_i\left(P_1\right) + \sum_{i=2}^{n}\left[\tau_i\left(P_1\right)\right]^2 + \sum_{\substack{i=2,\cdots,n \\ h=2,\cdots,n \\ h\neq i}}\left[\tau_i\left(P_1\right)\tau_h\left(P_1\right)\right]\right\} \tag{214}$$

Jsou-li **tahové pracovní křivky krátkých úseků definované jejich pevností** $P_i$ **a tažností** $\varepsilon_i$, lze je vyjádřit dle (168) vztahem $\tau_i\left(S\right) = \mathring{\tau}\left(S, P_i, a_i\right)$. Potom platí

$$\left(a^*\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left\{a_1^2 + 2a_1\sum_{i=2}^{n}\mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right) + \sum_{i=2}^{n}\left[\mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right)\right]^2 + \sum_{\substack{i=2,\cdots,n \\ h=2,\cdots,n \\ h\neq i}}\left[\mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right)\ \mathring{\tau}\left(P_1, P_h, a_h\right)\right]\right\} \tag{215}$$

**Definice středního kvadrátu tažnosti dlouhých úseků.** Pokud jsou tahové pracovní křivky krátkých úseků definované jejich pevností a tažností, lze střední kvadrát vyjádřit vztahem analogickým ke (187).

$$\overline{\left(a^*\right)^2} = \int\underset{\kappa}{\cdots}\int\left(a^*\right)^2\psi\left(P_1, P_2, \cdots, P_n, a_1, a_2, \cdots, a_n\right)\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2\cdots\mathrm{d}P_n\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\cdots\mathrm{d}a_n \tag{216}$$

Dosazením hustoty pravděpodobnosti ze (185) a kvadrátu tažnosti z (215) vznikne vztah

$$\overline{\left(a^*\right)^2} = \int_{\kappa}\cdots\int \frac{1}{n^2}\left\{ a_1^2 + 2a_1 \sum_{i=2}^{n} \mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right) + \sum_{i=2}^{n}\left[\mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right)\right]^2 + \sum_{\substack{i=2,\cdots,n \\ h=2,\cdots,n \\ h\neq i}} \left[\mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right)\, \mathring{\tau}\left(P_1, P_h, a_h\right)\right] \right\} \cdot$$

$$\cdot\, nu\left(P_1, a_1\right)\left[\prod_{i=2}^{n} u\left(P_i, a_i\right)\right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \quad (217a)$$

nebo také

$$\overline{\left(a^*\right)^2} = \frac{1}{n} J_1 + \frac{2}{n} J_2 + \frac{1}{n} J_3 + \frac{1}{n} J_4 \tag{217}$$

kde, při záměně původního indexu $i$ za index $j$ v součinu $\Pi$, značíme

$$J_1 = \int_{\kappa}\cdots\int a_1^2 u\left(P_1, a_1\right)\left[\prod_{j=2}^{n} u\left(P_j, a_j\right)\right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \tag{218}$$

$$J_2 = \int_{\kappa}\cdots\int a_1 \left[\sum_{i=2}^{n} \mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right)\right] u\left(P_1, a_1\right)\left[\prod_{j=2}^{n} u\left(P_j, a_j\right)\right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \tag{219}$$

$$J_3 = \int_{\kappa}\cdots\int \left\{\sum_{i=2}^{n}\left[\mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right)\right]^2\right\} u\left(P_1, a_1\right)\left[\prod_{j=2}^{n} u\left(P_j, a_j\right)\right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \tag{220}$$

$$J_4 = \int_{\kappa}\cdots\int \left\{ \sum_{\substack{i=2,\cdots,n \\ h=2,\cdots,n \\ h\neq i}} \left[\mathring{\tau}\left(P_1, P_i, a_i\right)\, \mathring{\tau}\left(P_1, P_h, a_h\right)\right] \right\} u\left(P_1, a_1\right)\left[\prod_{j=2}^{n} u\left(P_j, a_j\right)\right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \tag{221}$$

**První integrál $J_1$**, daný rov. (218), je podobný integrálu $I_1$ dle (190); v integrované funkci je však $a_1^2$ místo původního $a_1$. Postupem analogickým k úpravě $I_1$ do tvaru (193a) najdeme pro první integrál vztah

$$J_1 = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[1 - F\left(P_1\right)\right]^{n-1} \left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a_1^2\, u\left(P_1, a_1\right) \mathrm{d}a_1\right] \mathrm{d}P_1 \tag{222}$$

Podobně, jako je podmíněná střední hodnota tažnosti zavedena rovnicí (180), lze zavést **podmíněnou střední hodnotu kvadrátu tažnosti krátkých úseků** s pevností právě $P = P_1$.

$$\overline{a^2\left(P_1\right)} = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a^2\, \varphi\left(a \middle| P_1\right) \mathrm{d}a = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a^2\, \frac{u\left(P_1, a\right)}{f\left(P_1\right)} \mathrm{d}a = \frac{1}{f\left(P_1\right)} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a^2\, u\left(P_1, a\right) \mathrm{d}a \tag{223}$$

Užitím (223) v (222) vznikne

$$J_1 = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overline{a^2\left(P_1\right)}\, f\left(P_1\right)\left[1 - F\left(P_1\right)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{224}$$

**Druhý integrál $J_2$**, určený rov. (219), je podobný integrálu $I_2$ dle (191); integrovaná funkce je však navíc násobena členem $a_1$. Postupem analogickým k úpravě $I_2$ do tvaru (196a) najdeme pro druhý integrál vztah

$$J_2 = (n-1) \int_{\substack{P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ a_1 \in (a_{\min}, a_{\max}) \\ P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \cdots \int a_1 \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_1, a_1)\, u(P_i, a_i) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_i \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_i \qquad (225)$$

Postupným užitím (180), (181) a (198) v posledním výrazu nalezneme

$$J_2 = (n-1) \iiint_{\substack{P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i) \left[ \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a_1\, u(P_1, a_1)\, \mathrm{d}a_1 \right] u(P_i, a_i) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i =$$

$$= (n-1) \iiint_{\substack{P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, \overline{a(P_1)}\, f(P_1)\, u(P_i, a_i) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i =$$

$$= (n-1) \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \iint_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \right] \overline{a(P_1)}\, f(P_1) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1 =$$

$$= (n-1) \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \left[1 - F(P_1)\right] \iint_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u_1(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \right] \overline{a(P_1)}\, f(P_1) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1 =$$

$$= (n-1) \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overline{\varepsilon(P_1)}\, \overline{a(P_1)}\, f(P_1) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \qquad (226)$$

**Třetí integrál $J_3$,** určený rov. (220), je podobný integrálu $I_2$ dle (191); v integrované funkci je však veličina $\mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)$ v druhé mocnině. Postupem analogickým k úpravě $I_2$ do tvaru (196) najdeme pro třetí integrál vztah

$$J_3 = (n-1) \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \iint_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \left[ \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i) \right]^2 u(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \right] f(P_1) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1 \qquad (227)$$

Užitím (181) nalezneme výraz

$$J_3 = (n-1) \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \left[1 - F(P_1)\right] \iint_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \left[ \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i) \right]^2 u_1(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \right] f(P_1) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-2} \mathrm{d}P_1 =$$

$$= (n-1) \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \iint_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \left[ \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i) \right]^2 u_1(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \right] f(P_1) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \qquad (228)$$

Rovnicí (198) jsme zavedli střední hodnotu poměrného prodloužení úseků s pevností $P_i > P_1$, zatížených silou $P_1$. Podobně můžeme zavést také **střední hodnotu kvadrátu poměrného**

**prodloužení krátkých úseků s pevností $P_i > P_1$, zatížených silou $P_1$.** Pro tuto veličinu platí v analogii ke (198) definiční vztah

$$\overline{\varepsilon^2(P_1)} = \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \left[ \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i) \right]^2 u_1(P_i, a_i) \mathrm{d}P_i \, \mathrm{d}a_i \tag{229}$$

Užitím (229) v (228) získáme tvar

$$J_3 = (n-1) \int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overline{\varepsilon^2(P_1)} f(P_1) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{230}$$

## Čtvrtý integrál $J_4$, určený rov. (221), lze postupně upravovat.

$$J_4 = \sum_{\substack{i=2,\cdots,n \\ h=2,\cdots,n \\ h \neq i}} \int\limits_{\kappa} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, \mathring{\tau}(P_1, P_h, a_h) u(P_1, a_1) \left[ \prod_{j=2}^{n} u(P_j, a_j) \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n =$$

$$= \sum_{\substack{i=2,\cdots,n \\ h=2,\cdots,n \\ h \neq i}} \int\limits_{\kappa} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, \mathring{\tau}(P_1, P_h, a_h) u(P_1, a_1) u(P_i, a_i) u(P_h, a_h) \left[ \prod_{\substack{j=2,\cdots,n \\ j \neq i \\ j \neq h}} u(P_j, a_j) \right] \cdot$$

$$\cdot \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n \tag{231}$$

Veličiny $P_i, a_i, P_h, a_h$ jsou integrační proměnné určitého integrálu. Po provedení vlastní integrace vymizí a vícenásobný integrál v (231) bude mít pro každou dvojici indexů $i$ a $h$ stejnou hodnotu. Sumace v (231) má celkem $(n-1)^2 - (n-1)$ členů, což lze zapsat tvarem $(n-1)^2 - (n-1) = = (n-1)\left[(n-1) - 1\right] = (n-1)(n-2)$. Výraz (231) tak lze vyjádřit s přihlédnutím ke (178) ve tvaru

$$J_4 = (n-1)(n-2) \int\limits_{\kappa} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, \mathring{\tau}(P_1, P_h, a_h) u(P_1, a_1) u(P_i, a_i) u(P_h, a_h) \left[ \prod_{\substack{j=2,\cdots,n \\ j \neq i \\ j \neq h}} u(P_j, a_j) \right] \cdot$$

$$\cdot \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \cdots \mathrm{d}P_n \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n =$$

$$= (n-1)(n-2) \int\limits_{\substack{P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ a_1 \in (a_{\min}, a_{\max}) \\ P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max}) \\ P_h \in (P_1, P_{\max}) \\ a_h \in (a_{\min}, a_{\max})}} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, \mathring{\tau}(P_1, P_h, a_h) u(P_1, a_1) u(P_i, a_i) u(P_h, a_h) \cdot$$

$$\cdot \left[ \prod_{\substack{j=2,\cdots,n \\ j \neq i \\ j \neq h}} \iint\limits_{\substack{P_j \in (P_1, P_{\max}) \\ a_j \in (a_{\min}, a_{\max})}} u(P_j, a_j) \mathrm{d}P_j \mathrm{d}a_j \right] \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_i \mathrm{d}P_h \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_i \mathrm{d}a_h =$$

$$= (n-1)(n-2) \int\limits_{\substack{P_1 \in (P_{\min}, P_{\max}) \\ a_1 \in (a_{\min}, a_{\max}) \\ P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max}) \\ P_h \in (P_1, P_{\max}) \\ a_h \in (a_{\min}, a_{\max})}} \cdots \int \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, \mathring{\tau}(P_1, P_h, a_h) u(P_1, a_1) u(P_i, a_i) u(P_h, a_h) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-3} \cdot$$

$$\cdot \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_i \mathrm{d}P_h \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_i \mathrm{d}a_h$$

$$J_4 = (n-1)(n-2)\int\limits_{P_{min}}^{P_{max}} \left[ \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{max}) \\ a_i \in (a_{min}, a_{max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \right] \left[ \iint\limits_{\substack{P_h \in (P_1, P_{max}) \\ a_h \in (a_{min}, a_{max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_h, a_h)\, u(P_h, a_h)\, \mathrm{d}P_h\, \mathrm{d}a_h \right] \cdot$$

$$\cdot \left[ \int\limits_{a_{min}}^{a_{max}} u(P_1, a_1)\, \mathrm{d}a_1 \right] \cdot \left[1 - F(P_1)\right]^{n-3} \mathrm{d}P_1 \qquad (232)$$

Konečně užitím (181), (198) a (176) najdeme

$$J_4 = (n-1)(n-2)\int\limits_{P_{min}}^{P_{max}} \left[ \left[1 - F(P_1)\right] \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{max}) \\ a_i \in (a_{min}, a_{max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u_1(P_i, a_i)\, \mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}a_i \right] \cdot$$

$$\cdot \left[ \left[1 - F(P_1)\right] \iint\limits_{\substack{P_h \in (P_1, P_{max}) \\ a_h \in (a_{min}, a_{max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_h, a_h)\, u_1(P_h, a_h)\, \mathrm{d}P_h\, \mathrm{d}a_h \right] \left[ \int\limits_{a_{min}}^{a_{max}} u(P_1, a_1)\, \mathrm{d}a_1 \right] \cdot \left[1 - F(P_1)\right]^{n-3} \mathrm{d}P_1 =$$

$$= (n-1)(n-2)\int\limits_{P_{min}}^{P_{max}} \left[ \left[1 - F(P_1)\right] \overline{\varepsilon(P_1)} \right] \left[ \left[1 - F(P_1)\right] \overline{\varepsilon(P_1)} \right] \left[ f(P_1) \right] \cdot \left[1 - F(P_1)\right]^{n-3} \mathrm{d}P_1 =$$

$$= (n-1)(n-2)\int\limits_{P_{min}}^{P_{max}} \left[ \overline{\varepsilon(P_1)} \right]^2 f(P_1) \left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \qquad (233)$$

**Střední kvadrát tažnosti dlouhých úseků.** Hodnotu $\overline{a^*}$ lze vyjádřit ze vztahu (217) dosazením $J_1$ až $J_4$ ze vztahů (224), (226), (230) a (233). Tak najdeme

$$\overline{\left(a^*\right)^2} = \frac{1}{n} J_1 + \frac{2}{n} J_2 + \frac{1}{n} J_3 + \frac{1}{n} J_4 = \frac{1}{n^2}\left\{ n J_1 + 2n J_2 + n J_3 + n J_4 \right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left\{ \int\limits_{P_{min}}^{P_{max}} \overline{a^2(P_1)}\, nf(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 + 2(n-1) \int\limits_{P_{min}}^{P_{max}} \overline{\varepsilon(P_1)}\; \overline{a(P_1)}\, nf(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 + \right.$$

$$\left. + (n-1) \int\limits_{P_{min}}^{P_{max}} \overline{\varepsilon^2(P_1)}\, nf(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 + (n-1)(n-2) \int\limits_{P_{min}}^{P_{max}} \left[\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2 nf(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \int\limits_{P_{min}}^{P_{max}} \left\{ \overline{a^2(P_1)} + 2(n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\;\overline{a(P_1)} + (n-1)\overline{\varepsilon^2(P_1)} + (n-1)(n-2)\left[\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2 \right\} \cdot$$

$$\cdot nf(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \qquad (234)$$

Pro další úpravy je rozumné zavést **podmíněný rozptyl tažnosti $\sigma_a^2(P_1)$ krátkých úseků s pevností $P_1$**. Z matematické statistiky plyne

$$\sigma_a^2(P_1) = \overline{a^2(P_1)} - \left[\overline{a(P_1)}\right]^2 \qquad \overline{a^2(P_1)} = \sigma_a^2(P_1) + \left[\overline{a(P_1)}\right]^2 \qquad (235)$$

Podobně zavedeme **rozptyl poměrného prodloužení krátkých úseků s pevností $P_i > P_1$, zatížených silou $P_1$.**

$$\sigma_\varepsilon^2(P_1) = \overline{\varepsilon^2(P_1)} - \left[\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2 \qquad \overline{\varepsilon^2(P_1)} = \sigma_\varepsilon^2(P_1) + \left[\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2 \qquad (236)$$

Užitím posledních dvou výrazů nalezneme pro složenou závorku ve vztahu (234) tvar

$$\overline{a^2(P_1)}+2(n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\,\overline{a(P_1)}+(n-1)\overline{\varepsilon^2(P_1)}+(n-1)(n-2)\left[\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2=$$

$$=\left\{\sigma_a^2(P_1)+\left[\overline{a(P_1)}\right]^2\right\}+2(n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\,\overline{a(P_1)}+(n-1)\left\{\sigma_\varepsilon^2(P_1)+\left[\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2\right\}+$$

$$+(n-1)\left[(n-1)-1\right]\left[\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2=$$

$$=\sigma_a^2(P_1)+\left[\overline{a(P_1)}\right]^2+2(n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\,\overline{a(P_1)}+(n-1)\sigma_\varepsilon^2(P_1)+(n-1)\left[\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2+$$

$$+(n-1)^2\left[\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2-(n-1)\left[\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2=$$

$$=\left[\overline{a(P_1)}+(n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2+\left[\sigma_a^2(P_1)+(n-1)\sigma_\varepsilon^2(P_1)\right] \qquad (237)$$

Dosazením (237) do (234) vznikne

$$\overline{\left(a^*\right)^2}=\frac{1}{n^2}\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left\{\left[\overline{a(P_1)}+(n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2+\left[\sigma_a^2(P_1)+(n-1)\sigma_\varepsilon^2(P_1)\right]\right\}nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1=$$

$$=\frac{1}{n^2}\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\overline{a(P_1)}+(n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2 nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1+$$

$$+\frac{1}{n^2}\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\sigma_a^2(P_1)+(n-1)\sigma_\varepsilon^2(P_1)\right]nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1 \qquad (238)$$

**Rozptyl tažnosti dlouhých úseků** lze nyní vyjádřit z rovnice (213) dosazením výrazů (238) a (200). Tak nalezneme

$$\left(\sigma_a^*\right)^2=\overline{\left(a^*\right)^2}-\left(\overline{a^*}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n^2}\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\overline{a(P_1)}+(n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2 nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1+$$

$$+\frac{1}{n^2}\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\sigma_a^2(P_1)+(n-1)\sigma_\varepsilon^2(P_1)\right]nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1-$$

$$-\frac{1}{n^2}\left\{\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\overline{a(P_1)}+(n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right]nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1\right\}^2 \qquad (239)$$

**Logická interpretace vztahu (239).** Tažnost $a^*$ dlouhého úseku je dle (169) a (168) aritmetickým průměrem $n$ nezávislých veličin: tažnosti $a_1$ nejslabšího článku a $(n-1)$ poměrných prodloužení $\varepsilon_i=\mathring{\tau}(S,P_i,a_i)$ ostatních krátkých úseků (úseků s pevnostmi $P_i\geq P_1$).

Uvažujme všechny **dlouhé úseky jejichž pevnost je právě** $P_1$. (Pak veličina $a_1$ má hustotu pravděpodobnosti $\varphi(a_1|P_1)$ dle (179), veličiny $\varepsilon_i=\mathring{\tau}(S,P_i,a_i)$ mají hustoty pravděpodobnosti $u_1(P_i,a_i)$ dle (181). Pro **podmíněnou střední hodnotu tažnosti dlouhých úseků** majících pevnosti

$P_1$, t.j. pro veličinu $\overline{a^*(P_1)}$, nalezneme podle obecných pravidel statistiky ze vztahu (169) s přihlédnutím k definicím (180) a (198) výraz

$$\overline{a^*(P_1)} = E_1\left(a^*\right) = E_1\left\{\frac{1}{n}\left[a_1 + \sum_{i=2}^{n} \overset{o}{\tau}(P_1, P_i, a_i)\right]\right\} = \frac{1}{n}\left\{E_1(a_1) + \sum_{i=2}^{n} E_1\left[\overset{o}{\tau}(P_1, P_i, a_i)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\overline{a(P_1)} + \sum_{i=2}^{n} \overline{\varepsilon(P_1)}\right] = \frac{1}{n}\left[\overline{a(P_1)} + (n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right] \tag{240}$$

($E_1$ je operátorem podmíněné střední hodnoty při daném $P_1$. Užité symboly viz rov. (180), (198).)

Protože veličiny $a_1$ a $\overset{o}{\tau}(S, P_i, a_i)$, $i = 2, 3, \cdots, n$, jsou vzájemně **stochasticky nezávislé**, můžeme užitím obecných pravidel statistiky vyjádřit **podmíněný rozptyl tažnosti dlouhých úseků** (majících pevnosti $P_1$), t.j. veličinu $\left[\sigma^*(P_1)\right]^2$, ze vztahu (169). Platí

$$\left[\sigma^*(P_1)\right]^2 = D_1\left\{\frac{1}{n}\left[a_1 + \sum_{i=2}^{n} \overset{o}{\tau}(P_1, P_i, a_i)\right]\right\} = \frac{1}{n^2}\left\{D_1(a_1) + \sum_{i=2}^{n} D_1\left[\overset{o}{\tau}(P_1, P_i, a_i)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\sigma_a^2(P_1) + \sum_{i=2}^{n} \sigma_\varepsilon^2(P_1)\right\} = \frac{1}{n^2}\left[\sigma_a^2(P_1) + (n-1)\,\sigma_\varepsilon^2(P_1)\right] \tag{241}$$

($D_1$ je operátorem podmíněného rozptylu při daném $P_1$. Užité symboly viz rov. (235), (236).)

Pevnosti $P_1$ (nejslabších článků a současně dlouhých úseků) jsou náhodné proměnné s hustotou pravděpodobnosti $f_l(P_1)$ dle (182). **Střední hodnotu** $E\left\{\left[\sigma^*(P_1)\right]^2\right\}$ **podmíněného rozptylu** $\sigma^{*2}(P_1)$ proto můžeme vyjádřit užitím (241) a (182) ve tvaru

$$E\left\{\left[\sigma^*(P_1)\right]^2\right\} = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\sigma^*(P_1)\right]^2 f_l(P_1)\,\mathrm{d}P_1 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\sigma_a^2(P_1) + (n-1)\sigma_\varepsilon^2(P_1)\right] n\, f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{242}$$

($E$ zde označuje operátor střední hodnoty přes všechna $P_1$.) Podobně pro **střední hodnotu podmíněných středních hodnot** nalezneme z (240) a (182)

$$\overline{a^*} = E\left[\overline{a^*(P_1)}\right] = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overline{a^*(P_1)}\, f_l(P_1)\,\mathrm{d}P_1 =$$

$$= \frac{1}{n}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\overline{a(P_1)} + (n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right] n\, f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{243}$$

(Jak bylo možné očekávat, má veličina $E\left[\overline{a^*(P_1)}\right]$ též význam střední hodnoty tažnosti dlouhých úseků $\overline{a^*}$ - srovnej s (200).)

**Střední kvadrát veličiny** $\overline{a^*(P_1)}$ nalezneme analogicky.

$$E\left[\left(\overline{a^*(P_1)}\right)^2\right] = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left(\overline{a^*(P_1)}\right)^2 f_l(P_1)\,\mathrm{d}P_1 = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \frac{1}{n^2}\left[\overline{a(P_1)} + (n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2 n\, f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\overline{a(P_1)} + (n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2 n\, f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{244}$$

Pro **rozptyl podmíněných středních hodnot** $\overline{a^*(P_1)}$ platí podle obecných pravidel statistiky

$$D\left\{\overline{a^*(P_1)}\right\} = E\left[\left(\overline{a^*(P_1)}\right)^2\right] - \left\{E\left[\overline{a^*(P_1)}\right]\right\}^2 \tag{245a}$$

a následným užitím vztahů (243) a (244) vznikne

$$D\left\{\overline{a^*(P_1)}\right\} = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\overline{a(P_1)} + (n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right]^2 n f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 -$$

$$-\frac{1}{n^2}\left\{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\overline{a(P_1)} + (n-1)\overline{\varepsilon(P_1)}\right] n f(P_1)\left[1 - F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1\right\}^2 \tag{245}$$

Dosazením (242) a (245) do (239) získáme pro rozptyl tažnosti na dlouhých délkách tvar

$$\left(\sigma_a^*\right)^2 = E\left[\sigma^{*2}(P_1)\right] + D\left\{\overline{a^*(P_1)}\right\} \tag{246}$$

**Rozptyl tažnosti na dlouhých délkách je tedy součtem střední hodnoty podmíněných rozptylů a rozptylu podmíněných středních hodnot**, což je ve smyslu obecných pravidel matematické statistiky očekávaný výsledek.

**Vyjádření veličin $\overline{a(P_1)}, \sigma_a^2(P_1), \overline{\varepsilon(P_1)}, \sigma_\varepsilon^2(P_1)$.** Pro výpočet rozptylu tažnosti dlouhých úseků $\left(\sigma_a^*\right)^2$ vztahem (239) je nutno vyjádřit veličiny $\overline{a(P_1)}$, $\sigma_a^2(P_1)$, $\overline{\varepsilon(P_1)}$ a $\sigma_\varepsilon^2(P_1)$. Lze postupovat následujícím způsobem:

*1)* Pro podmíněnou střední hodnotu $\overline{a(P_1)}$ tažnosti užijeme vztah (180).

*2)* Podmíněný rozptyl tažnosti $\sigma_a^2(P_1)$ vyjádříme z (235) za užití (223) a (180)

$$\sigma_a^2(P_1) = \frac{1}{f(P_1)}\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a^2\, u(P_1, a)\,\mathrm{d}a - \left[\frac{1}{f(P_1)}\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a\, u(P_1, a)\,\mathrm{d}a\right]^2 \tag{247}$$

*3)* Pro podmíněnou střední hodnotu $\overline{\varepsilon(P_1)}$ poměrného prodloužení užijeme rovnici (198).

*4)* Rozptyl podmíněných poměrných prodloužení $\sigma_\varepsilon^2(P_1)$ vyjádříme z (236) za užití (229) a (198) s následným dosazením (181).

$$\sigma_\varepsilon^2(P_1) = \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max})\\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \left[\mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\right]^2 u_1(P_i, a_i)\,\mathrm{d}P_i\,\mathrm{d}a_i - \left[\iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max})\\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u_1(P_i, a_i)\,\mathrm{d}P_i\,\mathrm{d}a_i\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{1 - F(P_1)}\iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max})\\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \left[\mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\right]^2 u(P_i, a_i)\,\mathrm{d}P_i\,\mathrm{d}a_i -$$

$$-\left[\frac{1}{1 - F(P_1)}\iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max})\\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)\, u(P_i, a_i)\,\mathrm{d}P_i\,\mathrm{d}a_i\right]^2 \tag{248}$$

(Všimněme si, že veličiny $\overline{a(P_1)}$ a $\sigma_a^2(P_1)$ nezávisí na tahových pracovních křivkách, zatímco veličiny $\overline{\varepsilon(P_1)}$, $\sigma_\varepsilon^2(P_1)$ podle (198) a (248) na tahových pracovních křivkách $\mathring{\tau}(P_1, P_i, a_i)$ závisí.

Předpoklady o tahových pracovních křivkách proto mohou ovlivnit pouze výpočet veličin $\overline{\varepsilon(P_1)}$ a $\sigma_\varepsilon^2(P_1)$.)

**Rozptyl tažnosti dlouhých úseků při teorému deformační podobnosti.** Teorém deformační podobnosti lze vyjádřit rovnicí (201). Odtud vyplývá možnost vyjádřit podmíněnou střední hodnotu $\overline{\varepsilon(P_1)}$ a rozptyl podmíněných poměrných prodloužení $\sigma_\varepsilon^2(P_1)$ - t.j. bod *3)* a *4)* z předchozího odstavce - jiným způsobem:

*3)* Pro podmíněnou střední hodnotu $\overline{\varepsilon(P_1)}$ poměrného prodloužení užijeme již dříve odvozenou rovnici (202).

*4)* Pro stanovení rozptylu podmíněných poměrných prodloužení $\sigma_\varepsilon^2(P_1)$ vyjádříme nejprve střední hodnotu kvadrátu poměrného prodloužení krátkých úseků s pevností $P_i > P_1$, zatížených silou $P_1$, t.j. veličinu $\overline{\varepsilon^2(P_1)}$. Vznikne dosazením (201) do (229) a úpravou za užití (181) a (223)

$$\overline{\varepsilon^2(P_1)} = \iint\limits_{\substack{P_i \in (P_1, P_{\max}) \\ a_i \in (a_{\min}, a_{\max})}} \left[\overline{\tau}(P_1)\frac{a_i}{\overline{\tau}(P_i)}\right]^2 u_1(P_i, a_i)\,\mathrm{d}P_i\,\mathrm{d}a_i = \left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a_i^2\, u_1(P_i, a_i)\,\mathrm{d}a_i}{\left[\overline{\tau}(P_i)\right]^2}\,\mathrm{d}P_i =$$

$$= \left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a_i^2 \frac{u(P_i, a_i)}{1 - F(P_1)}\,\mathrm{d}a_i}{\left[\overline{\tau}(P_i)\right]^2}\,\mathrm{d}P_i = \left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a_i^2\, u(P_i, a_i)\,\mathrm{d}a_i}{\left[\overline{\tau}(P_i)\right]^2}\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} =$$

$$= \left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\overline{a^2(P_i)}}{\left[\overline{\tau}(P_i)\right]^2} f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} \qquad (249)$$

Vyjádříme-li ještě $\overline{a^2(P_i)}$ z (235), nalezneme

$$\overline{\varepsilon^2(P_1)} = \left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\sigma_a^2(P_i) + \left[\overline{a(P_i)}\right]^2}{\left[\overline{\tau}(P_i)\right]^2} f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} =$$

$$= \left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\sigma_a^2(P_i)}{\left[\overline{\tau}(P_i)\right]^2} f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} + \left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \left[\frac{\overline{a(P_i)}}{\overline{\tau}(P_i)}\right]^2 f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} \qquad (250)$$

Rozptyl $\sigma_\varepsilon^2(P_1)$ vyjádříme dosazením (202) a (250) do výrazu (236).

$$\sigma_\varepsilon^2(P_1) = \left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\sigma_a^2(P_i)}{\left[\overline{\tau}(P_i)\right]^2} f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} + \left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \left[\frac{\overline{a(P_i)}}{\overline{\tau}(P_i)}\right]^2 f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)} - \left[\overline{\tau}(P_1) \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \frac{\overline{a(P_i)}}{\overline{\tau}(P_i)} f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1 - F(P_1)}\right]^2$$

$$\sigma_\varepsilon^2(P_1)=\left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2\left\{\frac{\int\limits_{P_1}^{P_{\max}}\left[\frac{\sigma_a(P_i)}{\overline{\tau}(P_i)}\right]^2 f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1-F(P_1)}+\frac{\int\limits_{P_1}^{P_{\max}}\left[\frac{\overline{a(P_i)}}{\overline{\tau}(P_i)}\right]^2 f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1-F(P_1)}-\left[\frac{\int\limits_{P_1}^{P_{\max}}\frac{\overline{a(P_i)}}{\overline{\tau}(P_i)}f(P_i)\,\mathrm{d}P_i}{1-F(P_1)}\right]^2\right\} \tag{251}$$

**Rozptyl tažnosti dlouhých úseků při souměrných tažnostech krátkých úseků.** V předchozí kapitole byl definován předpoklad souměrných tažností vztahem (205) jako rovnost $\overline{a(P_1)}=\overline{\varepsilon(P_1)}$. Užitím této rovnosti v (239) nalezneme

$$\begin{aligned}\left(\sigma_a^*\right)^2 &= \int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\overline{a(P_1)}\right]^2 nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1-\left\{\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\overline{a(P_1)}\,nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1\right\}^2+\\ &\quad+\frac{1}{n^2}\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\sigma_a^2(P_1)+(n-1)\sigma_\varepsilon^2(P_1)\right]nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1=\\ &=D\left[\overline{a(P_1)}\right]+\frac{1}{n^2}\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\sigma_a^2(P_1)+(n-1)\sigma_\varepsilon^2(P_1)\right]nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1\end{aligned} \tag{252}$$

kde symbol

$$\begin{aligned}D\left[\overline{a(P_1)}\right]&=\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\overline{a(P_1)}\right]^2 nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1-\left\{\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\overline{a(P_1)}\,nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1\right\}^2=\\ &=E\left\{\left[\overline{a(P_1)}\right]^2\right\}-\left\{E\left[\overline{a(P_1)}\right]\right\}^2=E\left\{\left[\overline{a(P_1)}\right]^2\right\}-\left\{\overline{a^*}\right\}^2\end{aligned} \tag{253}$$

vyjadřuje **rozptyl podmíněných středních hodnot tažnosti**. ($D$ je operátor rozptylu a $E$ operátor střední hodnoty.) Připomeňme, že pevnosti $P_1$ nejslabších úseků mají hustotu pravděpodobnosti popsánu vztahem (182). První člen je tedy střední hodnotou kvadrátu veličiny $\overline{a(P_1)}$

$$E\left\{\left[\overline{a(P_1)}\right]^2\right\}=\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\overline{a(P_1)}\right]^2 nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1 \tag{254}$$

a druhý vyjadřuje kvadrát střední hodnoty této veličiny. Přitom dle (200) s užitím (205) je

$$E\left[\overline{a(P_1)}\right]=\int\limits_{P_{\min}}^{P_{\max}}\overline{a(P_1)}\,nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1 \tag{255}$$

Také můžeme zavést **podmíněný variační koeficient tažností** krátkých úseků

$$v_a(P)=\frac{\sigma_a(P)}{\overline{a(P)}} \tag{256}$$

a podobně **variační koeficient poměrných prodloužení** krátkých úseků pevnějších než $P$, při zatížení tahovou silou $P$. Za užití (205) nalezneme

$$v_\varepsilon(P)=\frac{\sigma_\varepsilon(P)}{\overline{\varepsilon(P)}}=\frac{\sigma_\varepsilon(P)}{\overline{a(P)}} \tag{257}$$

(Variační koeficienty jsou uvažovány jako prostý poměr, nikoli v %.)

Užitím (256) a (257) v (252) můžeme též psát

$$\left(\sigma_a^*\right)^2 = D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{1}{n^2}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\overline{a(P_1)}\right]^2 \left[v_a^2(P_1) + (n-1)v_\varepsilon^2(P_1)\right] nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{258}$$

**Rozptyl tažnosti dlouhých úseků při teorému deformační podobnosti a současně souměrných tažnostech krátkých úseků.** V daném případě jsme pro podmíněnou střední hodnotu $\overline{\varepsilon(P_1)} = \overline{a(P_1)}$ odvodili již dříve rovnici (209), nebo též vztah (205) a (207). Platí tedy

$$\overline{\varepsilon(P_1)} = \overline{a(P_1)} = K\,\overline{\tau}(P_1) \tag{259}$$

kde konstantu $K$ určuje rov. (208). Pro vyjádření $\sigma_\varepsilon^2(P_1)$ dosaďme (259), (178) a (256) do (251).

$$\sigma_\varepsilon^2(P_1) = \left[\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \left\{ \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \left[K\frac{\sigma_a(P_i)}{\overline{a(P_i)}}\right]^2 f(P_i)\mathrm{d}P_i}{1-F(P_1)} + \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} K^2 f(P_i)\mathrm{d}P_i}{1-F(P_1)} - \left[\frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} Kf(P_i)\mathrm{d}P_i}{1-F(P_1)}\right]^2 \right\} =$$

$$= \left[K\,\overline{\tau}(P_1)\right]^2 \left\{ \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} \left[\frac{\sigma_a(P_i)}{\overline{a(P_i)}}\right]^2 f(P_i)\mathrm{d}P_i}{1-F(P_1)} + \frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} f(P_i)\mathrm{d}P_i}{1-F(P_1)} - \left[\frac{\int_{P_1}^{P_{\max}} f(P_i)\mathrm{d}P_i}{1-F(P_1)}\right]^2 \right\} =$$

$$= \frac{\left[\overline{a(P_1)}\right]^2}{1-F(P_1)} \int_{P_1}^{P_{\max}} v_a^2(P_i) f(P_i)\mathrm{d}P_i \tag{260}$$

Užitím (257) v (260) lze též vyjádřit

$$v_\varepsilon^2(P_1) = \frac{1}{1-F(P_1)} \int_{P_1}^{P_{\max}} v_a^2(P_i) f(P_i)\mathrm{d}P_i \tag{261}$$

Dosazením (260) a (256) do (252) vznikne vztah

$$\left(\sigma_a^*\right)^2 = D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{1}{n^2}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\sigma_a^2(P_1) + \frac{(n-1)\left[\overline{a(P_1)}\right]^2}{1-F(P_1)} \int_{P_1}^{P_{\max}} v_a^2(P_i) f(P_i)\mathrm{d}P_i\right] n f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 =$$

$$= D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{1}{n^2}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\sigma_a^2(P_1) + \frac{n-1}{1-F(P_1)} \int_{P_1}^{P_{\max}} \sigma_a^2(P_i) f(P_i)\mathrm{d}P_i\right] n f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{262}$$

nebo dosazením (261) do (258) nalezneme vyjádření

$$\left(\sigma_a^*\right)^2 = D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{1}{n^2}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[\overline{a(P_1)}\right]^2 \left[v_a^2(P_1) + \frac{n-1}{1-F(P_1)} \int_{P_1}^{P_{\max}} v_a^2(P_i) f(P_i)\mathrm{d}P_i\right] n f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1} \mathrm{d}P_1 \tag{263}$$

Někdy lze *předpokládat*, že **podmíněný rozptyl tažnosti $\sigma_a^2(P)$ krátkých úseků s pevností $P$ je pro všechny hodnoty $P$ konstantní**. To znamená, že výpočet dle rovnice (247) vede při každém $P = P_1$ na stále stejnou hodnotu, jíž označíme $s^2$. Předpoklad můžeme obecně vyjádřit vztahem

$$\sigma_a^2(P) = s^2 \ldots \text{konstanta} \tag{264}$$

a dosazením (264) do (262) nalezneme

$$\left(\sigma_a^*\right)^2 = D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{s^2}{n^2}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[1 + \frac{n-1}{1-F(P_1)}\int_{P_1}^{P_{\max}} f(P_i)\,\mathrm{d}P_i\right] n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1 =$$

$$= D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{s^2}{n}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1 = D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{s^2}{n} \tag{265}$$

(Protože $n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1} = f_l(P_1)$ je dle (182) hustotou pravděpodobnosti rozložení pevnosti nejslabších článků, platí $\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} nf(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1 = 1$. Tento vztah jsme využili při úpravě.)

Jindy je možné *předpokládat*, že **podmíněný variační koeficient tažnosti** $v_a(P)$ **krátkých úseků s pevností** $P$ **je pro všechny hodnoty** $P$ **konstantní**. Pak platí

$$v_a(P) = k \ldots \text{konstanta} \tag{266}$$

a dosazením (266) do (263) za užití (253) a (254) nalezneme

$$\left(\sigma_a^*\right)^2 = D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{k^2}{n^2}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\overline{a(P_1)}\right]^2\left[1 + \frac{n-1}{1-F(P_1)}\int_{P_1}^{P_{\max}} f(P_i)\,\mathrm{d}P_i\right] n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1 =$$

$$= D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{k^2}{n}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\overline{a(P_1)}\right]^2 n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1 =$$

$$= E\left\{\left[\overline{a(P_1)}\right]^2\right\} - \left\{\overline{a^*}\right\}^2 + \frac{k^2}{n}E\left\{\left[\overline{a(P_1)}\right]^2\right\} = \left(1+\frac{k^2}{n}\right)E\left\{\left[\overline{a(P_1)}\right]^2\right\} - \left\{\overline{a^*}\right\}^2 \tag{267}$$

nebo v jiném vyjádření

$$\left(\sigma_a^*\right)^2 = D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{k^2}{n}\int_{P_{\min}}^{P_{\max}}\left[\overline{a(P_1)}\right]^2 n\,f(P_1)\left[1-F(P_1)\right]^{n-1}\mathrm{d}P_1 =$$

$$= D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{k^2}{n}\left(D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \left\{\overline{a^*}\right\}^2\right) = \left(1+\frac{k^2}{n}\right)D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{k^2}{n}\left\{\overline{a^*}\right\}^2 \tag{267a}$$

# Rozptyl tažnosti dlouhých úseků při teorému deformační podobnosti, souměrných tažnostech a Gaussově rozložení krátkých úseků.

Předpokládejme, že stejně jako v předchozím případě platí teorém deformační podobnosti a současně předpoklad souměrných tažností. Navíc *předpokládejme*, že **rozložení pevnosti** $P$ **a tažnosti** $a$ **krátkých úseků**, t.j. rozložení náhodného vektoru $(P,a)$, **je popsáno Gaussovou hustotou pravděpodobnosti**

$$u(P,a) = \frac{1}{2\pi\sigma_P\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{\left(\dfrac{P-\bar{P}}{\sigma_P}\right)^2 - 2\rho\dfrac{(P-\bar{P})(a-\bar{a})}{\sigma_P\sigma_a} + \left(\dfrac{a-\bar{a}}{\sigma_a}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \tag{268}$$

kde $\overline{P}$ a $\sigma_P$ jsou střední hodnota a směrodatná odchylka pevnosti krátkých úseků, $\overline{a}$ a $\sigma_a$ jsou střední hodnota a směrodatná odchylka tažnosti krátkých úseků a $\rho$ je korelační koeficient mezi pevností $P$ a tažností $a$. Definičním oborem tohoto Gaussova rozložení je

$$\left.\begin{aligned} P_{\min} &= -\infty, \quad P_{\max} = \infty \\ a_{\min} &= -\infty, \quad a_{\max} = \infty \end{aligned}\right\} \tag{269}$$

(Teoreticky jsou tedy přípustné i záporné hodnoty pevnosti či tažnosti, přestože jsou fyzikálně nereálné. Aplikace Gaussova rozložení může proto být jen **přibližným modelem** některých reálných případů.)

Zavedeme-li (pro tzv. **normované proměnné**) označení

$$\xi = \left(P - \overline{P}\right)/\sigma_P \qquad \text{(jinde též } \xi_1 = \left(P_1 - \overline{P}\right)/\sigma_P \text{ )} \tag{270}$$

$$\eta = \left(a - \overline{a}\right)/\sigma_a \tag{271}$$

můžeme hustotu pravděpodobnosti (268) zapsat též tvarem

$$u(P,a) = \frac{1}{2\pi\sigma_P\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\xi^2 - 2\rho\xi\eta + \eta^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\} = \frac{1}{2\pi\sigma_P\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\left[\eta - \rho\xi\right]^2 + \left(1-\rho^2\right)\xi^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_P\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{\left[\eta-\rho\xi\right]^2}{2\left(1-\rho^2\right)}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{272}$$

**Marginální rozložení pevností** krátkých úseků nalezneme užitím (272) ve (176). Při úpravě užijeme známý Gauss-Laplaceův integrál

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \qquad \left(\text{nebo } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = 2\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \sqrt{2\pi}\right) \tag{273}$$

a vztahy (269), (270), (271). Tak nalezneme

$$f(P) = \int_{-\infty}^{\infty} u(P,a)\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2\pi\sigma_P\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left[\eta-\rho\xi\right]^2}{2\left(1-\rho^2\right)}}\,\mathrm{d}a =$$

$$\left(\text{substituce: } z = \frac{\eta - \rho\xi}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{\frac{a-\overline{a}}{\sigma_a} - \rho\xi}{\sqrt{1-\rho^2}} \qquad \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}a}{\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_P\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, \sigma_a\sqrt{1-\rho^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\sigma_P}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}\sqrt{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \tag{274a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P}\, e^{-\frac{\left(P-\overline{P}\right)^2}{2\sigma_P^2}} \tag{274}$$

**Podmíněnou střední hodnotu tažnosti** $\overline{a(P_1)}$ určuje výraz (180). Do něj je možné nyní dosadit odvozené výrazy (272) a (274a), v nichž dle (270) užijeme místo $\xi$ veličinu $\xi_1$.

S využitím (269) až (271) a (273) postupně odvodíme

$$\overline{a(P_1)} = \frac{1}{f(P_1)}\int_{-\infty}^{\infty} a\,u(P_1,a)\,\mathrm{d}a = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\eta\sigma_a+\bar a)\frac{1}{2\pi\,\sigma_P\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{[\eta-\rho\xi_1]^2}{2(1-\rho^2)}}\,e^{-\frac{\xi_1^2}{2}}\,\mathrm{d}a}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P}\,e^{-\frac{\xi_1^2}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}\left\{\sigma_a\int_{-\infty}^{\infty}\eta\, e^{-\frac{[\eta-\rho\xi_1]^2}{2(1-\rho^2)}}\,\mathrm{d}a + \bar a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[\eta-\rho\xi_1]^2}{2(1-\rho^2)}}\,\mathrm{d}a\right\} =$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{substituce:}\quad z = \dfrac{\eta-\rho\xi_1}{\sqrt{1-\rho^2}} = \dfrac{\dfrac{a-\bar a}{\sigma_a}-\rho\xi_1}{\sqrt{1-\rho^2}}, \qquad z\sqrt{1-\rho^2}+\rho\xi_1 = \eta \\ \qquad\qquad\quad \mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}a}{\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}\left\{\sigma_a\int_{-\infty}^{\infty}\left[z\sqrt{1-\rho^2}+\rho\xi_1\right]e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}a + \bar a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}a\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}a + \sigma_a\rho\xi_1\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}a + \bar a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\right\} \tag{275a}$$

Avšak $\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}a = 0$, neboť integrovaná funkce je lichá. Lze tedy psát

$$\overline{a(P_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\sigma_a\rho\xi_1\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}a + \bar a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{\sigma_a\rho\xi_1+\bar a\}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}a =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{\sigma_a\rho\xi_1+\bar a\}\sqrt{2\pi} = \sigma_a\rho\xi_1+\bar a = \sigma_a\rho\frac{P_1-\bar P}{\sigma_P}+\bar a \tag{275}$$

Předpokládáme, že platí teorém deformační podobnosti a současně předpoklad souměrných tažností. Platí tedy rovnice (205) a (207), t.j. $\overline{a(P_1)} = \overline{\varepsilon(P_1)} = K\,\bar\tau(P_1)$, kde konstantu $K$ určuje vztah (209). Užitím (275) pak nalezneme

$$\overline{a(P_1)} = \sigma_a\,\rho\frac{P_1-\bar P}{\sigma_P}+\bar a = K\,\bar\tau(P_1) \tag{276}$$

Z tohoto výrazu plyne několik závažných důsledků:

*1)* Protože v (276) je $\overline{a(P_1)}$ lineární funkcí $P_1$, také **vzorová inverzní tahová pracovní křivka** $\bar\tau(P_1)$ **musí být lineární**, t.j. musí podle (157) platit

$$\bar\tau(P_1) = (\bar a/\bar P)\,P_1$$

*2)* Vztah (276) musí platit i pro $P_1 = 0$, přičemž dle (145) platí $\bar\tau(0)=0$. V tomto případě přejde rovnice (276) na tvar

$$\sigma_a\rho\frac{-\bar P}{\sigma_P}+\bar a = 0 \qquad \sigma_a\rho\frac{\bar P}{\sigma_P} = \bar a \qquad \rho\frac{\sigma_a}{\bar a} = \frac{\sigma_P}{\bar P} \tag{277}$$

Odtud je zřejmé, že **Gaussovo rozložení nemůže být zcela obecné**; mezi jeho parametry musí totiž platit vztah (277). Z něj pak vyplývá, že

- **korelační koeficient** $\rho$ **musí být nezáporný** a
- je-li korelační koeficient $\rho < 1$, pak **variační koeficient tažnosti** $\sigma_a / \bar{a}$ **musí být větší než je variační koeficient pevnosti** $\sigma_P / \bar{P}$.

*3)* Do (276) dosadíme (277) ve tvaru $\sigma_a \rho = \bar{a}\, \sigma_P / \bar{P}$ a najdeme **vyjádření pro podmíněnou střední hodnotu tažnosti** $\overline{a(P_1)}$.

$$\overline{a(P_1)} = \sigma_a \rho \frac{P_1 - \bar{P}}{\sigma_P} + \bar{a} = \frac{\bar{a}\,\sigma_P}{\bar{P}} \frac{P_1 - \bar{P}}{\sigma_P} + \bar{a} = \frac{\bar{a}}{\bar{P}}\left(P_1 - \bar{P}\right) + \bar{a} = \frac{\bar{a}}{\bar{P}} P_1 \qquad (278)$$

*4)* Podle pravidel statistiky je možné **rozptyl podmíněných středních hodnot tažnosti** $D\left[\overline{a(P_1)}\right]$ vyjádřit z (278) vztahem

$$D\left[\overline{a(P_1)}\right] = D\left[\frac{\bar{a}}{\bar{P}} P_1\right] = \frac{\bar{a}^2}{\bar{P}^2} D(P_1) = \frac{\bar{a}^2}{\bar{P}^2} D\left(P^*\right) \qquad (279)$$

Veličina $D(P_1)$ je rozptylem náhodné proměnné $P_1$, t.j. **rozptylem pevnosti nejslabších článků**, a tedy **i rozptylem** $D\left(P^*\right)$ **pevnosti** $P^*$ **dlouhých úseků**; vzhledem k rovnici (166) je $D(P_1) = D\left(P^*\right)$. (V kap. 1 je nynější proměnná $D\left(P^*\right)$ značena symbolem $\sigma_P^2$. Rozptyl pevnosti krátkých úseků je ovšem v kap. 1 značen symbolem $\sigma_0^2$.)

Rozložení tažností krátkých úseků, jejichž pevnost je právě $P_1$, je popsáno **podmíněnou hustotou pravděpodobnosti** $\varphi\left(a|P_1\right)$ dle (179). Do této rovnice je nyní možné dosadit odvozené výrazy (272) a (274a), v nichž dle (270) užijeme místo $\xi$ veličinu $\xi_1$. Tak nalezneme následující výraz (upravovaný za užití (270) a (271) )

$$\varphi\left(a|P_1\right) = \frac{u(P_1, a)}{f(P_1)} = \frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_P\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{[\eta-\rho\xi_1]^2}{2(1-\rho^2)}}\, e^{-\frac{\xi_1^2}{2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_P}\, e^{-\frac{\xi_1^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\left[\eta-\rho\xi_1\right]^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\left[\dfrac{a-\bar{a}}{\sigma_a} - \rho\dfrac{P_1-\bar{P}}{\sigma_P}\right]^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\left[a-\bar{a}-\rho\dfrac{\sigma_a}{\sigma_P}\left(P_1-\bar{P}\right)\right]^2}{2\sigma_a^2\left(1-\rho^2\right)}\right\} \qquad (280a)$$

Z (277) však plyne $\rho\,\sigma_a / \sigma_P = \bar{a}/\bar{P}$, takže

$$\varphi\left(a|P_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\left[a-\bar{a}-\dfrac{\bar{a}}{\bar{P}}\left(P_1-\bar{P}\right)\right]^2}{2\sigma_a^2\left(1-\rho^2\right)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\left[a-\dfrac{\bar{a}}{\bar{P}}P_1\right]^2}{2\sigma_a^2\left(1-\rho^2\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a\left(P_1\right)}\, e^{-\frac{\left[a-\overline{a(P_1)}\right]^2}{2\,\sigma_a^2(P_1)}} \qquad (280)$$

kde $\overline{a(P_1)}$ je dáno vztahem (278) a výraz $\sigma_a(P_1) = \sigma_a\sqrt{1-\rho^2}$ .

Vztah (280) popisuje podmíněnou hustotu pravděpodobnosti rozložení tažností krátkých úseků s pevností právě $P_1$ jako **Gaussovo rozložení** se střední hodnotou $\overline{a(P_1)}$ a směrodatnou odchylkou $\sigma_a(P_1)$. **Podmíněný rozptyl** $\sigma_a^2(P_1)$ lze vyjádřit při užití (277) také tvarem

$$\sigma_a^2(P_1) = \sigma_a^2(1-\rho^2) = \sigma_a^2 - \sigma_a^2\rho^2 = \sigma_a^2 - \sigma_P^2\frac{\overline{a}^2}{\overline{P}^2} \tag{281a}$$

(Jak jsme uvedli v podmínkách za rovnicí (277), je $(\sigma_a/\overline{a}) > (\sigma_P/\overline{P})$, takže v (281a) je vždy $\sigma_a^2(P_1) > 0$.)

Z rovnice (281a) je zřejmé, že **podmíněný rozptyl** $\sigma_a^2(P_1)$ **je pro všechny hodnoty** $P_1$ **konstantní**. Je tedy splněn vztah (264), t.j. platí

$$\sigma_a^2(P_1) = \sigma_a^2 - \sigma_P^2\frac{\overline{a}^2}{\overline{P}^2} = s^2 \ldots\text{konstanta} \tag{281}$$

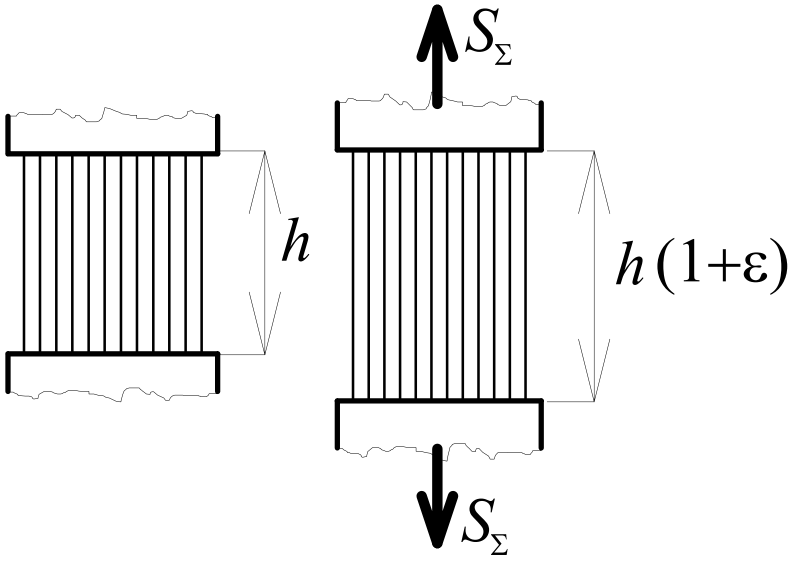
Pro rozptyl tažnosti dlouhých úseků v tomto případě platí vztah (265), který po dosazení (279) a (281) nabude tvar

$$\begin{aligned}(\sigma_a^*)^2 &= D\left[\overline{a(P_1)}\right] + \frac{s^2}{n} = \frac{\overline{a}^2}{\overline{P}^2}D(P^*) + \frac{\sigma_a^2}{n} - \frac{\sigma_P^2}{n}\frac{\overline{a}^2}{\overline{P}^2} = \\ &= \frac{\sigma_a^2}{n} + \frac{\overline{a}^2}{\overline{P}^2}\left[D(P^*) - \frac{\sigma_P^2}{n}\right]\end{aligned} \tag{282}$$

# 3. STOCHASTICKÉ MODELOVÁNÍ TAHOVÉ PRACOVNÍ KŘIVKY, PEVNOSTI A TAŽNOSTI SVAZKU

## 3.1 Ideální svazek a jeho napínání.

**Ideální svazek vláken.** Reálné textilní vlákenné útvary mají často formu **svazků**, tj. jsou vytvořeny z převážně "podélně" orientovaných vláken či jiných délkových textilií. Takovými útvary jsou např. hedvábí či příze, přásty, prameny, ale též samotná osnova, nebo osnovní či útková soustava tkaniny a pod. Pevnost, tažnost a tahovou pracovní křivku takových svazků zjišťujeme experimentálně jejich napínáním a přetrháváním v čelistech dynamometru. Přitom pozorujeme, že mechanické vlastnosti svazku nejsou shodné s "průměrnými" vlastnosti jej tvořících částí, že souvislosti mezi svazkem a jeho stavebními jednotkami jsou složitější.




a) b)

obr. 17

Pro objasnění podstatných souvislostí zavedeme představu **ideálního svazku** $n$ **vláken**[1]. *Předpokládáme*, že **ideální svazek vláken je tvořen velkým počtem nekonečných vláken**, **rovných, rovnoběžných, která se při tahovém namáhání svazku vzájemně neovlivňují.**

Na obr. 17a) je takový ideální svazek znázorněn ve výchozím nenapjatém stavu, sevřen dvěma čelistmi dynamometru na upínací délce $h$.

**Rozložení pevností a tažností vláken.** Vlákna ve svazku na obr. 17a) mají obecně rozmanité tahové pracovní křivky, různé pevnosti $P$ a tažnosti $a$. Uspořádaná dvojice $(P,a)$ je **náhodným vektorem**, jehož rozložení popisuje dvourozměrná **hustota pravděpodobnosti** $u(P,a)$ s definičním oborem ω dle rovnice (174)[2] (tj. $P \in (P_{\min}, P_{\max})$, $a \in (a_{\min}, a_{\max})$). Platí tedy

$$\iint_\omega u(P,a)\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}a = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a = 1 \tag{283}$$

[1] Pro názornost budeme pojmem "vlákna" označovat stavební jednotky svazku. Ve skutečnosti to však mohou být nejen vlákna, ale i nitě, nebo jiné délkové textilie.

[2] Následující úvahy budou podobné těm, které jsou uvedeny v prvé části kap. 2.3 (Rozložení na krátkých úsecích.)

**Střední hodnotu pevnosti** vláken $\overline{P}$ a **střední hodnotu tažnosti** vláken $\bar{a}$ lze vyjádřit vztahy

$$\overline{P} = \iint_{\omega} P\, u(P,a)\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}a \qquad \bar{a} = \iint_{\omega} a\, u(P,a)\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}a \tag{284}$$

**Marginální rozložení tažnosti** $a$ (tj. rozložení jen tažnosti bez ohledu na pevnosti) je popsáno **hustotu pravděpodobnosti**

$$g(a) = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}P \tag{285}$$

nebo **distribuční funkcí**

$$G(a) = \int_{a_{\min}}^{a} g(a)\,\mathrm{d}a = \int_{a_{\min}}^{a} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a \qquad \left( G(a_{\max}) = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} g(a)\,\mathrm{d}a = 1 \right) \tag{286}$$

(Střední hodnotu tažnosti vláken můžeme nyní vyjádřit z rovnic (284) a (285) také vztahem $\bar{a} = \iint_{\omega} a\, u(P,a)\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}a = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} a\, g(a)\,\mathrm{d}a$.)

Rozložení pevností podmnožiny vláken, jejichž **tažnost je právě** $a$, popisuje **podmíněná hustota pravděpodobnosti** $\psi(P|a)$. (Pevnost $P$ je náhodnou proměnnou a tažnost $a$ je parametrem tohoto rozložení.) Obecně platí $u(P,a) = g(a)\,\psi(P|a)$ a užitím (285) můžeme psát

$$\psi(P|a) = \frac{u(P,a)}{g(a)} = \frac{u(P,a)}{\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} u(P,a)\,\mathrm{d}P} \tag{287}$$

**Podmíněná střední hodnota pevnosti** $\overline{P(a)}$ vyjadřuje střední hodnotu pevnosti podmnožiny těch vláken, jejichž tažnost je právě $a$. Platí tedy

$$\overline{P(a)} = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P\,\psi(P|a)\,\mathrm{d}P = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P\,\frac{u(P,a)}{g(a)}\,\mathrm{d}P = \frac{1}{g(a)} \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P\,u(P,a)\,\mathrm{d}P \tag{288}$$

**Tahové pracovní křivky vláken.** Ideální svazek na obr. 17 je tvořen $n$ vlákny s poř. č. $i = 1, 2, \cdots, n$, pro něž lze užít vztahy (140) až (163), zavedené v kap. 2.1[1)]. Prodloužíme-li výchozí svazek rovnoběžných vláken poměrným prodloužením ε - viz obr. 17b), pak totéž poměrné prodloužení má i každé jeho vlákno. $i$-té vlákno má **pevnost** $P_i$, **tažnost** $a_i$ a závislost jeho **tahové síly** $S_i$ na **poměrným prodloužením** ε je popsána **tahovou pracovní křivkou**

$$\left. \begin{aligned} S_i &= \sigma_i(\varepsilon) \ldots \varepsilon \in \langle 0, a_i \rangle \\ S_i &= 0 \ldots\ldots\ldots \varepsilon > a_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \cdots, n \tag{289}$$

pro níž speciálně platí

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \sigma_i(0) \ldots \text{tahová pracovní křivka prochází počátkem souřadnic} \\ P_i &= \sigma_i(a_i) \ldots \text{tahová pracovní křivka prochází bodem o souřadnicích } a_i \text{ a } P_i \end{aligned} \right\} \tag{290}$$

(Proti rov. (140) je definice tahové pracovní křivky dle (289) rozšířena i na hodnoty $\varepsilon > a_i$. Výrazy (290) jsou ve shodě se (140a).)

---

1) Je nezbytné, aby se čtenář, který přeskočil stať 2., seznámil dodatečně alespoň s kap. 2.1. Tam užívaný pojem "úsek" je v nynějším kontextu třeba chápat ve významu "vlákno svazku" na obr. 17.

**Napínání ideálního svazku.** Při poměrném prodloužení ε svazku - obr. 17b) - přenáší svazek **celkovou tahovou sílu** $S_\Sigma$, která je součtem tahových sil $S_i$ všech vláken.

$$S_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} S_i \tag{291}$$

Každé $S_i$ je dle (289) funkcí ε, a proto i $S_\Sigma$ je funkcí ε. Soustava vztahů (291) a (289) tedy vyjadřuje **tahovou pracovní křivku svazku vláken**.

Je užitečné vyjádřit **střední sílu** $S^*$ **přenášenou jedním vláknem** svazku. Platí pro ni vztah

$$S^* = \frac{S_\Sigma}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i \tag{292}$$

Také tato síla je vzhledem k (289) funkcí ε a soustava (292) a (289) vyjadřuje **tahovou pracovní křivku připadající v průměru na jedno vlákno** svazku.

**Tahové pracovní křivky definované pevností a tažností.** Jsou-li tahové pracovní křivky vláken definované jejich pevností a tažností ve smyslu kap. 2.1, pak existuje všem vláknům společná funkce $\overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P, a)$, která k daným hodnotám pevnosti $P$ a tažnosti $a$ obecného vlákna přiřazuje tahovou pracovní křivku. Obecně pak platí vztah (142) a **sílu v *i*-tém vlákně** můžeme vyjádřit z (289) ve tvaru

$$\left.\begin{array}{l} S_i = \sigma_i(\varepsilon) = \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P_i, a_i) \;\ldots \varepsilon \in \langle 0, a_i \rangle \\ S_i = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varepsilon > a_i \end{array}\right\} i = 1, 2, \cdots, n \tag{293}$$

kde ve shodě s (290) a (142a) platí

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \sigma_i(0) = \overset{\circ}{\sigma}(0, P_i, a_i) \\ P_i = \sigma_i(a_i) = \overset{\circ}{\sigma}(a_i, P_i, a_i) \end{array}\right\} \tag{294}$$

Tahovou pracovní křivku průměrného vlákna vyjádříme nyní soustavou vztahů (292) a (293).

V úvodu kapitoly jsme předpokládali, že ideální svazek je vytvořen z **velkého počtu vláken**. Pak není vhodné (a při $n \to \infty$ ani prakticky možné) sčítat síly od jednotlivých vláken přes sčítací index *i*, jak je tomu ve vztahu (292). Je třeba přejít k **integrální formě vyjádření**. Sílu *S*, přenášenou obecným vláknem o pevnosti *P* a tažnosti *a*, vyjádřím dle (293) a (294) výrazy

$$\left.\begin{array}{l} S = \sigma(\varepsilon) = \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P, a) \;\ldots \varepsilon \in \langle 0, a \rangle \\ S = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varepsilon > a \end{array}\right\} \tag{295}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \sigma(0) = \overset{\circ}{\sigma}(0, P, a) \\ P = \sigma(a) = \overset{\circ}{\sigma}(a, P, a) \end{array}\right\} \tag{296}$$

a rozložení pevností a tažností vláken popisuje hustota pravděpodobnosti $u(P,a)$. Protože rovnice (292) vyjadřuje **střední hodnotu** síly přenášené jedním vláknem, lze při velkém počtu vláken ve svazku zapsat vztah (292) jako střední hodnotu **spojité** náhodné proměnné.

$$S^* = \iint_{\omega} S\, u(P,a)\, \mathrm{d}P\, \mathrm{d}a = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} S\, u(P,a)\, \mathrm{d}a \right] \mathrm{d}P \tag{297}$$

Podle (295) je $S = 0$ pro vlákna s tažností $a < \varepsilon$. Proto - **je-li** $\varepsilon > a_{\min}$ - platí $\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} S\, u(P,a)\,\mathrm{d}a =$
$= \int_{a_{\min}}^{\varepsilon} 0 \cdot u(P,a)\,\mathrm{d}a + \int_{\varepsilon}^{a_{\max}} \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P,a)\, u(P,a)\,\mathrm{d}a = \int_{\varepsilon}^{a_{\max}} \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P,a)\, u(P,a)\,\mathrm{d}a$, a (292) má tvar

$$S^* = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} S\, u(P,a)\,\mathrm{d}a \right] \mathrm{d}P = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \int_{\varepsilon}^{a_{\max}} \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P,a)\, u(P,a)\,\mathrm{d}a \right] \mathrm{d}P =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{a_{\max}} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P,a)\, u(P,a)\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a \qquad \varepsilon > a_{\min} \tag{298}$$

Je-li ovšem $\varepsilon \le a_{\min}$, **žádné vlákno se při takto malém poměrném prodloužení** $\varepsilon$ **nepřetrhne** a střední hodnota $S^*$ síly přenášené jedním vláknem má užitím (295) v (297) tvar

$$S^* = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \left[ \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} S\, u(P,a)\,\mathrm{d}a \right] \mathrm{d}P = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P,a)\, u(P,a)\,\mathrm{d}a \right] \mathrm{d}P \qquad \varepsilon \le a_{\min} \tag{299}$$

Souhrnně tedy z (298) a (299) nalezneme

$$\left.\begin{aligned} S^* &= \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P,a)\, u(P,a)\,\mathrm{d}a \right] \mathrm{d}P \qquad && \varepsilon \le a_{\min} \\ S^* &= \int_{\varepsilon}^{a_{\max}} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P,a)\, u(P,a)\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a \qquad && \varepsilon > a_{\min} \end{aligned}\right\} \tag{300}$$

## 3.2 Napínání, pevnost a tažnost svazku napěťově podobných vláken.

**Střední síla ve vlákně.** Pro **tahovou pracovní křivku napěťově podobných vláken** jsme v kap. 2.1 odvodili vztah (148). Vzhledem k (295) lze tento výraz zapsat ve tvaru

$$S = \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P,a) = \frac{P}{\overline{\sigma}(a)}\overline{\sigma}(\varepsilon) \qquad \varepsilon \in \langle 0, a \rangle \tag{301}$$

kde funkce $\overline{\sigma}(\varepsilon)$ je **"vzorová" tahová pracovní křivka**. Při $\varepsilon \le a_{\min}$ nalezneme pro střední sílu přenášenou jedním vláknem svazku dosazením (301) do první rovnice v (300) výraz

$$S^* = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \overset{\circ}{\sigma}(\varepsilon, P,a)\, u(P,a)\,\mathrm{d}a \right] \mathrm{d}P = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \frac{P}{\overline{\sigma}(a)}\overline{\sigma}(\varepsilon)\, u(P,a)\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a =$$

$$= \overline{\sigma}(\varepsilon) \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{1}{\overline{\sigma}(a)} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P\, u(P,a)\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a \qquad \varepsilon \le a_{\min} \tag{302}$$

Užitím vztahů (287) a (288) lze výraz (302) dále upravit.

$$S^* = \overline{\sigma}(\varepsilon) \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{1}{\overline{\sigma}(a)} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P\, u(P,a)\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a = \overline{\sigma}(\varepsilon) \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{g(a)}{\overline{\sigma}(a)} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P\, \frac{u(P,a)}{g(a)}\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a =$$

$$= \overline{\sigma}(\varepsilon) \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{g(a)}{\overline{\sigma}(a)} \left[ \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P\, \psi(P|a)\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a = \overline{\sigma}(\varepsilon) \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{g(a)}{\overline{\sigma}(a)} \overline{P(a)}\,\mathrm{d}a$$

$$S^* = \overline{\sigma}(\varepsilon)\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a \qquad \varepsilon \le a_{\min} \tag{303}$$

Stejným způsobem nalezneme při $\varepsilon > a_{\min}$ po dosazení (301) do druhé rovnice v (300) vztah

$$S^* = \overline{\sigma}(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{a_{\max}} \frac{1}{\overline{\sigma}(a)}\left[\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} P\,u(P,a)\,\mathrm{d}P\right]\mathrm{d}a \qquad \varepsilon > a_{\min} \tag{304}$$

a podobně jako v předchozím případě užitím vztahů (287) a (288) v (304) nalezneme výraz

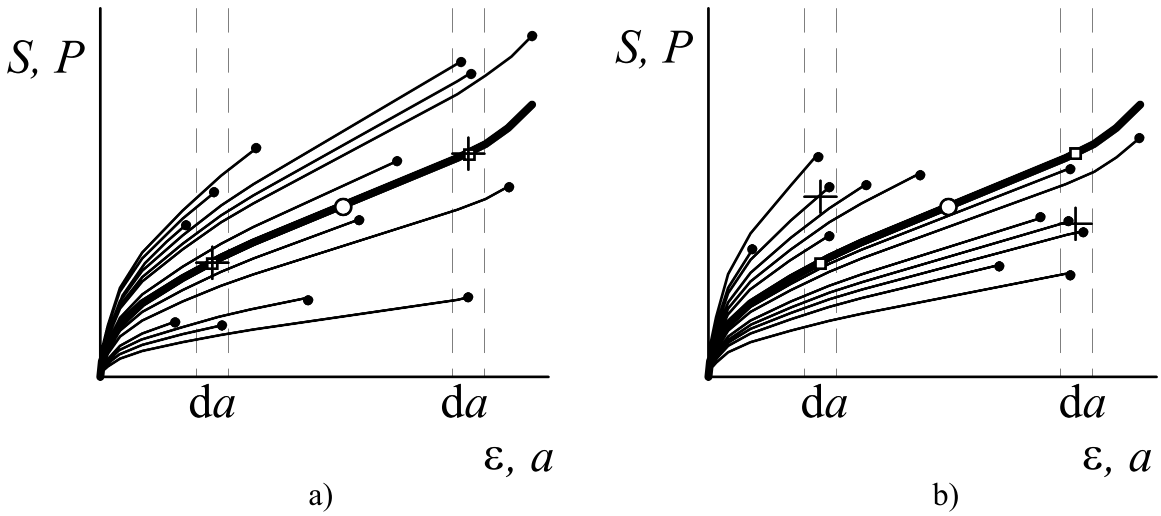
$$S^* = \overline{\sigma}(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a \qquad \varepsilon > a_{\min} \tag{305}$$

Souhrnně z (303) a (305) vyjádříme $S^*$ následujícím způsobem

$$\left.\begin{aligned} S^* &= \overline{\sigma}(\varepsilon)\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a \qquad \varepsilon \le a_{\min} \\ S^* &= \overline{\sigma}(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a \qquad \varepsilon > a_{\min} \end{aligned}\right\} \tag{306}$$

Vztah (306) přiřazuje poměrnému prodloužení ε **střední tahovou sílu** $S^*$přenášenou vláknem svazku. (Všimněme si, že funkce $S^*$ je v bodě $\varepsilon = a_{\min}$ spojitá, avšak nikoliv nutně hladká.)

**Předpoklad souměrných pevností.** V integrálech rovnice (306) je obecně $\overline{P(a)} \ne \overline{\sigma}(a)$. Často je však možné pro všechna $a \in (a_{\min}, a_{\max})$ *předpokládat*, že **podmíněná střední hodnota pevnosti** $\overline{P(a)}$ (tj. střední pevnost vláken, která mají právě tažnost $a$) **je stejná, jako hodnota** $\overline{\sigma}(a)$ **"vzorové" tahové pracovní křivky při poměrném prodloužení** $\varepsilon = a$; platí tedy $\overline{P(a)} = \overline{\sigma}(a)$.




obr. 18

Předpoklad ilustrují dva grafy na obr. 18. Tahová pracovní křivka (——) každého vlákna je zakončena bodem (●) vyjadřujícím jeho pevnost a tažnost. Na "vzorové" tahové křivce (▬▬) pak leží bod (○) určující střední hodnotu pevnosti a střední hodnotu tažnosti vláken. Na ose tažnosti jsou u dvou různých tažností $a$ čárkovaně znázorněny diferenciálně malé intervaly d$a$. Hodnoty "vzorové" tahové křivky v těchto místech, tj. $\overline{\sigma}(a)$, jsou označeny (◘). Podmíněná střední hodnota pevnosti $\overline{P(a)}$ právě těch vláken, která se přetrhla ve sledovaném diferenciální intervalu (vláken s tažností $a$) je označena (+).

Na obrázku 18a) hodnoty $\overline{\sigma}(a)$ a $\overline{P(a)}$ **splývají** (v obou znázorněných diferenciálních intervalech a obecně i v každém dalším diferenciálním intervalu, který bychom vytvořili). Předpoklad je zde splněn. Přitom si všimněme, že body přetrhů (●) jsou jaksi **"rovnoměrně" rozloženy "nad" a "pod" vzorovou tahovou pracovní křivkou**.

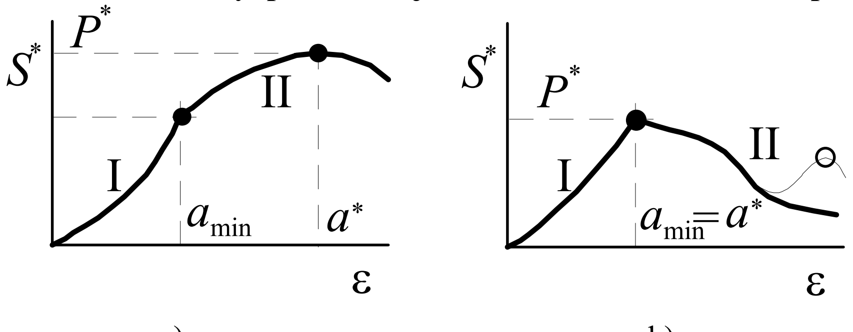
V druhém případě, na obrázku 18b), jsou hodnoty $\overline{\sigma}(a)$ a $\overline{P(a)}$ odlišné. Např. v prvém diferenciálním intervalu je $\overline{P(a)} > \overline{\sigma}(a)$ (+ je nad ◘), ve druhém je naopak $\overline{P(a)} < \overline{\sigma}(a)$. Výchozí předpoklad tedy splněn není. To proto, že body přetrhů (●) leží v jednom místě převážně nad a v jiném pod "vzorovou" tahovou pracovní křivkou.

Výraz (306) se s předpokladem souměrných pevností a užitím (286) zjednoduší do tvaru

$$\left.\begin{aligned} S^* &= \overline{\sigma}(\varepsilon)\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a = \overline{\sigma}(\varepsilon)\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} g(a)\,\mathrm{d}a = \overline{\sigma}(\varepsilon) && \varepsilon \le a_{\min} \\ S^* &= \overline{\sigma}(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a = \overline{\sigma}(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{a_{\max}} g(a)\,\mathrm{d}a = \\ &= \overline{\sigma}(\varepsilon)\left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} g(a)\,\mathrm{d}a - \int_{a_{\min}}^{\varepsilon} g(a)\,\mathrm{d}a\right] = \overline{\sigma}(\varepsilon)\left[1 - G(\varepsilon)\right] && \varepsilon > a_{\min} \end{aligned}\right\} \qquad (307)$$

Povšimněme si, že střední hodnota síly přenášené jedním vláknem $S^*$ při poměrném prodloužení ε svazku závisí jen na "vzorové" tahové pracovní křivce a na **marginálním rozložení tažností** $g(a)$.

**Pevnost a tažnost svazku napěťově podobných vláken.** Svazek s poměrným prodloužením ε je napínán silou $S_\Sigma$. Maximum této síly je **pevností svazku** $P_\Sigma$ a poměrné prodloužení ε při $S_\Sigma = P_\Sigma$ je **tažností svazku** $a^*$. Je-li tedy $\varepsilon = a^*$, nabývá $S_\Sigma$ svého maxima $P_\Sigma$. Podle (292) lze též psát $P_\Sigma = \left(S_\Sigma\right)_{\varepsilon=a^*} = \left(nS^*\right)_{\varepsilon=a^*} = n\left(S^*\right)_{\varepsilon=a^*}$ Veličina $\left(S^*\right)_{\varepsilon=a^*} \equiv P^*$ vyjadřuje **střední hodnotu síly, přenášené jedním vláknem v okamžiku přetrhu svazku**.




obr. 19

Existují dvě možnosti vniku síly $P^*$, znázorněné na obr. 19. K přetrhu svazku nedojde na křivce I při $\varepsilon < a_{\min}$, neboť v této oblasti se nemůže přetrhnout žádné vlákno. První vlákna se pře-trhnou až při $\varepsilon = a_{\min}$. Na obr. 19a) je případ, kdy zbývající vlákna mohou po určitou dobu "přebírat" síly od přetržených a lze je ještě dále zatěžovat. Křivka II (od $\varepsilon = a_{\min}$) pak dále roste, tj. **v bodě** $\varepsilon = a_{\min}$ **je** její **derivace zprava rostoucí**. Proces prodlužování svazku a praskání dalších vláken pokračuje, až při nějaké hodnotě $\varepsilon = a^* > a_{\min}$ již nejsou zbývající vlákna schopna "převzít" síly od vláken přetržených a rozběhne se "lavina" přetrhů jednotlivých vláken. Tento bod je maximem křivky II na obr. 19a) a - nejsou-li na úseku II ještě jiná a větší maxima - určuje pevnost svazku ($P_\Sigma = nP^*$).

Jiná situace je na obr. 19b). Při dosažení hodnoty $\varepsilon = a_{\min}$, a tedy při přetržení prvých vláken, nedokáží zbývající vlákna "převzít" sílu od prasklých vláken, sama bezprostředně poté praskají, a "lavina" přetrhů se rozběhne již při tomto prodloužení. Funkce II (od $\varepsilon = a_{\min}$) pak klesá (nebo alespoň neroste), tj. **v bodě** $\varepsilon = a_{\min}$ **je** její **derivace zprava nerostoucí**. V tomto případě (nejsou-li a úseku II ještě jiná, větší maxima) je tažnost $a^* = a_{\min}$ a pevnost svazku je $P_\Sigma = nP^* = = n\left(S^*\right)_{\varepsilon = a_{\min}}$.

("Lavina" přetrhů se ovšem může zastavit a úsek II může dalším prodlužováním vytvořit i jiná maxima - viz slabá čára na obr. 19b). Pak by pevnost a tažnost určovalo to lokální maximum, které má nejvyšší funkční hodnotu. Stejně lze ovšem uvažovat i u obr. 19a). )

Ve **variantě dle obr. 19a)** nalezneme pevnost svazku $P_\Sigma$ jako maximum funkce II, která platí pro oblast $\varepsilon > a_{\min}$. Můžeme psát

$$\left[\frac{\mathrm{d}S_\Sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right]_{\varepsilon = a^*} = 0 \qquad a^* > a_{\min} \tag{308}$$

Pro derivaci druhé rovnice v (306) nalézáme výraz

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\overline{\sigma}(\varepsilon)\int_\varepsilon^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a\right) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)\int_\varepsilon^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a + \overline{\sigma}(\varepsilon)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_\varepsilon^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a\right) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)\int_\varepsilon^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a - \overline{\sigma}(\varepsilon)\frac{\overline{P(\varepsilon)}}{\overline{\sigma}(\varepsilon)} g(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{309}$$

(Užili jsme obecný vztah pro derivaci podle dolní meze integrálu $\mathrm{d}\left(\int_y^k f(x)\,\mathrm{d}x\right)\Big/\mathrm{d}y = -f(y)$.)

Užitím $S_\Sigma = nS^*$ a (309) v (308) nalezneme vztah

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{\mathrm{d}S_\Sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right]_{\varepsilon = a^*} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(nS^*\right)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right]_{\varepsilon = a^*} = n\left[\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}\varepsilon}\right]_{\varepsilon = a^*} = \\
&= n\left[\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)\int_\varepsilon^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a - \overline{\sigma}(\varepsilon)\frac{\overline{P(\varepsilon)}}{\overline{\sigma}(\varepsilon)} g(\varepsilon)\right]_{\varepsilon = a^*} = \\
&= n\left[\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon = a^*}\int_{a^*}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a - \overline{\sigma}\left(a^*\right)\frac{\overline{P\left(a^*\right)}}{\overline{\sigma}\left(a^*\right)} g\left(a^*\right)\right] = \\
&= n\left[\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon = a^*}\int_{a^*}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a - \overline{P\left(a^*\right)}\, g\left(a^*\right)\right] \qquad a^* > a_{\min}
\end{aligned} \tag{310}$$

Protože počet vláken ve svazku $n \neq 0$, platí z předchozího vztahu

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a^*} \int_{a^*}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a - \overline{P(a^*)}\, g(a^*) = 0$$

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a^*} \int_{a^*}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a}{\overline{P(a^*)}\, g(a^*)} = 1 \qquad a^* > a_{\min} \tag{311}$$

Kořen $a^*$ této rovnice je hledanou **tažností vlákenného svazku**. (Obvykle existuje jenom jeden kladný kořen. Je-li však kořenů více, má význam tažnosti ten, jemuž přísluší největší síla.)

Užitím zavedeného značení nalezneme z druhé rovnice v (306) vztah

$$P^* = \left(S^*\right)_{\varepsilon=a^*} = \overline{\sigma}(a^*) \int_{a^*}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a \tag{312}$$

a pro vlastní **pevnost vlákenného svazku** pak užitím $S_\Sigma = nS^*$ a (312) rovnici

$$P_\Sigma = \left(S_\Sigma\right)_{\varepsilon=a^*} = \left(nS^*\right)_{\varepsilon=a^*} = n\left(S^*\right)_{\varepsilon=a^*} = nP^* = n\overline{\sigma}(a^*) \int_{a^*}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a \tag{313}$$

Rovnice (311) a (313) umožňují vypočítat pevnost a tažnost vlákenného svazku, pokud je - jako na obr. 19a) - derivace $\left(\mathrm{d}S^*/\mathrm{d}\varepsilon\right)_{\varepsilon=a_{\min}+}$ rostoucí, tj. pokud vzhledem k (309) platí

$$\left(\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}+} = \left[\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right) \int_{\varepsilon}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a - \overline{\sigma}(\varepsilon)\frac{\overline{P(\varepsilon)}}{\overline{\sigma}(\varepsilon)} g(\varepsilon)\right]_{\varepsilon=a_{\min}} =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a - \overline{\sigma}(a_{\min})\frac{\overline{P(a_{\min})}}{\overline{\sigma}(a_{\min})} g(a_{\min}) > 0 \tag{314}$$

(Symbol "$a_{\min}+$" znamená, že se jedná o derivaci v bodě $a_{\min}$ zprava!)

Ve **variantě dle obr. 19b)** je ovšem derivace $\left(\mathrm{d}S^*/\mathrm{d}\varepsilon\right)_{\varepsilon=a_{\min}+}$ nerostoucí, takže je splněna podmínka

$$\left(\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}+} = \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a - \overline{\sigma}(a_{\min})\frac{\overline{P(a_{\min})}}{\overline{\sigma}(a_{\min})} g(a_{\min}) \le 0 \tag{315}$$

**Tažnost svazku** (není-li v II. části křivky extrém s vyšší funkční hodnotou) je zde

$$a^* = a_{\min} \tag{316}$$

střední tahová síla $P^*$ v jednom vlákně při přetrhu svazku je vzhledem k první rovnici v (306)

$$P^* = \left(S^*\right)_{\varepsilon=a_{\min}} = \overline{\sigma}(a_{\min}) \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a \tag{317}$$

a pro vlastní **pevnost vlákenného svazku** užitím $S_\Sigma = nS^*$ a (317) nalézáme rovnici

$$P_\Sigma = nP^* = n\overline{\sigma}(a_{\min}) \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)} g(a)\,\mathrm{d}a \tag{318}$$

Vztahy (311) až (318) se dále zjednoduší, je-li splněn dříve zavedený **předpoklad souměrných pevností**, podle kterého pro všechna $a$ platí $\overline{P(a)} = \overline{\sigma}(a)$.

Pro **případ dle obr. 19a)** se zjednoduší vztahy (311) až (314). Podmínku (314) lze užitím (286) zapsat formou

$$\left(\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}+}=\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}}\int_{a_{\min}}^{a_{\max}}\frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)}g(a)\mathrm{d}a-\overline{\sigma}(a_{\min})\frac{\overline{P(a_{\min})}}{\overline{\sigma}(a_{\min})}g(a_{\min})=$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}}\int_{a_{\min}}^{a_{\max}}g(a)\mathrm{d}a-\overline{\sigma}(a_{\min})\,g(a_{\min})=$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}}-\overline{\sigma}(a_{\min})\,g(a_{\min})\quad>0 \tag{319}$$

rovnice (311) nabude užitím (286) tvar

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a^*}\int_{a^*}^{a_{\max}}\frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)}g(a)\mathrm{d}a}{\overline{P(a^*)}g(a^*)}=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a^*}\int_{a^*}^{a_{\max}}g(a)\mathrm{d}a}{\overline{\sigma}(a^*)g(a^*)}=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a^*}\left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}}g(a)\mathrm{d}a-\int_{a_{\min}}^{a^*}g(a)\mathrm{d}a\right]}{\overline{\sigma}(a^*)g(a^*)}=1$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)/\mathrm{d}\varepsilon}{\overline{\sigma}(\varepsilon)}\right)_{\varepsilon=a^*}\frac{1-G(a^*)}{g(a^*)}=1\qquad a^*>a_{\min} \tag{320}$$

rovnice (312) nabude užitím (286) tvar

$$P^*=\overline{\sigma}(a^*)\int_{a^*}^{a_{\max}}\frac{\overline{P(a)}}{\overline{\sigma}(a)}g(a)\mathrm{d}a=\overline{\sigma}(a^*)\int_{a^*}^{a_{\max}}g(a)\mathrm{d}a=\overline{\sigma}(a^*)\left[1-G(a^*)\right] \tag{321}$$

a rovnice (313) bude mít tvar

$$P_\Sigma=nP^*=n\overline{\sigma}(a^*)\left[1-G(a^*)\right] \tag{322}$$

Pro **případ dle obr. 19b)** nabude podmínka (315) tvar analogický k (319).

$$\left(\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}+}=\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}}-\overline{\sigma}(a_{\min})\,g(a_{\min})\quad\le 0 \tag{323}$$

Vztah (316) zůstává nezměněn, rovnice (317) nabude užitím (286) tvar

$$P^*=\overline{\sigma}(a_{\min})\int_{a_{\min}}^{a_{\max}}g(a)\mathrm{d}a=\overline{\sigma}(a_{\min}) \tag{324}$$

a rovnice (318) bude mít tvar

$$P_\Sigma=nP^*=n\overline{\sigma}(a_{\min}) \tag{325}$$

**Algoritmy výpočtů.** Postup výpočtů (při splnění teorému napěťové podobnosti) ukazuje následující přehled:

*Varianta a) - Předpoklad souměrných pevností **není splněn**.*

1. Rozhodování: Platí $a_{\min}>0$ a současně podmínka (315) ?

   ANO - přejdi na bod 2. (Případ obr. 19b).)

   NE - přejdi na bod 3. (Je splněna podmínka (314), případ obr. 19a).)

2. Vypočti: $a^*$ z (316), $P^*$ z (317), $P_\Sigma$ z (318) a přejdi na bod 3.

3. Vypočti: $a^*$ z (311) jako kořen (kořeny) rovnice; vypočti ke každému kořenu sílu $P^*$ z (312), $P_\Sigma$ z (313). (Při ANO v bodě 1 nemusí již žádný kořen existovat.)

4. Vzniklo-li více dvojic $a^*, P_\Sigma$, vyjadřuje pevnost a tažnost ta dvojice, která má největší $P_\Sigma$.

*Varianta b) - Předpoklad souměrných pevností* ***je splněn****.*

1. Rozhodování: Platí $a_{\min} > 0$ a současně podmínka (323) ?

   ANO - přejdi na bod 2. (Případ obr. 19b).)

   NE - přejdi na bod 3. (Je splněna podmínka (319), případ obr. 19a).)

2. Vypočti: $a^*$ z (316), $P^*$ z (324), $P_\Sigma$ z (325) a přejdi na bod 3.

3. Vypočti: $a^*$ z (320) jako kořen (kořeny) rovnice; vypočti ke každému kořenu sílu $P^*$ z (321), $P_\Sigma$ z (322). (Při ANO v bodě 1 nemusí již žádný kořen existovat.)

4. Vzniklo-li více dvojic $a^*, P_\Sigma$, vyjadřuje pevnost a tažnost ta dvojice, která má největší $P_\Sigma$.

## 3.3 Některé jednoduché varianty pevnosti a tažnosti svazku vláken.

**Využití substanční tažnosti a substanční pevnosti.** V této kapitole uvažujeme, že vlákna svazku splňují 1) **teorém napěťové podobnosti** (viz kap. 2.1) a 2) **předpoklad souměrných pevností** (viz kap. 3.2). Pak platí rovnice (319) až (322), dále (316) a (323) až (325). Uvedené výrazy vyjádříme ještě jiným způsobem.

Z obecné hodnoty poměrného prodloužení ε a střední tažnosti vláken $\bar{a}$ vytvořme **"pomocnou" veličinu** $t$.

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{\varepsilon}{\bar{a}} && (\varepsilon = \bar{a}\, t) \\ \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\bar{a}} && (\mathrm{d}\varepsilon = \bar{a}\, \mathrm{d}t) \end{aligned}\right\} \tag{326}$$

"Vzorovou" tahovou pracovní křivku $\bar{\sigma}(\varepsilon)$ pak můžeme bez újmy na obecnosti zapsat ve tvaru

$$\bar{\sigma}(\varepsilon) = \bar{P}\,\xi\left(\frac{\varepsilon}{\bar{a}}\right) = \bar{P}\,\xi(t) \tag{327}$$

Vhodná rostoucí funkce $\xi(t)$ proměnné $t$ splňuje podmínky

$$\xi(0) = 0 \qquad \xi(1) = 1 \tag{328}$$

neboť "vzorová" tahová pracovní křivka dle (144) prochází bodem střední tažnosti $\bar{a}$ a střední pevnosti $\bar{P}$ vláken; $\bar{P} = \bar{\sigma}(\bar{a})$. (Vedle proměnné $t$ může ovšem funkce $\xi(t)$ obsahovat libovolné parametry, včetně $\bar{a}$ či $\bar{P}$.) Derivováním (327) za užití (326) nalezneme

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varepsilon} = \bar{P}\,\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{\bar{a}} \tag{329}$$

a užitím (327) a (329) můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}(\varepsilon)/\mathrm{d}\varepsilon}{\bar{\sigma}(\varepsilon)} = \frac{\bar{P}\,\dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{1}{\bar{a}}}{\bar{P}\,\xi(t)} = \frac{\mathrm{d}\xi(t)/\mathrm{d}t}{\bar{a}\,\xi(t)} \tag{330}$$

Je užitečné zavést **využití substanční tažnosti** $\eta_a$, vyjadřující využití střední tažnosti vláken v tažnosti vlákenného svazku. Je definované výrazem

$$\eta_a = \frac{a^*}{\bar{a}} \tag{331}$$

Je-li v (326) speciálně $\varepsilon = a^*$, platí vzhledem k (331) také

$$(t)_{\varepsilon=a^*} = \left(\frac{\varepsilon}{\bar{a}}\right)_{\varepsilon=a^*} = \frac{a^*}{\bar{a}} = \eta_a \tag{332}$$

a užitím (332) v (330) lze psát

$$\left[\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}(\varepsilon)/\mathrm{d}\varepsilon}{\bar{\sigma}(\varepsilon)}\right]_{\varepsilon=a^*} = \left[\frac{\mathrm{d}\xi(t)/\mathrm{d}t}{\bar{a}\,\xi(t)}\right]_{\varepsilon=a^*} = \frac{\mathrm{d}\xi(\eta_a)/\mathrm{d}\eta_a}{\bar{a}\,\xi(\eta_a)} \tag{333}$$

Dále definujme **"pomocnou" náhodnou proměnnou** $z$ rovnicí

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{a}{\bar{a}} \qquad (a = \bar{a}\,z) \\ \mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{d}a}{\bar{a}} \qquad (\mathrm{d}a = \bar{a}\,\mathrm{d}z) \end{aligned}\right\} \tag{334}$$

(Tažnost vláken $a$ je náhodná proměnná, převrácená hodnota střední tažnosti $1/\bar{a}$ je konstanta.) Podle obecných pravidel statistiky pro **střední hodnotu** $\bar{z}$ platí

$$\bar{z} = \frac{1}{\bar{a}}\,\bar{a} = 1 \tag{335}$$

a **rozptyl** $s_z^2$ náhodné proměnné $z$ je

$$s_z^2 = \left(\frac{1}{\bar{a}}\right)^2 s_a^2 = \left(\frac{s_a}{\bar{a}}\right)^2 = v_a^2 \tag{336}$$

(Symbolem $s_a^2$ značíme rozptyl tažnosti vláken. Symbolem $v_a$ značíme **variační koeficient tažnosti vláken**, zavedený jako bezrozměrné číslo.)

**Hustotu pravděpodobnosti** $h(z)$ rozložení náhodné proměnné $z$ můžeme vyjádřit podle obecných pravidel teorie pravděpodobnosti vztahem $h(z) = g(a)\cdot \mathrm{d}a/\mathrm{d}z$. Užitím (334) pak nalezneme rovnici

$$h(z) = g(a)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z} = g(a)\,\bar{a} \tag{337a}$$

nebo také

$$g(a) = \frac{1}{\bar{a}}h(z) = \frac{1}{\bar{a}}h\left(\frac{a}{\bar{a}}\right) \tag{337}$$

Ve shodě s (334) označujme

$$z_{\min} = \frac{a_{\min}}{\bar{a}} \qquad z_{\max} = \frac{a_{\max}}{\bar{a}} \tag{338}$$

Mezi **distribuční funkcí** $H(z) = \int_{z_{\min}}^{z} h(z)\,\mathrm{d}z$ náhodné proměnné $z$ a distribuční funkcí $G(a)$ nalezneme užitím definice (286), vztahu (337), integrální substituce (334) a označení (338) výraz

$$G(a) = \int_{a_{\min}}^{a} g(a)\,\mathrm{d}a = \int_{a_{\min}}^{a} \frac{1}{\bar{a}}h\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)\mathrm{d}a = \frac{1}{\bar{a}}\int_{z_{\min}}^{z} h(z)\;\bar{a}\,\mathrm{d}z = \int_{z_{\min}}^{z} h(z)\,\mathrm{d}z = H(z) \tag{339}$$

(Bude třeba vyjádřit též funkci $G(\varepsilon)$. Se zavedeným značením (326) nalezneme analogicky

$$G(\varepsilon)=\int_{a_{\min}}^{\varepsilon} g(a)\,\mathrm{d}a=\int_{a_{\min}}^{\varepsilon}\frac{1}{\bar{a}}h\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)\mathrm{d}a=\frac{1}{\bar{a}}\int_{z_{\min}}^{t}h(z)\;\bar{a}\,\mathrm{d}z=\int_{z_{\min}}^{t}h(z)\,\mathrm{d}z=H(t) \qquad (339a)$$

V této formě užijeme výraz při výpočtu tahové pracovní křivky svazku.)

Je-li náhodná proměnná $a=a^*$, stává se hodnota $z$ substančním využitím tažnosti vláken $\eta_a$, neboť podle (334) a (331) platí

$$[z]_{a=a^*}=\left[\frac{a}{\bar{a}}\right]_{a=a^*}=\frac{a^*}{\bar{a}}=\eta_a \qquad (340)$$

Z (337) a (339) vyjádřím následující zlomek ve tvaru

$$\frac{1-G(a)}{g(a)}=\frac{1-H(z)}{\frac{1}{\bar{a}}h(z)}=\bar{a}\,\frac{1-H(z)}{h(z)} \qquad (341)$$

a užitím (340) též platí

$$\frac{1-G(a^*)}{g(a^*)}=\left[\frac{1-G(a)}{g(a)}\right]_{a=a^*}=\left[\bar{a}\,\frac{1-H(z)}{h(z)}\right]_{a=a^*}=\bar{a}\,\frac{1-H(\eta_a)}{h(\eta_a)} \qquad (342)$$

Z (326) a (334) při značení (338) vyjádříme ještě následující vztahy

$$(t)_{\varepsilon=a_{\min}}=\left(\frac{\varepsilon}{\bar{a}}\right)_{\varepsilon=a_{\min}}=\frac{a_{\min}}{\bar{a}}=z_{\min} \qquad (343)$$

$$(z)_{a=a_{\min}}=\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)_{a=a_{\min}}=\frac{a_{\min}}{\bar{a}}=z_{\min} \qquad (344)$$

Pro **případ dle obr. 19a)** můžeme podmínku (319) upravit použitím (329), (327), (337) a značení (343), (344).

$$\left(\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}+}=\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=a_{\min}}-\bar{\sigma}(a_{\min})\,g(a_{\min})=\left(\bar{P}\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\bar{a}}\right)_{\varepsilon=a_{\min}}-\left[\bar{P}\,\xi(t)\right]_{\varepsilon=a_{\min}}\left[\frac{1}{\bar{a}}h(z)\right]_{a=a_{\min}}=$$

$$=\bar{P}\frac{\mathrm{d}\xi(z_{\min})}{\mathrm{d}z_{\min}}\frac{1}{\bar{a}}-\bar{P}\,\xi(z_{\min})\frac{1}{\bar{a}}h(z_{\min})\quad>0$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi(z_{\min})/\mathrm{d}z_{\min}}{\xi(z_{\min})}\,\frac{1}{h(z_{\min})}>1 \qquad (345)$$

Dále, rovnice (320) nabude užitím (333), (342) při značení dle (331), (338) tvar

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}(\varepsilon)/\mathrm{d}\varepsilon}{\bar{\sigma}(\varepsilon)}\right)_{\varepsilon=a^*}\frac{1-G(a^*)}{g(a^*)}=1 \qquad \frac{\mathrm{d}\xi(\eta_a)/\mathrm{d}\eta_a}{\bar{a}\,\xi(\eta_a)}\,\bar{a}\,\frac{1-H(\eta_a)}{h(\eta_a)}=1$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi(\eta_a)/\mathrm{d}\eta_a}{\xi(\eta_a)}\,\frac{1-H(\eta_a)}{h(\eta_a)}=1 \qquad \eta_a>z_{\min} \qquad (346)$$

rovnice (321) nabude užitím (327), (339) při značení dle (332), (340) tvar

$$P^*=\bar{\sigma}(a^*)\left[1-G(a^*)\right]=\left[\bar{P}\,\xi(t)\right]_{\varepsilon=a^*}\left[1-H(z)\right]_{a=a^*}=\bar{P}\,\xi(\eta_a)\left[1-H(\eta_a)\right] \qquad (347)$$

a rovnice (322) bude mít vzhledem k (347) tvar

$$P_\Sigma=nP^*=n\bar{P}\,\xi(\eta_a)\left[1-H(\eta_a)\right] \qquad (348)$$

Obvykle se zavádí **substanční využití pevnosti** $\eta_P$, určené vztahem

$$\eta_P = \frac{P^*}{\overline{P}} = \frac{P_\Sigma}{n\overline{P}} \tag{349}$$

Tato veličina charakterizuje míru využití střední pevnosti vláken v pevnosti svazku. Z (349) a (347) nebo (348) pak plyne

$$\eta_P = \xi(\eta_a)\left[1 - H(\eta_a)\right] \tag{350}$$

Pro **případ dle obr. 19b)** nabude podmínka (323) analogicky k (345) tvar

$$\frac{\mathrm{d}\xi(z_{\min})/\mathrm{d}z_{\min}}{\xi(z_{\min})} \frac{1}{h(z_{\min})} \leq 1 \tag{351}$$

Vztah (316) užitím (331) a (338) nabude tvar

$$\frac{a^*}{\overline{a}} = \frac{a_{\min}}{\overline{a}} \qquad \eta_a = z_{\min} \tag{352}$$

rovnice (324) nabude užitím (327) a (343) tvar

$$P^* = \overline{\sigma}(a_{\min}) = \left[\overline{P}\,\xi(t)\right]_{\varepsilon = a_{\min}} = \overline{P}\,\xi(z_{\min}) \tag{353}$$

a rovnice (325) bude mít vzhledem k (353) tvar

$$P_\Sigma = nP^* = n\overline{P}\,\xi(z_{\min}) \tag{354}$$

Využití substanční pevnosti bude nyní dle (349) při použití (353) nebo (354)

$$\eta_P = \xi(z_{\min}) \tag{355}$$

Místo tažností a pevností je v tomto případě možné pracovat přímo s využitím substanční tažnosti $\eta_a$ a využitím substanční pevnosti $\eta_P$.

**Tahová pracovní křivka.** Střední hodnota síly $S^*$ přenášené jedním vláknem svazku při poměrném prodloužení $\varepsilon$ byla při zavedených předpokladech vyjádřena rovnicí (307). Užijeme-li v (307) výrazy (327) a (339a) a $\varepsilon/\overline{a} = t$ a $a_{\min}/\overline{a} = z_{\min}$ dle (326) a (338), nalezneme

$$\left.\begin{aligned} S^* &= \overline{P}\,\xi(t) & t &\leq z_{\min} \\ S^* &= \overline{P}\,\xi(t)\left[1 - H(t)\right] & t &> z_{\min} \end{aligned}\right\} \tag{356}$$

Vlastní tahová pracovní křivka svazku vláken je pak dle (292) dána výrazem

$$\left.\begin{aligned} S_\Sigma &= nS^* = n\overline{P}\,\xi(t) & t &\leq z_{\min} \\ S_\Sigma &= nS^* = n\overline{P}\,\xi(t)\left[1 - H(t)\right] & t &> z_{\min} \end{aligned}\right\} \tag{357}$$

**Algoritmus výpočtu** lze nyní modifikovat následujícím způsobem:

*Varianta b) - Předpoklad souměrných pevností* ***je splněn***.

A. Úvodní výpočty:

Vypočti funkci $\xi(t)$ z (327), funkci $h(z)$ a $H(z)$ z (337a) a (339), $z_{\min}$ z (338).

B. Vlastní výpočet využití substanční tažnosti a pevnosti:

1. Rozhodování: Platí $z_{\min} > 0$ a současně podmínka (351) ?

ANO - přejdi na bod 2. (Případ obr. 19b).)

NE - přejdi na bod 3. (Je splněna podmínka (345), případ obr. 19a).)

2. Vypočti: $\eta_a$ z (352), $\eta_P$ z (355) a přejdi na bod 3.

3. Vypočti: $\eta_a$ z (346) jako kořen (kořeny) rovnice; vypočti ke každému kořenu využití pevnosti $\eta_P$ z (350). (Při ANO v bodě 1 nemusí již žádný kořen existovat.)

4. Vzniklo-li více dvojic $\eta_a, \eta_P$, vyjadřuje skutečné využití pevnosti a tažnosti ta dvojice, která má největší $\eta_P$.

C. Určení tahové pracovní křivky

Vypočti funkci $S^*$ z (356) a funkci $S_\Sigma$ z (357).

**Příklad 1 - Gaussovský.** Uveďme nejprve jeden zvláště jednoduchý konkrétní příklad. Nechť vlákna mají lineární tahové pracovní křivky. Pak **"vzorová" tahová pracovní křivka je lineární** a vztah (327) má konkrétní tvar

$$\overline{\sigma}(\varepsilon) = \overline{P}\,\xi\left(\frac{\varepsilon}{\overline{a}}\right) = \overline{P}\,\xi(t) = \overline{P}\,\frac{\varepsilon}{\overline{a}} = \overline{P}\,t \tag{358}$$

Odtud vyplývá, že funkce

$$\xi(t) = t \qquad \left( \xi(\eta_a) = \eta_a \right) \tag{359}$$

a její derivace je

$$\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} = 1 \qquad \left( \frac{\mathrm{d}\xi(\eta_a)}{\mathrm{d}\eta_a} = 1 \right) \tag{360}$$

Uvažujme dále, že rozložení pevností a tažností vláken lze (přibližně) popsat **dvourozměrným Gaussovým normálním rozložením**. Pak hustotu pravděpodobnosti marginálního rozložení tažností $g(a)$ popisuje jednorozměrné Gaussovo normální rozložení, definované vztahem (285), se střední hodnotou $\overline{a}$ a směrodatnou odchylkou $s_a$.

$$g(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s_a}\exp\left[-\frac{(a-\overline{a})^2}{2s_a^2}\right] \qquad a_{\min} = -\infty, \quad a_{\max} = \infty \tag{361}$$

Náhodná proměnná $z$ má podle (337a) při užití (361), (334) a (338) hustotu pravděpodobnosti

$$h(z) = \overline{a}\,g(a) = \overline{a}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s_a}\exp\left[-\frac{(a-\overline{a})^2}{2s_a^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{s_a}{\overline{a}}\right)}\exp\left[-\frac{\left(\frac{a}{\overline{a}}-1\right)^2}{2\left(\frac{s_a}{\overline{a}}\right)^2}\right]$$

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,v_a}\exp\left[-\frac{(z-1)^2}{2v_a^2}\right] \qquad z_{\min} = \frac{a_{\min}}{\overline{a}} = -\infty \qquad z_{\max} = \frac{a_{\max}}{\overline{a}} = \infty \tag{362}$$

Je zřejmé, že také náhodná proměnná $z$ má Gaussovo normální rozložení (se střední hodnotou $\overline{z} = 1$ a směrodatnou odchylkou $s_z = v_a$, jak jsme odvodili již v (335) a (336) ). Všimněme si, že hustota pravděpodobnosti $h(z)$ obsahuje **jediný parametr**, jímž je **variační koeficient tažnosti vláken** $v_a$. Týž parametr obsahuje přirozeně i distribuční funkce $H(z)$, neboť dle (339) a (362) je

$$H(z) = \int_{z_{\min}}^{z} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{z} h(z)\,\mathrm{d}z \tag{363}$$

Odpověď na otázku v bodě 1 algoritmu výpočtu je v tomto případě NE; podle (362) je totiž $z_{\min} = -\infty < 0$. Znamená to, že nemůže nastat případ dle obr. 19b) a řešení je nutno hledat postupem uvedeným v bodě 3 tohoto algoritmu.

Rovnici (346) můžeme užitím (359), (360) vyjádřit výrazem

$$\frac{\mathrm{d}\xi(\eta_a)/\mathrm{d}\eta_a}{\xi(\eta_a)} \frac{1-H(\eta_a)}{h(\eta_a)} = \frac{1}{\eta_a} \frac{1-H(\eta_a)}{h(\eta_a)} = 1 \tag{364}$$

kde funkce $h$ a $H$ jsou dány rovnicemi (362) a (363). V tomto případě má rov. (364) jediný kořen $\eta_a$. Jeho hodnota závisí jen na $v_a$, obsaženém ve funkcích $h$ a $H$. **Využití substanční tažnosti vláken** $\eta_a$ ve svazku **závisí jen na variačním koeficientu tažnosti** (jednotlivých) **vláken** $v_a$.

Pro vlastní výpočty se v tomto konkrétním případě zavádí ještě normovaná proměnná $u$

$$u = \frac{z-1}{v_a}, \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}z}{v_a}, \quad u \in (-\infty, \infty) \quad \left(\text{pro } z = \eta_a \text{ značíme } u_a = \frac{\eta_a - 1}{v_a}, \ \eta_a = u_a v_a + 1\right) \tag{365}$$

jejíž rozložení popisuje hustota pravděpodobnosti **normovaného Gaussova rozložení**

$$g_{\mathrm{N}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \tag{366}$$

nebo jeho distribuční funkce

$$G_{\mathrm{N}}(u) = \int_{-\infty}^{u} g_{\mathrm{N}}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \tag{367}$$

Porovnáním (362) a (366) můžeme při zavedeném značení (365) psát

$$h(z) = \frac{1}{v_a} g_{\mathrm{N}}(u) \qquad \left( h(\eta_a) = \frac{1}{v_a} g_{\mathrm{N}}(u_a) \right) \tag{368}$$

Z (363), (367) a (368) při použití (365) jako integrální substituce nalezneme také

$$H(z) = \int_{-\infty}^{z} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{v_a} g_{\mathrm{N}}(u)\, v_a \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{u} g_{\mathrm{N}}(u)\,\mathrm{d}u = G_{\mathrm{N}}(u) \qquad \left( H(\eta_a) = G_{\mathrm{N}}(u_a) \right) \tag{369}$$

Dosazením (365), (368) a (369) do (364) vznikne rovnice

$$\frac{1}{u_a v_a + 1} \frac{1 - G_{\mathrm{N}}(u_a)}{\frac{1}{v_a} g_{\mathrm{N}}(u_a)} = 1 \qquad \frac{v_a}{u_a v_a + 1} \frac{1 - G_{\mathrm{N}}(u_a)}{g_{\mathrm{N}}(u_a)} = 1 \tag{370}$$

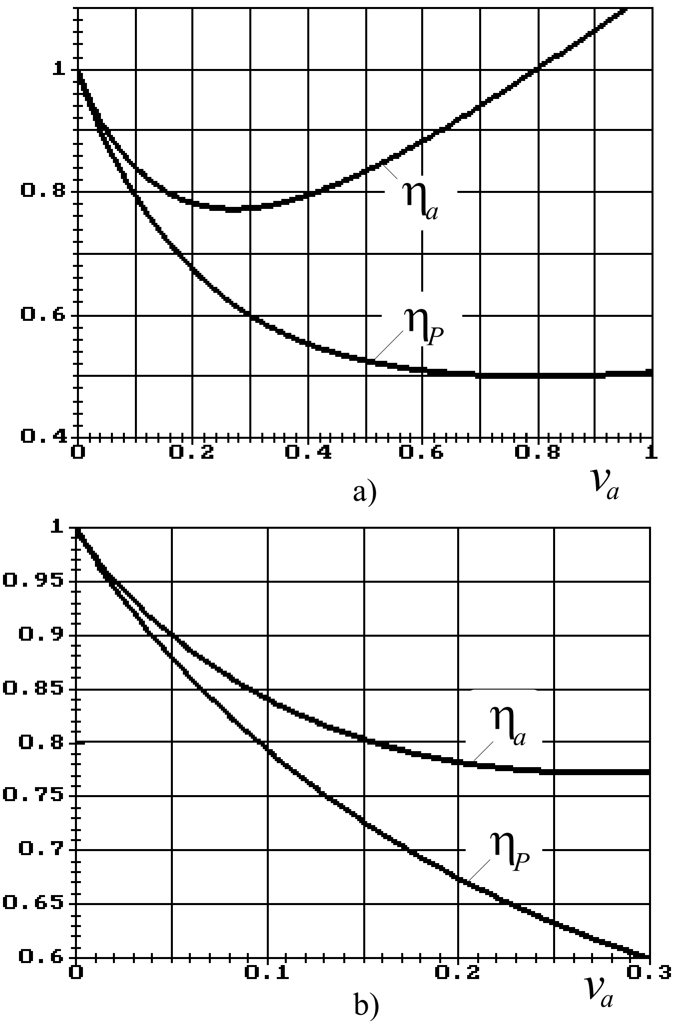
která obsahuje hustotu pravděpodobnosti a distribuční funkci normového normálního rozložení, parametr $v_a$ a hledaný kořen $u_a$. Z něj pak užitím (365) vyjádříme **využití substanční tažnosti** $\eta_a$.

Užitím (359), (369) a značení dle (365) lze upravit též vztah (350) pro výpočet **využití substanční pevnosti** $\eta_P$.

$$\eta_P = \xi(\eta_a)\left[1 - H(\eta_a)\right] = \eta_a\left[1 - H(\eta_a)\right] = (u_a v_a + 1)\left[1 - G_{\mathrm{N}}(u_a)\right] \tag{371}$$

Výpočtem kořene $u_a$ z rovnice (370) a následným výpočtem hodnot $\eta_a, \eta_P$ z (365) a (371) pro různé hodnoty variačního koeficientu $v_a$ tažnosti vláken vznikly grafy na obr. 20.

Obr.20 a) znázorňuje průběh využití substanční pevnosti a tažnosti v extrémně velkém rozsahu variačního koeficientu tažnosti vláken. Všimněme si, že využití substanční tažnosti $\eta_a$ dosahuje kolem hodnoty $v_a = 0{,}28$ svého **minima** a poté se opět zvětšuje.




obr. 20

Obr. 20b) zobrazuje tutéž závislost v **prakticky obvyklé oblasti** variačního koeficientu tažnosti ($v_a \in (0; 0{,}3)$, tj. od 0 do 30%). Zejména hodnoty využití pevnosti ukazují, že reálný "úbytek" pevnosti v důsledku variace tažnosti vláken může být značně velký.

Pro vyjádření tahové pracovní křivky svazku vláken zavedeme podobně jako v (365) **normovanou** náhodnou proměnnou

$$w = \frac{t-1}{v_a} \qquad \left(t = w v_a + 1\right) \qquad (372)$$

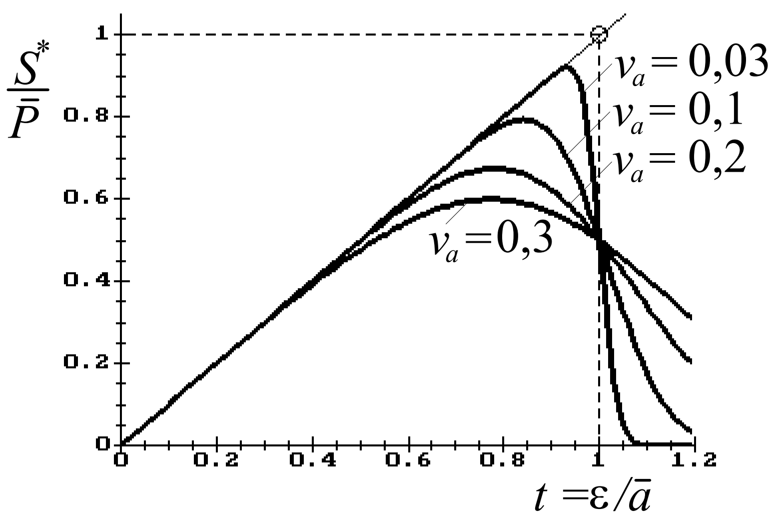
a stejně jako při odvození (369) můžeme psát

$$H(t) = G_{\mathrm{N}}(w) \qquad (373)$$

kde $G_{\mathrm{N}}$ je distribuční funkcí normovaného Gaussova rozložení.

Ve sledovaném příkladě je každé $t > z_{\min} = -\infty$, a proto platí v celém rozsahu $t$ druhé rovnice ve výrazech (356) a (357). Užitím (359), (372) a (373) v (356) nalezneme

$$S^* = \bar{P}t\left[1 - H(t)\right] = \bar{P}\left(w v_a + 1\right)\left[1 - G_{\mathrm{N}}(w)\right] = \bar{P}t\left[1 - G_{\mathrm{N}}\left(\frac{t-1}{v_a}\right)\right] \qquad (374)$$




obr. 21

a pro tahovou pracovní křivku svazku vznikne z rovnice (357) obdobně vztah

$$S_\Sigma = nS^* = n\bar{P}\left(w v_a + 1\right)\cdot\left[1 - G_{\mathrm{N}}(w)\right] = n\bar{P}t\left[1 - G_{\mathrm{N}}\left(\frac{t-1}{v_a}\right)\right] \qquad (375)$$

Průběh funkce (374) je znázorněn graficky pro několik hodnot variačního koeficientu $v_a$ na obr. 21. Všimněme si, že tahová křivka svazku lineárních vláken **není** lineární.

*Poznámka 1:* K podobným výrazům pro $\eta_a$, $\eta_P$ bychom také dospěli, pokud by "vzorová" tahová pracovní křivka byla popsána obecnou mocninnou funkcí $\overline{\sigma}(\varepsilon) = \overline{P}\left(\dfrac{\varepsilon}{\bar{a}}\right)^k = \overline{P}\, t^k$, $k > 0$. Pak by platilo $\xi(t) = t^k$, $\mathrm{d}\xi(t)/\mathrm{d}t = k\, t^{k-1}$ a výraz (346) by měl tvar

$$\frac{\mathrm{d}\xi(\eta_a)/\mathrm{d}\eta_a}{\xi(\eta_a)}\,\frac{1-H(\eta_a)}{h(\eta_a)} = \frac{k\,\eta_a^{k-1}}{\eta_a^k}\,\frac{1-H(\eta_a)}{h(\eta_a)} = \frac{k}{\eta_a}\,\frac{1-H(\eta_a)}{h(\eta_a)} = 1$$

který se od původní rovnice (364) liší pouze o konstantu $k$. Postup výpočtu $\eta_a$ a $\eta_P$ by byl zcela analogický.

*Poznámka 2:* Podobně se řeší i případy, kdy místo Gaussova normálního rozložení má tažnost vláken rozložení logaritmickonormální. Pak má tažnost vláken $a$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\; a}\exp\left[-\frac{\left\{\ln\left(\dfrac{a}{\bar{a}}\sqrt{1+v_a^2}\right)\right\}^2}{2\ln\left(1+v_a^2\right)}\right] = \frac{1}{\bar{a}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\;\dfrac{a}{\bar{a}}}\exp\left[-\frac{\left\{\ln\left(\dfrac{a}{\bar{a}}\sqrt{1+v_a^2}\right)\right\}^2}{2\ln\left(1+v_a^2\right)}\right]$$

kde $a_{\min} = 0$, $a_{\max} = \infty$. Parametr $\bar{a}$ je střední hodnotou a $v_a$ je variačním koeficientem. Vzhledem k (337a) a značení (334) tedy $h(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\; z}\exp\left[-\dfrac{\left\{\ln\left(z\sqrt{1+v_a^2}\right)\right\}^2}{2\ln\left(1+v_a^2\right)}\right]$, kde $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = \infty$. Je vidět, že rozložení náhodné proměnné $z$ je též logaritmickonormální. Protože není splněna podmínka $z_{\min} > 0$, jde výpočet (jako u Gaussova rozložení) hned na bod 3 výpočetního algoritmu. Je-li $u = \ln\left(z\sqrt{1+v_a^2}\right)\Big/\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}$, platí $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z = \sqrt{1+v_a^2}\Big/\left[\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\; z\sqrt{1+v_a^2}\right] = 1\Big/\left[\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\; z\right]$, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}u = \sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\; z$. Hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné $u$ je $h(z)\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\; z}\exp\left[-\dfrac{u^2}{2}\right]\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\; z = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{u^2}{2}\right] = g_{\mathrm{N}}(u)$, tj. je hustotou pravděpodobnosti normovaného Gaussova rozložení. Odtud lze vyjádřit $h(z) = g_{\mathrm{N}}(u)\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}z = g_{\mathrm{N}}(u)\Big/\left[\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\; z\right]$. Pro distribuční funkci nalezneme integrací $G_{\mathrm{N}}(u) = H(z)$. Je-li $z = \eta_a$, užijeme označení $u_a = \ln\left(\eta_a\sqrt{1+v_a^2}\right)\Big/\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}$. Rovnici (346) užitím (359), (360) a zde odvozených výrazů lze upravit do tvaru $\dfrac{1}{\eta_a}\,\dfrac{1-G_{\mathrm{N}}(u_a)}{g_{\mathrm{N}}(u_a)\Big/\left[\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\;\eta_a\right]} = 1$, $\sqrt{\ln\left(1+v_a^2\right)}\,\dfrac{1-G_{\mathrm{N}}(u_a)}{g_{\mathrm{N}}(u_a)} = 1$.

Po vyhledání kořene $u_a$ této rovnice snadno dopočteme substanční využití pevnosti $\eta_a$ a z (350) a (359) vyjádříme substanční využití pevnosti $\eta_P = \eta_a\left[1-G_{\mathrm{N}}(u_a)\right]$.

**Příklad 2 - Weibullovský.** Uvažujme, že stejně, jako v předchozím příkladu je **"vzorová" tahová pracovní křivka lineární**; platí tedy vztahy (358), (359) a (360). Nechť dále **tažnost vláken** $a$ **má Weibullovo rozložení**, popsané **hustotou pravděpodobnosti**

$$g(a)=\frac{c}{q}\left(\frac{a-a_{\min}}{q}\right)^{c-1}\exp\left[-\left(\frac{a-a_{\min}}{q}\right)^{c}\right] \qquad a_{\min}\geq 0,\quad a_{\max}=\infty,\quad a\in\left\langle a_{\min},a_{\max}\right) \tag{376}$$

či distribuční funkcí

$$G(a)=1-\exp\left[-\left(\frac{a-a_{\min}}{q}\right)^{c}\right] \tag{377}$$

(Srovnej s rov. (41) a (42).) Tyto funkce mají **tři parametry**: $c\geq 1, a_{\min}\geq 0$ a $q>0$.

Pro **střední hodnotu tažnosti vláken** nalezneme z tohoto Weibullova rozložení vztah

$$\bar{a}=\frac{q}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)+a_{\min} \qquad \left(a_{\min}=\bar{a}-\frac{q}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right) \tag{378}$$

a speciálně při $c=1$

$$\bar{a}=\frac{q}{1}\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)+a_{\min}=q+a_{\min} \qquad (a_{\min}=\bar{a}-q) \tag{378a}$$

Pro **směrodatnou odchylku tažnosti vláken** nalezneme výraz

$$s_a=q\sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)-\frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)}=qK_c \tag{379}$$

a speciálně při $c=1$

$$s_a=q\sqrt{\frac{2}{1}\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)-\frac{1}{1^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{1}\right)}=q\sqrt{2\cdot 1-1\cdot 1^2}=q \tag{379a}$$

(Odvození výrazů je mj. uvedeno v kap. 1.3 - viz rov. (46a) a (47a).) Pro formálně snazší zápis jsme zde zavedli parametr

$$K_c=\sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)-\frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)} \tag{380}$$

jehož hodnota závisí jen na parametru $c$. Speciálně při $c=1$ je

$$K_1=\sqrt{\frac{2}{1}\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)-\frac{1}{1^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{1}\right)}=\sqrt{2\cdot 1-1\cdot 1^2}=1 \tag{380a}$$

Užitím rovnice (379) můžeme vyjádřit poměr $q/\bar{a}$ ve tvaru

$$\frac{q}{\bar{a}}=\frac{s_a/K_c}{\bar{a}}=\frac{s_a}{\bar{a}}\frac{1}{K_c}=\frac{v_a}{K_c} \tag{381}$$

kde $v_a=s_a/\bar{a}$ je **variační koeficient tažnosti vláken** (jako poměrné číslo, nikoliv v %). Dále užitím rovnice (378) nalezneme pro poměr $a_{\min}/\bar{a}$ vztah

$$\frac{a_{\min}}{\bar{a}}=\frac{1}{\bar{a}}\left[\bar{a}-\frac{q}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right]=1-\frac{q}{\bar{a}}\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)=1-\frac{v_a}{K_c}\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) \tag{382}$$

a užitím předchozích výrazů nalezneme při značení dle (334) vztah

$$\frac{a-a_{\min}}{q}=\frac{\frac{a}{\bar{a}}-\frac{a_{\min}}{\bar{a}}}{q/\bar{a}}=\frac{\frac{a}{\bar{a}}-1+\frac{v_a}{K_c}\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)}{v_a/K_c}=\frac{(a/\bar{a})-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{z-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) \tag{383}$$

Pro případ, kdy $a = a_{\min}$ můžeme psát

$$0 = \frac{\left(a_{\min}/\bar{a}\right)-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{z_{\min}-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) \qquad z_{\min} = \frac{a_{\min}}{\bar{a}} \tag{384}$$

přičemž při $c = 1$ je

$$0 = \frac{z_{\min}-1}{v_a/K_1} + \frac{1}{1}\Gamma\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{z_{\min}-1}{v_a} + 1 \qquad z_{\min} = \frac{a_{\min}}{\bar{a}} \tag{384a}$$

Z rovnice (384) lze vyjádřit variační koeficient tažnosti vláken $v_a$ ve tvaru

$$1 - z_{\min} = \frac{v_a}{K_c}\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right) \qquad v_a = \left(1 - z_{\min}\right)\frac{K_c}{\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)} \tag{385}$$

Protože však $z_{\min} \geq 0$, musí platit

$$v_a \leq v_{a\max} = \left(1-0\right)\frac{K_c}{\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)} = \frac{K_c}{\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)} \tag{386}$$

kde veličina $v_{a\max}$ označuje **největší přípustnou hodnotu variačního koeficientu tažnosti vláken** v tomto modelu.

Je-li $c = 1$, nalezneme obdobně z (384a)

$$v_a = 1 - z_{\min}$$

$$v_a \leq v_{a\max} = 1 - 0 = 1 \tag{386a}$$

Hustotu pravděpodobnosti $g(a)$ pak vyjádříme dosazením (381) a (383) do (376).

$$g(a) = \frac{c}{q}\left(\frac{a-a_{\min}}{q}\right)^{c-1}\exp\left[-\left(\frac{a-a_{\min}}{q}\right)^{c}\right] = \frac{1}{\bar{a}}\frac{c}{\left(q/\bar{a}\right)}\left(\frac{a-a_{\min}}{q}\right)^{c-1}\exp\left[-\left(\frac{a-a_{\min}}{q}\right)^{c}\right] =$$

$$= \frac{1}{\bar{a}}\frac{c}{\left(v_a/K_c\right)}\left(\frac{\left(a/\bar{a}\right)-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{c-1}\exp\left[-\left(\frac{\left(a/\bar{a}\right)-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{c}\right] \qquad \begin{array}{l} a_{\min} \geq 0 \\ a_{\max} = \infty \end{array} \tag{387}$$

Pro $c = 1$ nabude předchozí rovnice při užití (380a) tvar

$$g(a) = \frac{1}{\bar{a}}\frac{1}{\left(v_a/K_1\right)}\left(\frac{\left(a/\bar{a}\right)-1}{v_a/K_1} + \frac{1}{1}\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)\right)^{1-1}\exp\left[-\left(\frac{\left(a/\bar{a}\right)-1}{v_a/K_1} + \frac{1}{1}\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)\right)^{1}\right] =$$

$$= \frac{1}{v_a\bar{a}}e^{-\left(\frac{\left(a/\bar{a}\right)-1}{v_a}+1\right)} \qquad \begin{array}{l} a_{\min} \geq 0 \\ a_{\max} = \infty \end{array} \tag{387a}$$

Užitím (387) v (337a) při značení (334), (338) najdeme **hustotu pravděpodobnosti** $h(z)$.

$$h(z) = g(a)\,\bar{a} = \left\{\frac{1}{\bar{a}}\frac{c}{\left(v_a/K_c\right)}\left(\frac{\left(a/\bar{a}\right)-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{c-1}\exp\left[-\left(\frac{\left(a/\bar{a}\right)-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{c}\right]\right\}\bar{a} =$$

$$= \frac{c}{\left(v_a/K_c\right)}\left(\frac{z-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{c-1}\exp\left[-\left(\frac{z-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{c}\right] \qquad \begin{array}{l} z_{\min} = \frac{a_{\min}}{\bar{a}} \\ z_{\max} = \infty \end{array} \tag{388}$$

(Je zřejmé, že náhodná proměnná $z$ má rovněž Weibullovo rozložení, avšak s jinými parametry.)

Pro $c = 1$ nabude předchozí rovnice užitím (387a) speciální tvar

$$h(z) = g(a)\bar{a} = \frac{1}{v_a \bar{a}} e^{-\left(\frac{(a/\bar{a})-1}{v_a}+1\right)} \bar{a} = \frac{1}{v_a} e^{-\left(\frac{z-1}{v_a}+1\right)} \qquad \begin{aligned} a_{\min} &\geq 0 \\ a_{\max} &= \infty \end{aligned} \tag{388a}$$

Odpovídající **distribuční funkci** $H(z)$ nalezneme z (339) a (377) při užití (383).

$$H(z) = G(a) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{a - a_{\min}}{q}\right)^c\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{z-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^c\right] \tag{389}$$

a pro $c = 1$ pak z předchozí rovnice plyne

$$H(z) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{z-1}{v_a/K_1} + \frac{1}{1}\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)\right)^1\right] = 1 - e^{-\left(\frac{z-1}{v_a}+1\right)} \tag{389a}$$

Pro případ, kdy $z = z_{\min}$ nalezneme při $c > 1$ z (388) a použitím (384) hodnoty

$$h(z_{\min}) = \frac{c}{(v_a/K_c)}\left(\frac{z_{\min}-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{c-1} \exp\left[-\left(\frac{z_{\min}-1}{v_a/K_c} + \frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^c\right] = \frac{c}{(v_a/K_c)} 0^{c-1} \exp\left[-0^c\right] = 0 \tag{390}$$

Podobně při $c = 1$ najdeme z (388a) užitím (384a) výraz

$$h(z_{\min}) = \frac{1}{v_a} e^{-\left(\frac{z_{\min}-1}{v_a}+1\right)} = \frac{1}{v_a} e^{-0} = \frac{1}{v_a} \qquad \begin{aligned} a_{\min} &\geq 0 \\ a_{\max} &= \infty \end{aligned} \tag{390a}$$

Nyní vyjádříme podmínku (351) pro případ $c > 1$. Užitím (359), (360) a (390) nalezneme

$$\frac{\mathrm{d}\xi(z_{\min})/\mathrm{d}z_{\min}}{\xi(z_{\min})} \frac{1}{h(z_{\min})} = \frac{1}{z_{\min}} \frac{1}{h(z_{\min})} = \frac{1}{z_{\min}} \frac{1}{0} = \infty \leq 1 \qquad c > 1 \tag{391}$$

Je zřejmé, že tato **nerovnost není splněna**. Pro případ $c = 1$ však užitím (359), (360) a (390a) a následnou úpravou za užití (378a) a (379a) nalezneme

$$\frac{\mathrm{d}\xi(z_{\min})/\mathrm{d}z_{\min}}{\xi(z_{\min})} \frac{1}{h(z_{\min})} = \frac{1}{z_{\min}} \frac{1}{(1/v_a)} = \frac{v_a}{z_{\min}} = \frac{s_a/\bar{a}}{a_{\min}/\bar{a}} = \frac{s_a}{a_{\min}} = \frac{s_a}{\bar{a} - s_a} \leq 1$$

$$s_a \leq \bar{a} - s_a \qquad \frac{s_a}{\bar{a}} \leq 1 - \frac{s_a}{\bar{a}} \qquad 2\frac{s_a}{\bar{a}} \leq 1 \qquad \frac{s_a}{\bar{a}} \leq \frac{1}{2}$$

$$v_a \leq \frac{1}{2} \qquad c = 1 \tag{391a}$$

(Při úpravě jsme mj. užili vztah $a_{\min} = \bar{a} - s_a$, který plyne přímo z (378a) a (379a).) Z posledního výrazu je zřejmé, že při $c = 1$ uvažovaná **nerovnost být splněna může**.

Souhrnně, **je-li** $c = 1$ **a** $v_a \leq 0{,}5$, pak vzhledem k tomu, také že $z_{\min} \geq 0$, je odpověď na rozhodovací otázku v bodě 1 algoritmu výpočtu (uvedeného za rov. (357) ) ANO. Dle bodu 2 je pak třeba určit $\eta_a$ z (352) a $\eta_P$ z (355). Užitím (352) a (359) v (355) s následnou úpravou za užití (338), (378a) a (379a) nalezneme pro tento případ

$$\eta_a = z_{\min} = \frac{a_{\min}}{\bar{a}} = \frac{\bar{a} - q}{\bar{a}} = \frac{\bar{a} - s_a}{\bar{a}} = 1 - v_a \tag{392}$$

$$\eta_P = \xi(z_{\min}) = z_{\min} = \frac{a_{\min}}{\bar{a}} = \frac{\bar{a} - q}{\bar{a}} = \frac{\bar{a} - s_a}{\bar{a}} = 1 - v_a \tag{393}$$

Nyní sledujme případ, v němž $c = 1$ ale $v_a > 0{,}5$. (Dle (390a) a (391a) je $\bar{a} = a_{\min} + s_a$, takže současně $v_a = s_a/\bar{a} = s_a/(a_{\min} + s_a) \leq 1$.) Odpověď na rozhodovací otázku (391a) je nyní negativní a je nutno pokračovat bodem 3 algoritmu výpočtu. Rovnice (346) má užitím vztahů (359), (360) a vztahů (388a), (389a) v tomto případě tvar

$$\frac{\mathrm{d}\xi(\eta_a)/\mathrm{d}\eta_a}{\xi(\eta_a)}\frac{1-H(\eta_a)}{h(\eta_a)}=\frac{1}{\eta_a}\frac{1-\left\{1-e^{-\left(\frac{\eta_a-1}{v_a}+1\right)}\right\}}{\frac{1}{v_a}e^{-\left(\frac{\eta_a-1}{v_a}+1\right)}}=1 \qquad \eta_a>z_{\min}$$

který úpravou vede na tvar

$$\frac{1}{\eta_a}\frac{e^{-\left(\frac{\eta_a-1}{v_a}+1\right)}}{\frac{1}{v_a}e^{-\left(\frac{\eta_a-1}{v_a}+1\right)}}=1 \qquad \frac{1}{\eta_a}\frac{1}{\frac{1}{v_a}}=1 \qquad \frac{v_a}{\eta_a}=1 \qquad \eta_a=v_a \qquad \eta_a>z_{\min} \tag{394}$$

(Podmínka $\eta_a > z_{\min}$ při nalezeném řešení $\eta_a = v_a$ znamená, že $v_a > z_{\min}$. Podle úpravy užité již v (392) ovšem $v_a > z_{\min} = 1 - v_a$, $2v_a > 1$, $v_a > 0{,}5$. To však je vstupní podmínka pro kterou bylo hledáno řešení. Nalezené řešení tedy existuje.) Využití substanční pevnosti dle bodu 3 algoritmu výpočtu stanovíme z rovnice (350) dosazením (394). Užitím (359) a (389a) nalezneme

$$\eta_P=\xi(\eta_a)\left[1-H(\eta_a)\right]=\xi(v_a)\left[1-H(v_a)\right]=v_a\left[1-\left\{1-e^{-\left(\frac{v_a-1}{v_a}+1\right)}\right\}\right]=$$

$$=v_a\,e^{-\left(\frac{v_a-1}{v_a}+1\right)}=v_a\,e^{-2+\frac{1}{v_a}} \tag{395}$$

Souhrnně tedy **pro** $c = 1$ **platí: je-li** $v_a \le 0{,}5$ **vypočteme** $\eta_a, \eta_P$ **z** (392) **a** (393)**, je-li** $v_a > 0{,}5$ **vypočteme** $\eta_a, \eta_P$ **z** (394) **a** (395). Všimněme si, že **výsledné hodnoty** $\eta_a, \eta_P$ **závisí pouze na variačním koeficientu** $v_a$ **tažnosti vláken**.

Rovnicí (391) jsme ukázali, že pro **případ** $c > 1$ není splněna podmínka (351) užitá při rozhodování v bodě 1 algoritmu výpočtů. Řešení tedy hledáme postupem dle bodu 3 tohoto algoritmu. Veličinu $\eta_a$ hledáme jako kořen rovnice (346), kterou upravíme užitím (359), (360) a pro případ $c > 1$ také dosazením (388) a (389).

$$\frac{\mathrm{d}\xi(\eta_a)/\mathrm{d}\eta_a}{\xi(\eta_a)}\frac{1-H(\eta_a)}{h(\eta_a)}=1$$

$$\frac{1}{\eta_a}\frac{1-\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{\eta_a-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^c\right]\right\}}{\frac{c}{(v_a/K_c)}\left(\frac{\eta_a-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{c-1}\exp\left[-\left(\frac{\eta_a-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^c\right]}=1$$

$$\frac{1}{\eta_a}\frac{1}{\frac{c}{(v_a/K_c)}\left(\frac{\eta_a-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{c-1}}=1$$

$$\frac{c\eta_a}{(v_a/K_c)}\left(\frac{\eta_a-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{c-1}=1 \qquad \eta_a>z_{\min} \tag{396}$$

Vyjádříme-li ještě $K_c$ z (380), najdeme konečný tvar

$$\frac{c\,\eta_a}{v_a \Big/ \sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)-\frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)}}\left[\frac{\eta_a-1}{v_a \Big/ \sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)-\frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)}}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right]^{c-1}=1 \qquad \eta_a > z_{\min} \tag{397}$$

Kořenem této rovnice je **využití substanční tažnosti** $\eta_a$. Jeho hodnota závisí na dvou parametrech - na **variačním koeficientu tažnosti vláken** $v_a$ a také na **parametru** $c$ Weibullova rozložení tažností vláken.

Vztah pro **využití substanční pevnosti** $\eta_P$ vypočteme podle bodu 3 algoritmu výpočtu dosazením $\eta_a$ z (397) do rovnice (350). Užitím (359) a (389) nalezneme výraz

$$\eta_P = \xi(\eta_a)\left[1-H(\eta_a)\right] = \eta_a \exp\left[-\left(\frac{\eta_a-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^c\right] \tag{398}$$

Vyjádříme-li ještě $K_c$ z (380), najdeme konečný tvar

$$\eta_P = \eta_a \exp\left[-\left(\frac{\eta_a-1}{v_a \Big/ \sqrt{\frac{2}{c}\Gamma\left(\frac{2}{c}\right)-\frac{1}{c^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{c}\right)}}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^c\right] \tag{399}$$

Souhrnně tedy **pro** $c>1$ **vypočteme** $\eta_a$, $\eta_P$ **z** (397) **a** (399). Všimněme si, že **výsledné hodnoty** $\eta_a$, $\eta_P$ **závisí na variačním koeficientu** $v_a$ **a na hodnotě parametru** $c$.

Kompletní řešení vyžaduje ještě určit závislost střední hodnoty $S^*$ síly přenášené jedním vláknem na poměrném prodloužení $\varepsilon$ a poté i vlastní tahovou pracovní křivku $S_\Sigma = nS^*$ svazku vláken. Pro výpočet $S^*$ byla odvozena rovnice (356), obsahující funkce $\xi(t)$ a $H(t)$. V tomto příkladu platí pro funkci $\xi(t)$ vztah (359). Pro funkci $H(t)$ pak platí vztah (389), kde ovšem musíme zaměnit původní označení proměnné $z$ za $t$; tedy

$$H(t) = 1-\exp\left[-\left(\frac{t-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^c\right] \tag{400}$$

Speciálně pro $c=1$ pak z (389a) platí

$$H(t) = 1-e^{-\left(\frac{t-1}{v_a}+1\right)} \tag{400a}$$

V tomto příkladě má tedy rovnice (356) po dosazení (359) a (400) tvar

$$\left.\begin{aligned}
S^* &= \overline{P}\,\xi(t) = \overline{P}\,t \qquad t \le z_{\min}\\
S^* &= \overline{P}\,\xi(t)\left[1-H(t)\right] = \overline{P}\,t\left[1-\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{t-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^c\right]\right\}\right] =\\
&= \overline{P}\,t\exp\left[-\left(\frac{t-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)\right)^c\right] \qquad t > z_{\min}
\end{aligned}\right\} \tag{401}$$

V uvedeném vztahu je možné užitím (382) při značení (338) upravit výraz v druhé rovnici.

Platí

$$\frac{t-1}{v_a/K_c}+\frac{1}{c}\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{t-1+\dfrac{v_a}{K_c}\dfrac{1}{c}\Gamma\left(\dfrac{1}{c}\right)}{v_a/K_c}=\frac{t-\left[1-\dfrac{v_a}{K_c}\dfrac{1}{c}\Gamma\left(\dfrac{1}{c}\right)\right]}{v_a/K_c}=K_c\,\frac{t-z_{\min}}{v_a} \tag{402}$$

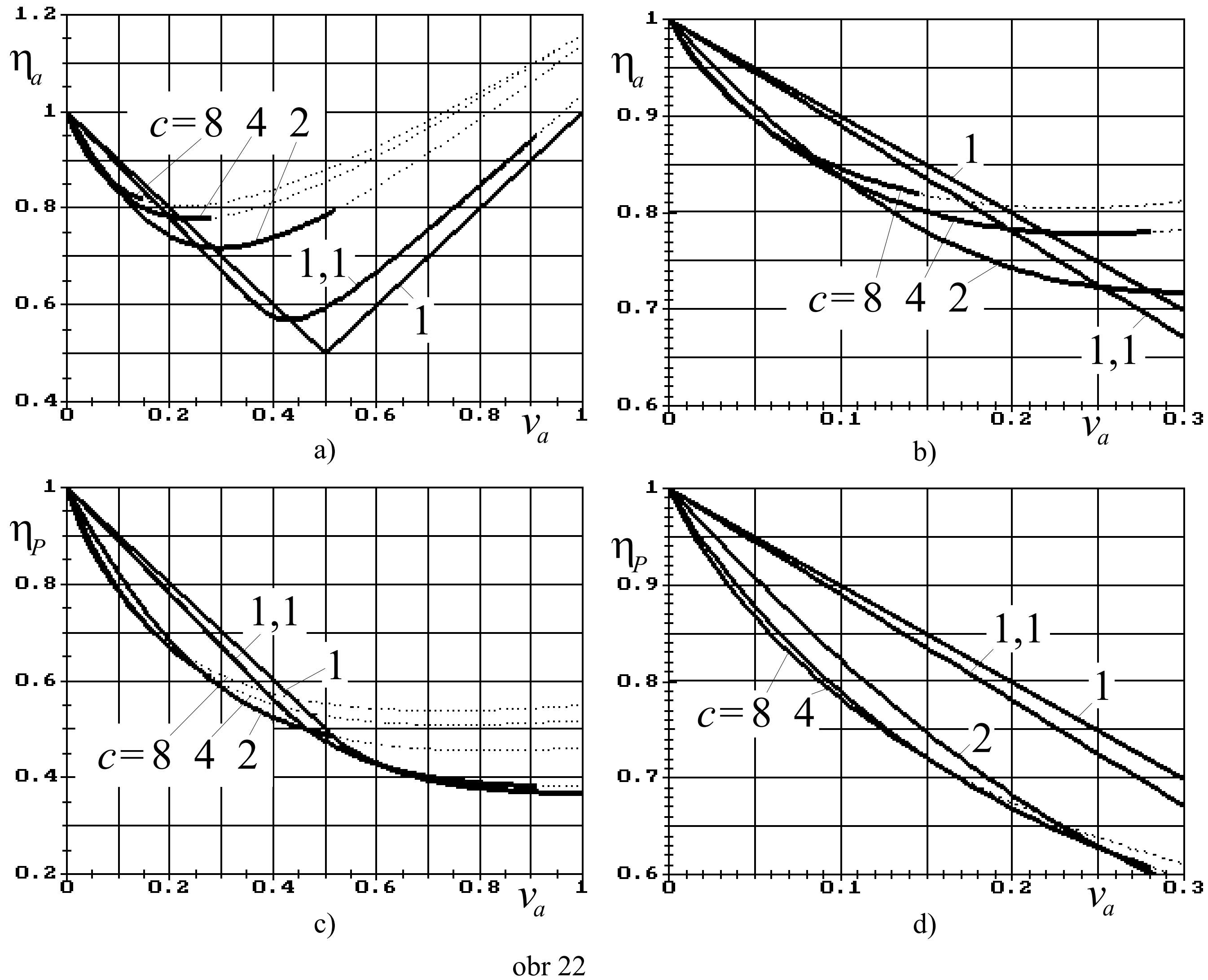
a dosazením tohoto výrazu do (401) vznikne

$$\left.\begin{aligned} S^* &= \overline{P}\,\xi(t)=\overline{P}\,t && t\le z_{\min}\\ S^* &= \overline{P}\,t\exp\left[-\left(K_c\,\frac{t-z_{\min}}{v_a}\right)^c\right] && t>z_{\min}\end{aligned}\right\} \tag{403}$$

Pro $c=1$ pak dosazením (359) a (400a) do (356) najdeme

$$\left.\begin{aligned} S^* &= \overline{P}\,\xi(t)=\overline{P}\,t && t\le z_{\min}\\ S^* &= \overline{P}\,\xi(t)\left[1-H(t)\right]=\overline{P}\,t\left[1-\left\{1-e^{-\left(\frac{t-1}{v_a}+1\right)}\right\}\right]=\overline{P}\,t\,e^{-\left(\frac{t-1}{v_a}+1\right)} && t>z_{\min}\end{aligned}\right\} \tag{403a}$$

Užitím rovnic (392) až (395) při $c=1$ a rovnic (397) a (399) při $c>1$ byly vypočteny hodnoty $\eta_a$ a $\eta_P$, znázorněné v grafech na obr. 22.

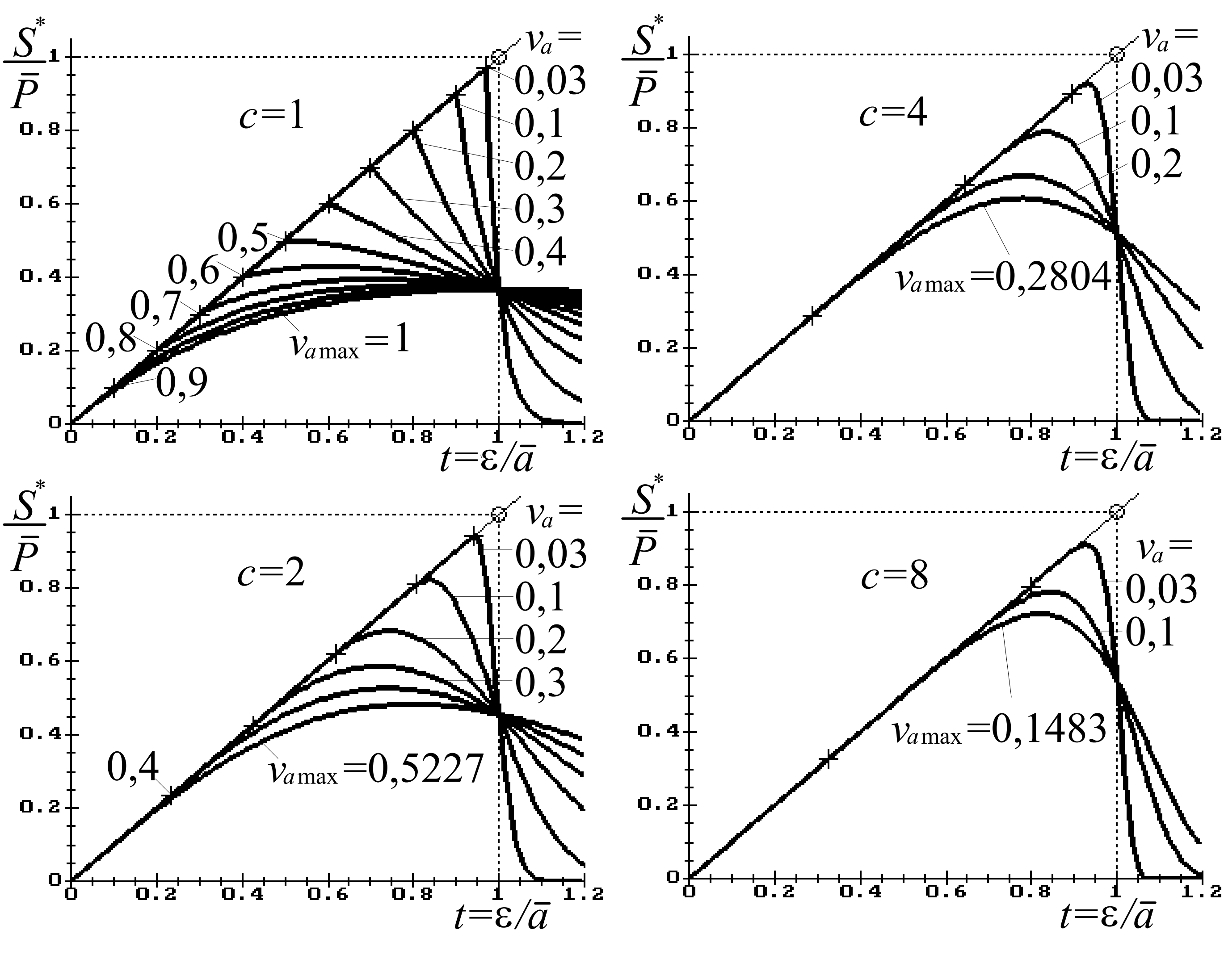



obr 22

Křivky na obr. 22a) vyjadřují závislost využití substanční tažnosti $\eta_a$ na variačním koeficientu $v_a$ tažnosti vláken. Křivky v přípustné oblasti variačního koeficientu, tj. podle (386) či (386a) v oblasti $v_a \le v_{a\max}$, jsou vyznačeny silnou plnou čarou. (Tečkované části křivek se týkají fyzikálně nereálné oblasti $v_a > v_{a\max}$, tj. $z_{\min} < 0$.) Průběhy křivek jsou, jak je zřejmé, závislé na hodnotě parametru $c$. Je zajímavé, že při $c$ v rozmezí asi 4 až 8 se průběh, až na přípustnou oblast $v_a$, příliš neliší od varianty Gaussova rozložení - srovnej s obr. 20a). V aktuální oblasti $v_a \in \langle 0; 0,3 \rangle$ lze tytéž křivky sledovat podrobněji na obr. 22b).

Křivky na obr. 22c) znázorňují podobným způsobem využití substanční pevnosti $\eta_P$ v závislosti na variačním koeficientu $v_a$ tažnosti vláken. Také tyto průběhy jsou závislé na hodnotě parametru $c$ a také zde se průběhy závislostí při parametru $c$ v rozmezí asi 4 až 8 příliš neliší od varianty Gaussova rozložení dle obr. 20a). V aktuální oblasti $v_a \in \langle 0; 0,3 \rangle$ je průběh sledovaných křivek podrobněji vyjádřen na obr. 22d).

Závislost poměru $S^*/\bar{P}$ na veličině $t = \varepsilon/\bar{a}$ je znázorněna křivkami na obr. 23, vypočtenými z rovnic (403), (403a) při užití $K_c$ dle (380), (380a) a $z_{\min} = a_{\min}/\bar{a}$ dle (382).




obr. 23

Jednotlivé grafy jsou zpracovány pro vybrané hodnoty $c = 1, 2, 4$ a 8, křivky jsou vynášeny pro vybrané hodnoty $v_a$ od 0,03 do nejvyšší přípustné hodnoty $v_{a\max}$, určené z (306) či (386a). Symboly (+) určují body $t = z_{\min}$; hodnoty $z_{\min} = a_{\min}/\bar{a}$ byly vypočteny z (382) či (384a). Tyto body oddělují první a druhou část tahové pracovní křivky - viz rovnice (403) či (403a).

U varianty $c = 1$ při $v_a > 0{,}5$ si lze všimnout zřejmé shody typu křivek se schématem na obr. 19b). Ve všech ostatních případech odpovídají vypočtené křivky typem svého průběhu obr. 19a). Při hodnotě $c = 4$ je zajímavé si povšimnout, že průběhy křivek jsou blízké Gaussovské variantě na obr. 21.

Závěrem poznamenejme, že *poznámka 1* v závěru předchozího příkladu 1 (Gaussovský) platí obdobně i pro tento druhý, Weibullovský příklad.

## 3.4 Vícekomponentní svazky

**Tahová pracovní křivka dílčího svazku.** Uvažujme svazek vláken vytvořený z $m$ komponent, tj. z $m$ různých druhů vlákenného materiálu. Jednotlivé komponenty označujme pořadovým indexem $i = 1, 2, \cdots, m$ a veličiny, které se k nim váží označujme tímto indexem komponenty vpravo dole.

Ve svazku obsahujícím celkově $n$ vláken je $n_i$ vláken od $i$-té komponenty. Platí

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i \tag{404}$$

Skupinu $n_i$ vláken jedné komponenty můžeme chápat jako ***i*-tý dílčí svazek**, vytvořený z vláken jen jedné komponenty. **Celý svazek** vláken lze pak chápat jako souhrn těchto dílčích svazků.

**Střední tahová síla v jednom vláknu *i*-tého dílčího svazku** je (při *předpokladu* **tahových pracovních křivek vláken definovaných pevností a tažností**) dána ve shodě s (300) vztahem

$$\left.\begin{aligned}
S_i^* &= \int_{a_{\min i}}^{a_{\max i}} \left[ \int_{P_{\min i}}^{P_{\max i}} \overset{o}{\sigma}_i(\varepsilon, P, a)\, u_i(P, a)\,\mathrm{d}a \right] \mathrm{d}P && \varepsilon \le a_{\min i} \\
S_i^* &= \int_{\varepsilon}^{a_{\max i}} \left[ \int_{P_{\min i}}^{P_{\max i}} \overset{o}{\sigma}_i(\varepsilon, P, a)\, u_i(P, a)\,\mathrm{d}P \right] \mathrm{d}a && a_{\min i} < \varepsilon < a_{\max i} \\
S_i^* &= 0 \qquad a_{\max i} \le \varepsilon &&
\end{aligned}\right\} \tag{405}$$

Funkce a veličiny opatřené indexem $i$ se týkají $i$-té komponenty. Bez indexu je, kromě integračních proměnných $P$ a $a$, jen poměrné prodloužení $\varepsilon$, neboť je společné všem vláknům celého svazku. Nad rámec rovnice (300) je v rovnici (405) dodefinováno $S_i^*$ i pro $\varepsilon > a_{\max i}$, tj. i pro oblast, ve které jsou již všechna vlákna dílčího svazku přetržená; pak je v každém vlákně jeho tahová síla nulová, a střední tahová síla v jednom vlákně je tedy rovněž nulová.

*Předpokládáme-li*, že **vlákna jsou napěťově podobná**, pak z (405) plyne vztah obdobný (306).

$$\left.\begin{aligned}
&S_i^* = \overline{\sigma}_i(\varepsilon)\int_{a_{\min i}}^{a_{\max i}} \frac{\overline{P_i(a)}}{\overline{\sigma}_i(a)} g_i(a)\,\mathrm{d}a && \varepsilon \le a_{\min i} \\
&S_i^* = \overline{\sigma}_i(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{a_{\max i}} \frac{\overline{P_i(a)}}{\overline{\sigma}_i(a)} g_i(a)\,\mathrm{d}a && a_{\min i} < \varepsilon < a_{\max i} \\
&S_i^* = 0 \qquad a_{\max i} \le \varepsilon &&
\end{aligned}\right\} \tag{406}$$

kde $\overline{P_i(a)}$ je podle (288) určeno nyní výrazem $\overline{P_i(a)} = \int_{P_{\min i}}^{P_{\max i}} P u_i(P,a)\,\mathrm{d}P \Big/ g_i(a)$.

Konečně, je-li splněn i *předpoklad* **souměrných pevností**, plyne ze (406) vztah obdobný (307).

$$\left.\begin{aligned}
&S_i^* = \overline{\sigma}_i(\varepsilon) && \varepsilon \le a_{\min i} \\
&S_i^* = \overline{\sigma}_i(\varepsilon)\left[1 - G_i(\varepsilon)\right] && a_{\min i} < \varepsilon < a_{\max i} \\
&S_i^* = 0 && a_{\max i} \le \varepsilon
\end{aligned}\right\} \tag{407}$$

Pro **tahovou pracovní křivku dílčího svazku** pak ve shodě s definiční rovnicí (292) platí

$$S_{\Sigma,i} = n_i S_i^* \tag{408}$$

kde podle míry splnění zavedených předpokladů užijeme pro $S_i^*$ vztah (405), (406), nebo (407).

Výsledná tahová síla v celém svazku je součtem tahových sil dílčích svazků. Platí tedy

$$S_\Sigma = \sum_{i=1}^{m} S_{\Sigma,i} = \sum_{i=1}^{m}\left(n_i S_i^*\right) \tag{409}$$

Každé $S_i^*$ je funkcí ε, a proto i $S_\Sigma$ je funkcí ε. Předchozí výraz tedy definuje **tahovou pracovní křivku celého svazku**. Podle míry splnění zavedených předpokladů užijeme pro jednotlivá $S_i^*$, $i = 1, 2, \cdots, m$, vztahy (405), (406), nebo (407).

Pro **střední tahovou sílu v jednom vlákně celého svazku** platí

$$S^* = \frac{S_\Sigma}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(n_i S_i^*\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n_i}{n} S_i^*\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\upsilon_i S_i^*\right) \tag{410}$$

Ve shodě s rovnicí (A22) - z části A této monografie - označují veličiny

$$\upsilon_i = n_i / n = n_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} n_i \tag{411a}$$

**četnostní podíly komponent**.

V praxi bývají spíše uváděny **hmotnostní podíly** $q_i$ a **jemnosti** $t_i$ vláken jednotlivých komponent. V části A jsme pro **střední jemnost** vláken $t$ odvodili vztah (A17) $t = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{m}\left(q_i / t_i\right)$ a pro **délkové podíly** komponent $\lambda_i$ vztah (A18) $\lambda_i = q_i t / t_i$. Pro **četnostní podíly** komponent byl nalezen vztah (A22). Protože však ve svazku na obr. 17a) mají všechna vlákna **stejnou** délku $l_i = h$, má v tomto případě (A22) tvar $\upsilon_i = \left(\lambda_i / h\right) \Big/ \sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_i / h\right) = \lambda_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \lambda_i$, takže

$$\upsilon_i = q_i \frac{t}{t_i} = \frac{\dfrac{q_i}{t_i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{t_i}} \tag{411}$$

**Pevnost a tažnost celého svazku.** V rovnicích (405), (406) či (407) je funkce $S_i^*$ jiná pro oblast $\varepsilon \le a_{\min i}$, jiná pro oblast $a_{\min i} < \varepsilon < a_{\max i}$ a ještě jiná pro oblast $a_{\max i} \le \varepsilon$. (V **bodech** $a_{\min i}, a_{\max i}$ nejsou definovány vyšší derivace a nemusí být definována ani první derivace.) Tahová pracovní křivka celého svazku pak vzhledem k (409) nemá definované derivace (vyšší derivace, nebo i 1. derivaci) v bodech $\left\{a_{\min 1}, a_{\min 2}, \cdots, a_{\min m},\ a_{\max 1}, a_{\max 2}, \cdots, a_{\max m}\right\}$.

Maximum síly $S_\Sigma$ je **pevností svazku** $P_\Sigma$ a poměrné prodloužení ε při $S_\Sigma = P_\Sigma$ je **tažností svazku** $a^*$. Pro určení pevnosti je obecně třeba vyšetřit hodnoty sil ve všech bodech množiny $\left\{a_{\min 1}, a_{\min 2}, \cdots, a_{\min m},\ a_{\max 1}, a_{\max 2}, \cdots, a_{\max m}\right\}$ a nalézt (pokud existují) maxima na obloucích křivky mezi nimi. Maximum ze všech takto určených hodnot je hledanou pevností a poměrné prodloužení k němu příslušející je hledanou tažností celého svazku vláken. (Úvahy jsou logicky obdobné jako v předchozí kapitole u příkladu 2 - Weibullovského.) V následujícím příkladu rozebereme podrobněji jen jeden velmi jednoduchý případ.

**Příklad.** Uvažujme svazek vláken tvořený dvěma komponentami ($i = 1, 2,\ m = 2$). Každá z nich splňuje 1) **teorém napěťové podobnosti** (viz kap. 2.1), 2) **předpoklad souměrných pevností** (viz kap. 3.2), 3)**"vzorová" tahová pracovní křivka je lineární** a 4) **tažnosti mají Gaussovo rozložení** se střední hodnotou $\bar{a}_i$ a rozptylem $s_{a,i}^2$.

"Vzorové" tahové pracovní křivky mají v tomto případě tvar

$$\bar{\sigma}_i(\varepsilon) = \frac{\bar{P}_i}{\bar{a}_i}\varepsilon \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}_i(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\bar{P}_i}{\bar{a}_i}\right) \tag{412}$$

kde $\bar{P}_i, \bar{a}_i$ jsou střední pevnost a střední tažnost vláken $i$-té komponenty.

Hustoty pravděpodobnosti rozložení tažností vláken jednotlivých komponent jsou

$$g_i(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, s_{a,i}} \exp\left[-\frac{(a - \bar{a}_i)^2}{2 s_{a,i}^2}\right] \qquad a_{\min i} = -\infty, \quad a_{\max i} = \infty \tag{413}$$

a distribuční funkce jsou

$$G_i(a) = \int_{-\infty}^{a} g_i(a)\,\mathrm{d}a \tag{414}$$

Pro všechna $i$ je $a_{\min i} = -\infty, a_{\max i} = \infty$, takže pro reálné ε platí $a_{\min i} < \varepsilon < a_{\max i}$ a vzhledem k předpokladům platí pro **střední tahovou sílu ve vlákně *i*-té komponenty** dle (407) a (412) vztah

$$S_i^* = \bar{\sigma}_i(\varepsilon)\left[1 - G_i(\varepsilon)\right] = \frac{\bar{P}_i}{\bar{a}_i}\varepsilon\left[1 - G_i(\varepsilon)\right] \tag{415}$$

Podle (410) užitím (415) nalezneme pro **střední tahovou sílu ve vlákně z celého svazku** vztah

$$S^* = \sum_{i=1}^{2}\left(\upsilon_i S_i^*\right) = \upsilon_1 \frac{\bar{P}_1}{\bar{a}_1}\varepsilon\left[1 - G_1(\varepsilon)\right] + \upsilon_2 \frac{\bar{P}_2}{\bar{a}_1}\varepsilon\left[1 - G_2(\varepsilon)\right] = \tag{416}$$
$$= \alpha_1\varepsilon\left[1 - G_1(\varepsilon)\right] + \alpha_2\varepsilon\left[1 - G_2(\varepsilon)\right]$$

kde $\alpha_1 = \upsilon_1 \bar{P}_1/\bar{a}_1$, $\alpha_2 = \upsilon_2 \bar{P}_2/\bar{a}_2$ jsou charakteristické parametry komponent.

Známe-li **poměrné pevnosti** $p_1$, $p_2$ vláken obou komponent, můžeme ve shodě s (A12) vyjádřit $\bar{P}_1 = p_1 t_1$, $\bar{P}_2 = p_2 t_2$. ($t_1, t_2$ jsou jemnosti vláken jednotlivých komponent.)

Užijeme-li ještě vztah (411) nalezneme

$$\alpha_i = \upsilon_i \frac{\overline{P}_i}{\overline{a}_i} = q_i \frac{t}{t_i} \frac{p_i\, t_i}{\overline{a}_i} = t\, q_i \frac{p_i}{\overline{a}_i} = t\,\beta_i \qquad i = 1,2 \tag{417}$$

V předchozích výrazech jsme zavedli nové **parametry komponent**

$$\beta_i = q_i \frac{p_i}{\overline{a}_i} \qquad i = 1,2 \tag{418}$$

Dosazením (417) do (416) lze vyjádřit **střední tahovou sílu ve vlákně** tvarem

$$S^* = \alpha_1 \varepsilon \left[1 - G_1(\varepsilon)\right] + \alpha_2 \varepsilon \left[1 - G_2(\varepsilon)\right] = t\left\{\beta_1 \varepsilon \left[1 - G_1(\varepsilon)\right] + \beta_2 \varepsilon \left[1 - G_2(\varepsilon)\right]\right\} \tag{419}$$

**Celkovou tahovou sílu** ve svazku nalezneme dosazením (419) do (292). Platí

$$S_\Sigma = nS^* = nt\left\{\beta_1 \varepsilon \left[1 - G_1(\varepsilon)\right] + \beta_2 \varepsilon \left[1 - G_2(\varepsilon)\right]\right\} = T\left\{\beta_1 \varepsilon \left[1 - G_1(\varepsilon)\right] + \beta_2 \varepsilon \left[1 - G_2(\varepsilon)\right]\right\} \tag{420}$$

kde veličina $T = nt$ vyjadřuje celkovou **jemnost svazku vláken.** Ze (420) lze snadno stanovit i **napětí ve svazku** $\sigma_\Sigma$ ve smyslu textilní definice (A12), tj. sílu, připadající na jednotku jemnosti.

$$\sigma_\Sigma = \frac{S_\Sigma}{T} = \beta_1 \varepsilon \left[1 - G_1(\varepsilon)\right] + \beta_2 \varepsilon \left[1 - G_2(\varepsilon)\right] \tag{421}$$

Výrazy (420) či (421) jsou konkrétním vyjádřením **tahové pracovní křivky svazku vláken**.

Maximum síly $S_\Sigma$ je **pevností svazku** $P_\Sigma$ a poměrné prodloužení $\varepsilon$ při $S_\Sigma = P_\Sigma$ je **tažností svazku** $a^*$. (Též maximum napětí $\sigma_\Sigma$ je **poměrnou pevností svazku** $p_\Sigma = P_\Sigma / T$.) Protože tahová pracovní křivka (420) je hladká, splňuje tažnost rovnici (308), t.j. $\left(\mathrm{d}S_\Sigma / \mathrm{d}\varepsilon\right)_{\varepsilon = a^*} = 0$. Odtud $\left[\mathrm{d}\left(nS^*\right)/\mathrm{d}\varepsilon\right]_{\varepsilon = a^*} = n\left(\mathrm{d}S^*/\mathrm{d}\varepsilon\right)_{\varepsilon = a^*} = 0$, a protože $n \neq 0$, je $\left(\mathrm{d}S^*/\mathrm{d}\varepsilon\right)_{\varepsilon = a^*} = 0$. Derivací (419) najdeme

$$\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}\varepsilon} = t\Big(\beta_1 \left\{\left[1 - G_1(\varepsilon)\right] + \varepsilon\left[-g_1(\varepsilon)\right]\right\} + \beta_2 \left\{\left[1 - G_2(\varepsilon)\right] + \varepsilon\left[-g_2(\varepsilon)\right]\right\}\Big) =$$

$$= t\Big(\beta_1 \left[1 - G_1(\varepsilon)\right] + \beta_2 \left[1 - G_2(\varepsilon)\right] - \beta_1 \varepsilon\, g_1(\varepsilon) - \beta_2 \varepsilon\, g_2(\varepsilon)\Big) \tag{422}$$

(Funkce $G_1, g_1, G_2, g_2$ jsou popsány vztahy (413), (414).) Pro $\varepsilon = a^*$ je pak splněna podmínka

$$\left(\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon = a^*} = t\Big(\beta_1 \left[1 - G_1\left(a^*\right)\right] + \beta_2 \left[1 - G_2\left(a^*\right)\right] - \beta_1 a^*\, g_1\left(a^*\right) - \beta_2 a^*\, g_2\left(a^*\right)\Big) = 0$$

$$\frac{1}{a^*} \frac{\beta_1 \left[1 - G_1\left(a^*\right)\right] + \beta_2 \left[1 - G_2\left(a^*\right)\right]}{\beta_1 g_1\left(a^*\right) + \beta_2 g_2\left(a^*\right)} = 1 \tag{423}$$

Numerickým řešením rovnice (423) s využitím rovnic (413), (414) nalezneme **1 až 3 kořeny**. "Správný" kořen - tj. ten, který vyjadřuje skutečnou tažnost svazku $a^*$ - určíme ze vztahu pro výpočet pevnosti. Tažnost $a^*$ a pevnost $P_\Sigma$ svazku jsou souřadnicemi jednoho z bodů tahové pracovní křivky, popsané vztahem (419). Můžeme proto psát

$$P_\Sigma = T\left\{\beta_1 a^* \left[1 - G_1\left(a^*\right)\right] + \beta_2 a^* \left[1 - G_2\left(a^*\right)\right]\right\} \tag{424}$$

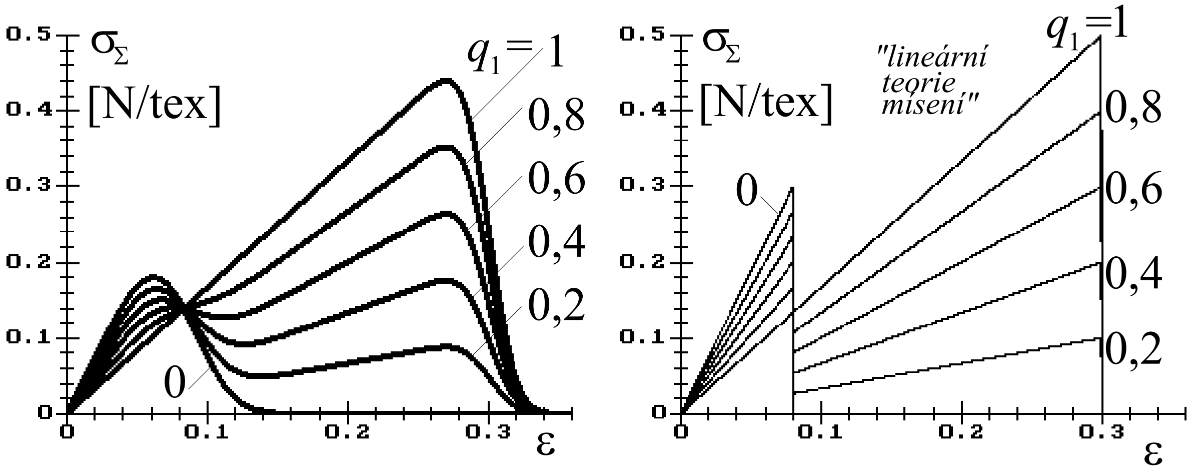
Má-li rov. (423) více kořenů, pak kořen, který v (424) vede na **největší hodnotu** $P_\Sigma$ je hledanou **tažností** $a^*$ **svazku**. Současně vypočtená hodnota $P_\Sigma$ je hledanou **pevností svazku**. Místo (424) lze při výpočtech užít také rovnici pro výpočet **poměrné pevnosti svazku**; ze (421) totiž plyne

$$p_\Sigma = \frac{P_\Sigma}{T} = \beta_1 a^* \left[1 - G_1\left(a^*\right)\right] + \beta_2 a^* \left[1 - G_2\left(a^*\right)\right] \tag{425}$$

Výsledky ilustruje numerický příklad. Uvažujme materiály s následujícími parametry:

| *Parametr materiálu* | *Materiál 1* | *Materiál 2* |
|---|---|---|
| střední poměrná pevnost vláken $[\mathrm{N/tex}]$ | $p_1 = 0,5$ | $p_2 = 0,3$ |
| střední tažnost vláken | $\overline{a_1} = 0,3\,(30\%)$ | $\overline{a_2} = 0,08\,(8\%)$ |
| směrodatná odchylka tažnosti | $s_{a,1} = 0,015$ $(\mathrm{var.koef.}\ 5\%)$ | $s_{a,2} = 0,024$ $(\mathrm{var.koef.}\ 30\%)$ |

(Materiál 1 by mohl přibližně odpovídat polyesterovým vláknům, materiál 2 bavlně.) **Tahové pracovní křivky** určené z (421) užitím (418), (413), (414) a vztahu $q_1 + q_2 = 1$, jsou na obr. 24a). Tahové pracovní křivky jsou zde **dvouvrcholové** (mimo jednokomponentní, při $q_1 = 0$ či $q_1 = 1$).

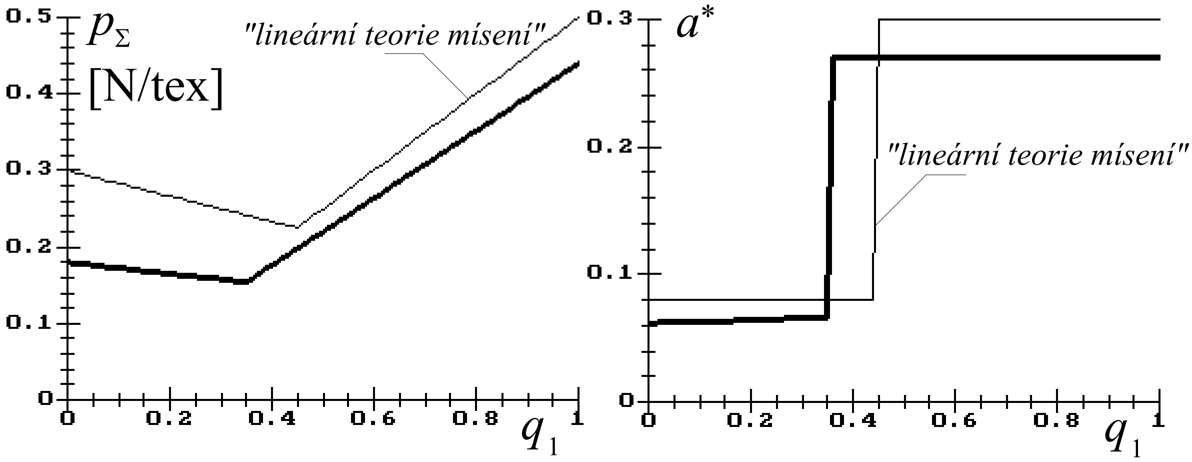



a) b)

obr. 24

Na obr. 24b) jsou znázorněny obdobné průběhy, avšak při $s_{a,1} \to 0$ a $s_{a,2} \to 0$. Tyto křivky odpovídají známé *"lineární teorii mísení"*. Porovnáním grafů lze posoudit vliv variability tažnosti.

Řešením rov. (423) při použití (418), (413), (414) byly též vypočteny závislosti **poměrné pevnosti svazku** (obr. 25a) a **tažnosti svazku** (obr. 25b) na **hmotnostním podílu** $q_1$, znázorněné silnou čarou. Slabé čáry odpovídají případu, kdy $s_{a,1} \to 0$ a $s_{a,2} \to 0$, tj. "lineární teorii mísení".




a) b)

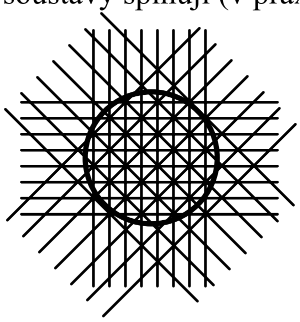
obr. 25

# 4. TAHOVÉ NAMÁHÁNÍ, PEVNOST A TAŽNOST MULTIAXIÁLNÍ TEXTILIE

## 4.1 Namáhání vlákna multiaxiální textilie

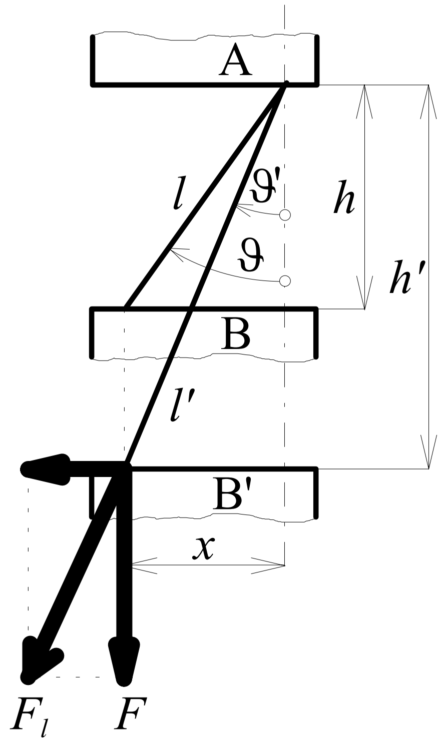
**Multiaxiální textilie.** Na obr. 26 je v zakroužkované části znázorněn textilní vlákenný útvar, vytvořený ze 4 soustav **vláken**[1)], kde každá soustava je má jiný směr. Podobné útvary ze soustav vláken či jiných délkových textilií budeme nazývat **multiaxiálními textiliemi**.

Tato kapitola se zabývá jen nejjednoduššími multiaxiálními textiliemi, jejichž vlákenné soustavy splňují (v praxi alespoň přibližně) následující *předpoklady*:



obr. 26

1) všechna **vlákna jsou nekonečná**,
2) každé **vlákno je "rovné"**, tj. má tvar přímky,
3) vlákna jedné soustavy leží vedle sebe **stejně vzdálena**,
4) všechna vlákna jedné soustavy mají **stejné vlastnosti**,
   (např. vliv variability tahových pracovních křivek se zanedbává)
5) **vliv upínací délky** na mechanické vlastnosti vláken **lze zanedbat**,
6) Vlákna se **vzájemně neovlivňují** (t.j. zanedbává se tření a j.).




obr. 27

Při používání jsou multiaxiální textilie namáhány různě. Při jejich zkoušení se nejčastěji užívá **dynamometr** ("trhačka") do jehož **čelistí** se vzorek textile upne (sevře). Deformace textilie, vyvozená **oddalováním** čelistí, pak vy-volává měřenou tahovou sílu. Procesy probíhající při takové zkoušce tvoří základ teoretických úvah této stati.

**Geometrie jednoho vlákna.** Uvažujme jedno vlákno jedné soustavy, sevřené horní čelistí A a dolní čelistí B dynamometru, jak je znázorněno na obr. 27. Na **upínací délce** $h$ (výchozí vzdálenost čelistí) je sevřena délka vlákna $l$. Se směrem osy čelistí svírá toto vlákno úhel $\vartheta$. Body sevření vlákna čelistmi A a B jsou ve směru kolmém k ose čelistí vzdáleny $x$. Podle Pythagorovy věty platí

$$x^2 = l^2 - h^2 \tag{426}$$

[1)] Pro názornost budeme pojmem "vlákna" označovat základní stavební jednotky multiaxiální textilie. Ve skutečnosti to však mohou být nejen vlákna, ale i **příze**, jiné **nitě**, nebo další druhy **délkových textilií**.

**Úhel sklonu vlákna** vzhledem k ose čelistí je $\vartheta \in \left(-\pi/2, \pi/2\right\rangle$. Z obr. 27 vyplývá vztah

$$\cos\vartheta = \frac{h}{l} \tag{427}$$

Oddálením dolní čelisti do polohy B' se vzdálenost čelistí změní na $h'$ a sledované vlákno se prodlouží na délku $l'$. Podle Pythagorovy věty nyní platí

$$x^2 = l'^2 - h'^2 \tag{428}$$

Pro nový úhel sklonu vlákna $\vartheta'$ z obr. 27 plyne

$$\cos\vartheta' = \frac{h'}{l'} \tag{429}$$

Pro popis změn délek zavedeme **poměrné prodloužení v čelistech**

$$\varepsilon = \frac{h' - h}{h} = \frac{h'}{h} - 1 \qquad h' = h(1+\varepsilon) \tag{430}$$

a **poměrné prodloužení vlákna**

$$\varepsilon_l = \frac{l' - l}{l} = \frac{l'}{l} - 1 \qquad l' = l(1+\varepsilon_l) \tag{431}$$

Dosazením (427), (430) a (431) do (429) najdeme vztah

$$\cos\vartheta' = \frac{h'}{l'} = \frac{h(1+\varepsilon)}{l(1+\varepsilon_l)} = \cos\vartheta \frac{(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon_l)} \tag{432}$$

Porovnáním rovnic (426) a (428) s následným využitím (427), (430) a (431) postupně nalezneme

$$l^2 - h^2 = l'^2 - h'^2 \qquad 1 - \frac{h^2}{l^2} = \frac{l'^2}{l^2} - \frac{h'^2}{l^2} = \frac{l^2(1+\varepsilon_l)^2}{l^2} - \frac{h^2(1+\varepsilon)^2}{l^2}$$

$$1 - \cos^2\vartheta = (1+\varepsilon_l)^2 - \cos^2\vartheta(1+\varepsilon)^2 \qquad 1 - \cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta(1+\varepsilon)^2 = (1+\varepsilon_l)^2 \tag{433}$$

$$\varepsilon_l = \sqrt{1 + \cos^2\vartheta\left[(1+\varepsilon)^2 - 1\right]} - 1 = \sqrt{1 + \cos^2\vartheta\left[2\varepsilon + \varepsilon^2\right]} - 1 \tag{434}$$

Poslední výraz dovoluje vyjádřit **poměrné prodloužení vlákna** $\varepsilon_l$ na základě jeho výchozího sklonu $\vartheta$ a poměrného prodloužení v čelistech $\varepsilon$.

S rostoucím poměrným prodloužením $\varepsilon$ v čelistech narůstá dle (434) i poměrné prodloužení vlákna $\varepsilon_l$, až posléze dosáhne hodnoty **tažnosti vlákna** $a$ a vlákno se přetrhne. **Poměrné prodloužení v čelistech při přetržení vlákna** označme $\varepsilon^*$. Z rovnice (433) plyne.

$$1 - \cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta(1+\varepsilon^*)^2 = (1+a)^2 \qquad (1+\varepsilon^*)^2 = \frac{(1+a)^2 - 1 + \cos^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}$$

$$\varepsilon^* = \sqrt{\frac{(1+a)^2 - \sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}} - 1 = \sqrt{\frac{2a + a^2 + \cos^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2a + a^2}{\cos^2\vartheta}} - 1 \tag{435}$$

Při **velmi malé hodnotě** $\varepsilon$ je možné vyjádřit vztah (434) jednodušeji, neboť s dostatečnou přesností platí následující **přibližné vztahy**

$$\left.\begin{array}{l} 2\varepsilon + \varepsilon^2 \cong 2\varepsilon \\ \sqrt{1 + 2\,\varepsilon\cos^2\vartheta} \cong 1 + \varepsilon\cos^2\vartheta \end{array}\right\} \quad \varepsilon \ll \tag{436}$$

Užitím těchto výrazů v (434) nalezneme

$$\begin{aligned}\varepsilon_l &= \sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]}-1 \cong \sqrt{1+2\varepsilon\cos^2\vartheta}-1 \cong \left(1+\varepsilon\cos^2\vartheta\right)-1 = \\ &= \varepsilon\cos^2\vartheta \qquad\qquad\qquad \varepsilon \ll\end{aligned} \tag{437}$$

Je-li také **tažnost vlákna** $a$ velmi malá, pak ze (437) pro **poměrné prodloužení v čelistech při přetržení vlákna** platí

$$a = \varepsilon^* \cos^2\vartheta \qquad \varepsilon^* = \frac{a}{\cos^2\vartheta} \qquad a \ll \tag{438}$$

(Tentýž výsledek nalezneme, upravíme-li užitím přibližných vztahů rovnici (435).)

**Síly od jednoho vlákna.** Poměrné prodloužení vlákna $\varepsilon_l$ způsobí vznik síly $F_l$ ve směru osy vlákna - obr. 27. Funkce přiřazující tyto veličiny je **tahová pracovní křivka vlákna**

$$F_l = \sigma(\varepsilon_l) \qquad \left(0 = \sigma(0)\right) \tag{439}$$

Speciálně mezi **pevností** $P$ a **tažností** $a$ **vlákna** podle (439) platí vztah

$$P = \sigma(a) \tag{440}$$

Jednoduchým příkladem je **lineární tahová pracovní křivka**, popsaná funkcí

$$\left.\begin{aligned} F_l &= \sigma(\varepsilon_l) = \frac{P}{a}\varepsilon_l & \varepsilon_l &\le a \\ F_l &= \sigma(\varepsilon_l) = 0 & \varepsilon_l &> a\end{aligned}\right\} \tag{441}$$

Sílu $F_l$ na obr. 27 lze rozložit na **sílu** $F$, **působící ve směru osy čelistí** a na složku kolmou k tomuto směru (obvykle zachycenou ohybovou tuhostí nosníků čelistí). Užitím rovnic (432) a (439) nalezneme z obr. 27 pro sílu $F$ vztah

$$F = F_l\cos\vartheta' = \sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos\vartheta \tag{442}$$

Dosazením (434) do (442) vznikne vztah vyjadřující **závislost síly** $F$ **na poměrném prodloužení v čelistech** $\varepsilon$ ; funkce závisí na parametru $\vartheta$ a na tahové pracovní křivce vlákna $\sigma(\varepsilon_l)$.

V okamžiku přetržení vlákna je $\varepsilon_l = a$ a odpovídající $\varepsilon = \varepsilon^*$ plyne ze (435). **Síla působící ve směru osy čelistí při přetrhu vlákna** je pak $F = F^*$. Z rovnic (442), (440) a (435) nalezneme

$$\begin{aligned} F^* &= \sigma(a)\frac{1+\varepsilon^*}{1+a}\cos\vartheta = P\frac{1+\left(\sqrt{\dfrac{(1+a)^2-\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}}-1\right)}{1+a}\cos\vartheta = \\ &= P\frac{\sqrt{\dfrac{(1+a)^2-\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}}}{1+a}\cos\vartheta = P\sqrt{1-\frac{\sin^2\vartheta}{(1+a)^2}}\end{aligned} \tag{443}$$

**Varianta A** je zvláště jednoduchým případem předchozího řešení, která splňuje následující *předpoklady*: *1)* **poměrné prodloužení v čelistech při přetržení vlákna je malé** ($\varepsilon^* \ll$, dle (438) je také tažnost $a \ll$; velmi malé je i každé $\varepsilon < \varepsilon^*$, takže platí rovnice (437) ),

*2)* **tahová pracovní křivka je lineární** (platí rovnice (441)).

Pro variantu A nalezneme dosazením (437) a (441) do (442) vztah

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{P}{a}\varepsilon_l \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos\vartheta = \frac{P}{a}\left(\varepsilon\cos^2\vartheta\right)\frac{1+\varepsilon}{1+\left(\varepsilon\cos^2\vartheta\right)}\cos\vartheta = \frac{P}{a}\cos^3\vartheta\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon\cos^2\vartheta} \quad \varepsilon_l \le a \quad \left(\varepsilon \le \varepsilon^*\right) \\ F &= 0\cdot\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos\vartheta = 0 \qquad \varepsilon_l > a \quad \left(\varepsilon > \varepsilon^*\right) \end{aligned}\right\} \tag{444}$$

Protože $\varepsilon \ll$, platí též přibližné výrazy

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1+\varepsilon\cos^2\vartheta} \cong 1-\varepsilon\cos^2\vartheta \\ &\varepsilon+\varepsilon^2\sin^2\vartheta-\varepsilon^3\cos^2\vartheta \cong \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon \ll \tag{445}$$

Jejich užitím lze provést následující úpravu prvého výrazu ze (444)

$$\frac{P}{a}\cos^3\vartheta\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon\cos^2\vartheta} \cong \frac{P}{a}\cos^3\vartheta\left(1-\varepsilon\cos^2\vartheta\right)(1+\varepsilon)\varepsilon = \frac{P}{a}\cos^3\vartheta\left(1+\varepsilon-\varepsilon\cos^2\vartheta-\varepsilon^2\cos^2\vartheta\right)\varepsilon =$$

$$= \frac{P}{a}\cos^3\vartheta\left(1+\varepsilon-\varepsilon\left[1-\sin^2\vartheta\right]-\varepsilon^2\cos^2\vartheta\right)\varepsilon = \frac{P}{a}\cos^3\vartheta\left(\varepsilon+\varepsilon^2\sin^2\vartheta-\varepsilon^3\cos^2\vartheta\right) \cong \frac{P}{a}\varepsilon\cos^3\vartheta$$

Podle (444) tedy pro variantu A platí

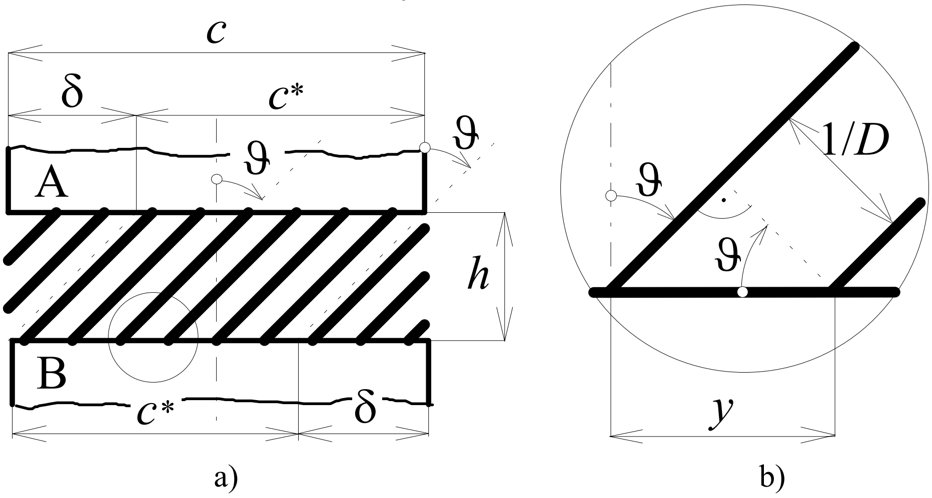
$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{P}{a}\varepsilon\cos^3\vartheta \qquad \varepsilon_l \le a \quad \left(\varepsilon \le \varepsilon^*\right) \\ F &= 0 \qquad\qquad\quad \varepsilon_l > a \quad \left(\varepsilon > \varepsilon^*\right) \end{aligned}\right\} \tag{446}$$

Protože rovněž $a \ll$, najdeme pro **sílu** $F^*$ **působící ve směru osy čelistí při přetrhu vlákna** užitím (438) ve (446) jednoduchý vztah

$$F^* = \frac{P}{a}\varepsilon^*\cos^3\vartheta = \frac{P}{a}\left(\frac{a}{\cos^2\vartheta}\right)\cos^3\vartheta = P\cos\vartheta \tag{447}$$

(Na obr. 27 je nyní síla $F_l \equiv P$. Tažnost a poměrné prodloužení v čelistech jsou velmi malé, a proto rozdíl mezi úhly $\vartheta$ a $\vartheta'$ je zanedbatelný. Vztah (447) pak plyne přímo z obrázku.)

## 4.2 Namáhání soustavy vláken




obr. 28

**Geometrie soustavy vláken** je znázorněna schematicky na obr. 28. V čelistech A a B, širokých *c,* na upínací délce *h* je sevřena soustava vláken svírajících se směrem osy čelistí úhel $\vartheta$. Hustotu vláken popisuje **dostava soustavy** *D.* Vyjadřuje **počet vláken, která protnou jednotkovou úsečku,**

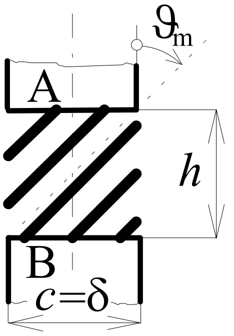
**kolmou ke směru soustavy**. (Analogie tradičních "dostav" u tkaniny.) Kolmá vzdálenost sousedních vláken je potom $1/D$, jak je vyznačeno na obr. 28b) ve zvětšeném detailu zakroužkované části. Vzdálenost $y$ sousedních vláken ve svěrné linii čelistí je pak

$$y = \frac{1/D}{\cos\vartheta} = \frac{1}{D\cos\vartheta} \tag{448}$$

Z obr. 28a) je zřejmé, že v částech $\delta$ svěrných linií čelistí A a B **nejsou** vlákna sevřena oběma čelistmi. Tato vlákna při oddalování čelistí nepřenáší žádné síly. V obou čelistech jsou **současně** sevřena jen vlákna ležící mezi čárkovanými čarami, v úsečce $c^*$. Z geometrie obr 28a) plyne

$$|\mathrm{tg}\,\vartheta| = \frac{\delta}{h} \qquad \delta = h|\mathrm{tg}\,\vartheta| \tag{449}$$

$$c^* = c - \delta = c - h|\mathrm{tg}\,\vartheta| \tag{450}$$



obr. 29

Při příliš velkých úhlech $\vartheta$ může nastat situace, kdy nebude **žádné** vlákno sevřeno současně v obou čelistech. V **mezním případě**, který je znázorněn na obr. 29, je hodnota úhlu $\vartheta$ rovna jeho **mezní hodnotě** $\vartheta_{\mathrm{m}}$. V tomto případě je právě $c = \delta$ a z rovnice (450) nalezneme

$$c^* = c - \delta = c - c = 0$$

$$0 = c^* = c - h|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}| \qquad |\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}| = \frac{c}{h} \qquad |\vartheta_{\mathrm{m}}| = \mathrm{arctg}\frac{c}{h} \tag{451}$$

Je-li $|\vartheta| \le |\vartheta_{\mathrm{m}}|$, můžeme z obr. 28a) určit **počet vláken sevřených v obou čelistech** $m = c^*/y$. Při použití (448), (450) a (451) pak nalezneme vztah

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{c^*}{y} = \frac{c - h|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{1/(D\cos\vartheta)} = D\cos\vartheta\left(c - h|\mathrm{tg}\,\vartheta|\right) = Dc\cos\vartheta\left(1 - \frac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|}\right) \qquad && |\vartheta| \le |\vartheta_{\mathrm{m}}| \\ m &= 0 && |\vartheta| > |\vartheta_{\mathrm{m}}| \end{aligned}\right\} \tag{452}$$

Počet **všech** vláken sevřených v jedné čelisti je $c/y = Dc\cos\vartheta$. Z porovnání tohoto výrazu s rovnicí (452) vyplývá, že výraz $\left(1 - |\mathrm{tg}\,\vartheta|/|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|\right)$ je "korekcí" na **vliv okrajů** - t.j. úseků $\delta$ - **čelistí**. Poznamenejme, že je-li čelist velmi široká ($c \to \infty$), pak dle (451) také $|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}| \to \infty$ a korekční faktor vlivu okrajů čelistí $\left(1 - |\mathrm{tg}\,\vartheta|/|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|\right) \to 1$.

## Síly od soustavy vláken.

Při tahovém namáhání přenáší soustava sílu od $m$ vláken sevřených čelistmi. Vlákna mají stejné vlastnosti (kap. 4.1), takže každé přenáší sílu $F$ (obr. 27). Pro **sílu soustavy** $\overset{\leftrightarrow}{S}$, tj. sílu přenášenou ve směru osy čelistí od všech vláken, pak platí

$$\overset{\leftrightarrow}{S} = Fm \tag{453}$$

Tato síla ovšem závisí na šířce $c$ čelistí. (Např. jsou-li čelisti velmi široké, napínáme mnoho vláken, $m$ je velké, a proto síla nutná pro dosažení daného prodloužení je značná.) Je proto rozumné sledovat sílu, která připadá na **jednotku šířky čelisti**. Nazveme ji **měrná síla soustavy** $S$. Platí

$$S = \frac{\overset{\leftrightarrow}{S}}{c} = F\frac{m}{c} \tag{454}$$

a dosazením (442) a (452) do (454) nalezneme vztah

$$\left.\begin{aligned} S &= F\frac{m}{c} = \sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos\vartheta\ \frac{Dc\cos\vartheta\left(1-\dfrac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|}\right)}{c} = \\ &= D\cos^2\vartheta\left(1-\frac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|}\right)\sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l} \qquad |\vartheta|\le|\vartheta_{\mathrm{m}}| \\ S &= F\frac{m}{c} = \sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos\vartheta\ \frac{0}{c} = 0 \qquad |\vartheta|>|\vartheta_{\mathrm{m}}| \end{aligned}\right\} \tag{455}$$

kde veličinu $\varepsilon_l$ stanovíme z rovnice (434).

Dosáhne-li prodloužení v čelistech hodnoty $\varepsilon = \varepsilon^*$ určené rov. (435), všechna vlákna soustavy se přetrhnou. V tomto okamžiku působí ve směru osy čelistí každé vlákno (sevřené oběma čelistmi) silou $F = F^*$, popsanou rovnicí (443). Sílu, která v tomto okamžiku připadá na **jednotku šířky čelisti** nazveme **měrnou pevností soustavy** $S^*$. Ve shodě se (454) ji vyjádříme tvarem

$$S^* = F^*\frac{m}{c} \tag{456}$$

Užitím (443) a (452) ve (456) pak nalezneme výraz

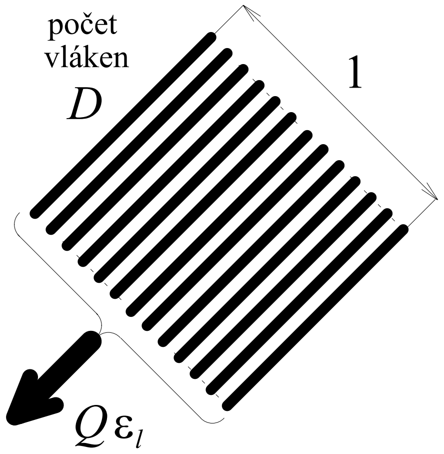
$$\left.\begin{aligned} S^* &= F^*\frac{m}{c} = P\sqrt{1-\frac{\sin^2\vartheta}{(1+a)^2}}\ \frac{Dc\cos\vartheta\left(1-\dfrac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|}\right)}{c} = \\ &= DP\cos\vartheta\sqrt{1-\frac{\sin^2\vartheta}{(1+a)^2}}\left(1-\frac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|}\right) \qquad |\vartheta|\le|\vartheta_{\mathrm{m}}| \\ S^* &= F^*\frac{m}{c} = P\sqrt{1-\frac{\sin^2\vartheta}{(1+a)^2}}\ \frac{0}{c} = 0 \qquad |\vartheta|>|\vartheta_{\mathrm{m}}| \end{aligned}\right\} \tag{457}$$

**Síly ve variantě A**. Ve variantě A (definované v textu za rov. (443)) lze do rovnice (454) dosadit (452) a jednodušší výraz (446). Pro **měrnou sílu soustavy** tak nalezneme

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{P}{a}\varepsilon\cos^3\vartheta\ \frac{Dc\cos\vartheta\left(1-\dfrac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|}\right)}{c} = \frac{DP}{a}\varepsilon\cos^4\vartheta\left(1-\frac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|}\right) = \\ &= Q\varepsilon\cos^4\vartheta\left(1-\frac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|}\right) \qquad |\vartheta|\le|\vartheta_{\mathrm{m}}| \ \text{ a } \ \varepsilon_l \le a\ \left(\varepsilon\le\varepsilon^*\right) \\ S &= 0 \qquad |\vartheta|>|\vartheta_{\mathrm{m}}| \ \text{ nebo } \ \varepsilon_l > a\ \left(\varepsilon>\varepsilon^*\right) \end{aligned}\right\} \tag{458}$$

kde pro $\varepsilon_l$ můžeme nyní užít vztah (437). Zavedený **parametr soustavy** $Q$ je definován rovnicí

$$Q = \frac{DP}{a} \tag{459}$$




obr. 30

Význam parametru $Q$ je zřejmý z obr. 30. Je na něm znázorněno $D$ vláken soustavy, takže šířka vlákenného pruhu je právě 1. Předpokládejme, že tento pruh vláken je protažen poměrným prodloužením $\varepsilon_l \le a$. Podle (441) je v každém vlákně tahová síla $(P/a)\varepsilon_l$. Síla, kterou je napnut celý pruh je tedy $D \cdot (P/a)\varepsilon_l = (DP/a)\varepsilon_l = Q\varepsilon_l$. Odtud je zřejmé, že parametr soustavy $Q$ charakterizuje **tuhost** jednotkového pruhu soustavy při osovém napínání. (Fyz. rozměr $Q$ je např. $[\mathrm{N/m}]$).

Jednodušším výrazem lze ve variantě A popsat také **měrnou pevnost soustavy**. Do vztahu (456) můžeme dosadit vedle (452) jednodušší vztah (447) a užít značení dle (459).

$$\left.\begin{array}{l}
S^* = F^* \dfrac{m}{c} = P\cos\vartheta \;\dfrac{Dc\cos\vartheta\left(1-\dfrac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}|}\right)}{c} = DP\cos^2\vartheta\left(1-\dfrac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}|}\right) = \\[2ex]
\quad = \dfrac{DP}{a}a\cos^2\vartheta\left(1-\dfrac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}|}\right) = Qa\cos^2\vartheta\left(1-\dfrac{|\mathrm{tg}\,\vartheta|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}|}\right) \qquad |\vartheta| \le |\vartheta_\mathrm{m}| \\[3ex]
S^* = F^* \dfrac{m}{c} = P\cos\vartheta \;\dfrac{0}{c} = 0 \qquad |\vartheta| \le |\vartheta_\mathrm{m}|
\end{array}\right\} \tag{460}$$

Připomeňme ještě, že při přetržení soustavy byla pro odpovídající $\varepsilon = \varepsilon^*$ nalezena rovnice (438).

**Tahové namáhání "široké" soustavy.** Skutečné čelisti prakticky používaných dynamometrů nebývají vzhledem k upínací délce příliš široké a vliv okrajů čelisti je tedy vzhledem k rov. (451) a (452) významný. Reálné formy tahového namáhání multiaxiálních textilií (např. v kompozitních materiálech) se však někdy mohou přibližovat představě namáhání na hypotetickém dynamometru s neomezeně širokými čelistmi ($c \to \infty$) při spíše krátkých upínacích délkách $h$. V tomto případě lze vliv okrajů čelistí zanedbat, neboť $|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}| \to \infty$ ($|\vartheta_\mathrm{m}| \to \pi/2$) a $\left(1-|\mathrm{tg}\,\vartheta|/|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}|\right) \to 0$ - viz též poznámka za rov. (452).

Pro všechny soustavy s úhlem $|\vartheta| \ne \pi/2$ pak platí z rov. (455) a (457)

$$S = D\sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta \tag{461}$$

$$S^* = DP\cos\vartheta\sqrt{1-\frac{\sin^2\vartheta}{(1+a)^2}} \tag{462}$$

Jsou-li splněny podmínky **varianty A**, pak při $|\vartheta| \neq \pi/2$ a $\varepsilon_l \leq a \left(\varepsilon \leq \varepsilon^*\right)$ nalezneme ze (458) a (460) zvláště jednoduché vztahy

$$S = Q\,\varepsilon \cos^4 \vartheta \tag{463}$$

$$S^* = Q\,a \cos^2 \vartheta \tag{464}$$

## 4.3 Namáhání multiaxiální textilie s konečným počtem soustav

**Soustavy.** Multiaxiální textilie, tvořená $n$ vlákennými soustavami, kde $n \geq 2$, je sevřena v čelistech dynamometru podobně, jako soustava na obr. 28. Předpokládáme, že vlákna napínané multiaxiální textilie se vzájemně neovlivňují (kap. 4.1, předp. 6) ), a proto se každá soustava při oddalování čelistí chová stejně, jako kdyby byla upnuta zcela **samostatně**. Odtud vyplývá, že **souhrnná síla působící ve směru osy čelistí je součtem sil vyvozených jednotlivými soustavami**.

Soustavám přiřazujeme pořadová čísla $i = 1, 2, \cdots, n$. Veličiny, které příslušejí pouze jedné soustavě budeme nadále opatřovat indexem *i*; obecně tedy $D_i$, $\vartheta_i$, $\varepsilon_{l,i}$, $\sigma_i(\varepsilon_{l,i})$, $P_i$, $a_i$, $Q_i$, $S_i$, $S_i^*$, $\varepsilon_i^*$. (V odkazech na dříve odvozené rovnice automaticky předpokládáme, že odpovídající veličiny jsou doplněny o index soustavy.) Index soustavy však nepřísluší dvěma dříve zavedeným veličinám: **poměrnému prodloužení v čelistech** $\varepsilon$ a **mezní hodnotě** úhlu sklonu vláken $\vartheta_{\mathrm{m}}$. Tyto veličiny jsou **společné** všem soustavám.

**Tahová síla v multiaxiální textilii.** Při poměrném prodloužení v čelistech $\varepsilon$ připadne na jednotku šířky čelisti jistá síla od multiaxiální textilie, kterou nazveme **měrná síla** $R$ **multiaxiální textilie**. Tato síla je **součtem** měrných sil $S_i$ soustav, které multiaxiální textilii tvoří.

$$R = \sum_{i=1}^{n} S_i \tag{465}$$

V nejobecnějším případě je hodnota $S_i$ vyjádřena rovnicemi (455) a (434).

$$\left.\begin{aligned}
&S_i = D_i \cos^2 \vartheta_i \left(1 - \frac{|\mathrm{tg}\,\vartheta_i|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}|}\right) \sigma_i\left(\varepsilon_{l,i}\right) \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_{l,i}} \qquad |\vartheta_i| \leq |\vartheta_{\mathrm{m}}| \\
&S_i = 0 \qquad |\vartheta_i| > |\vartheta_{\mathrm{m}}| \\
&\text{kde:} \\
&\qquad \varepsilon_{l,i} = \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta_i \left[2\varepsilon + \varepsilon^2\right]} - 1
\end{aligned}\right\} \tag{466}$$

Rovnice (465) spolu s (466) vyjadřuje měrnou sílu $R$ multiaxiální textilie jako funkci poměrného prodloužení $\varepsilon$, tj. vyjadřuje měrnou **tahovou pracovní křivku multiaxiální textilie**.

Ve **zvláštním případě** může být každá soustava multiaxiální textilie **rovnoběžná s osou čelistí**, tj. pro všechna $i = 1, 2, \cdots, n$ může platit $\vartheta_i = 0$. (Měrná síla $R = R_{\max}$ právě takto uspořádané multiaxiální textilie je - až do přetrhu prvních vláken - evidentně **největší**. )

Pro měrnou sílu $i$-té soustavy $S_i = S_{i\max}$ nalezneme v tomto případě ze (466) vztah

$$\varepsilon_{l,i} = \sqrt{1+\cos^2 0\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]} - 1 = \sqrt{1+2\varepsilon+\varepsilon^2} - 1 = \sqrt{(1+\varepsilon)^2} - 1 = \varepsilon$$

$$S_{i\max} = D_i \cos^2 0 \left(1 - \frac{|\mathrm{tg}\,0|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}|}\right)\sigma_i(\varepsilon)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon} = D_i\,\sigma_i(\varepsilon) \tag{467}$$

a pro měrnou sílu multiaxiální textilie $R = R_{\max}$ z (465) a (467) vztah

$$R_{\max} = \sum_{i=1}^{n} S_{i\max} = \sum_{i=1}^{n} D_i\,\sigma_i(\varepsilon) \tag{468}$$

Z veličin $R$ a $R_{\max}$ lze definovat **využití** $\eta_R$ materiálu při tahovém namáhání multiaxiální textilie.

$$\eta_R = \frac{R}{R_{\max}} \tag{469}$$

($\eta_R$ závisí na směrech soustav a v obecném případě též na poměrném prodloužením $\varepsilon$.)

Z měrné tahové pracovní křivky lze stanovit také **měrnou pevnost** $P_\Sigma$ **multiaxiální textile**, a to jako její **maximum**; $P_\Sigma = \max(R)$. Poměrné prodloužení v čelistech $\varepsilon = a_\Sigma$ odpovídající právě měrné pevnosti $R = P_\Sigma$ je **tažností multiaxiální textilie**. Určit měrnou pevnost a měrnou tažnost multiaxiální textile tedy znamená stanovit (většinou numericky) totální maximum funkce (465) (po předchozím dosazení $S_i$ z (466)).

**Varianta A** je zvláště jednoduchým případem, kdy každá soustava splňuje podmínky uvedené v kap. 4.1 za rov. (443). Pak lze v rov. (465) vyjádřit $S_i$ užitím (458), (438) a (459).

$$\left.\begin{aligned}
&S_i = Q_i\varepsilon\cos^4\vartheta_i\left(1-\frac{|\mathrm{tg}\,\vartheta_i|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}|}\right) && |\vartheta_i| \le |\vartheta_\mathrm{m}| \text{ a } \varepsilon \le \varepsilon_i^* \\
&S_i = 0 && |\vartheta_i| > |\vartheta_\mathrm{m}| \text{ nebo } \varepsilon > \varepsilon_i^* \\
&\text{kde: } \varepsilon_i^* = \frac{a_i}{\cos^2\vartheta_i}, \quad Q_i = \frac{D_i P_i}{a_i}
\end{aligned}\right\} \tag{470}$$

Měrnou **tahovou pracovní křivku multiaxiální textilie** vyjadřuje nyní rovnice (465) spolu s rovnicí (470).

Funkci (470) využijeme též ve zvláštním případě, kdy každá soustava multiaxiální textilie je rovnoběžná s osou čelistí, tj. $\vartheta_i = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \cdots, n$. Pak pro měrnou tahovou sílu $S_i = S_{i\max}$ každé soustavy platí

$$\left.\begin{aligned}
&S_{i\max} = Q_i\varepsilon\cos^4 0\left(1-\frac{|\mathrm{tg}\,0|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}|}\right) = Q_i\varepsilon && \varepsilon \le a_i \\
&S_{i\max} = 0 && \varepsilon > a_i
\end{aligned}\right\} \tag{471}$$

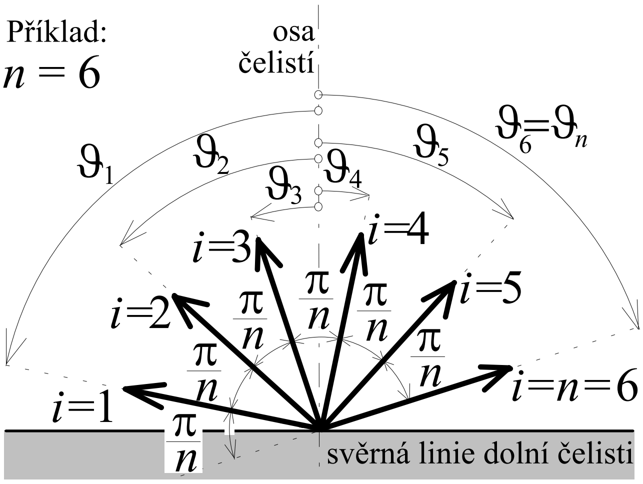
Následně stanovíme veličinu $R_{\max}$ dosazením (471) do (468) (t.j. do $R_{\max} = \sum_{i=1}^{n} S_{i\max}$) a využití $\eta_R$ dosazením předchozích výsledků do (469).

Při stanovení **měrné pevnosti** $P_\Sigma$ a **tažnosti** $a_\Sigma$ multiaxiální textile je nutno postupovat analogicky, jako v předchozím, obecnějším případě.

**Pravidelná multiaxiální textilie** s konečným počtem soustav je často používaným vlákenným útvarem, který splňuje dva následující *předpoklady: 1)* **soustavy vláken se odlišují jen ve směrech uložení** a *2)* **směry soustav jsou rozloženy rovnoměrně**.

Z prvního předpokladu vyplývá, že mnohé veličiny vážící se k soustavám jsou společné a mohou být proto označovány bez indexu. Budeme tedy značit pevnost každého vlákna *P*, tažnost každého vlákna *a*, tahovou pracovní křivku každého vlákna $\sigma(\varepsilon_{l,i})$, dostavu každé soustavy *D*. Naproti tomu index *i* zůstane zachován u úhlu $\vartheta_i$ a u veličin, které jsou tomto úhlu závislé (např. u poměrného prodloužení vlákna $\varepsilon_{l,i}$ aj.).

Druhý předpoklad ilustruje schéma na obr. 31 (příklad multiaxiální textilie se 6 soustavami). Směry soustav vyjadřují vektory v polorovině nad svěrnou linií dolní čelisti. Směry "sousedních" soustav se liší o **stejný** úhel $\pi/n$.




obr. 31

Orientovaný úhel poslední, t.j. *n*-té soustavy může nabývat hodnot z intervalu $\vartheta_n \in (\pi/2 - \pi/n,\ \pi/2\rangle$; konkrétní hodnota charakterizuje **natočení** textilie při jejím upnutí, vyjadřuje **směr jejího namáhání**.

Směrové úhly soustav lze vyjádřit vztahem

$$\vartheta_i = \vartheta_n - (n-i)\frac{\pi}{n} = \\ = \vartheta_n - \pi + \frac{i}{n}\pi \qquad (472) \\ i = 1, 2, \cdots, n$$

**Měrná síla soustavy v pravidelné multiaxiální textilii.** Měrná síla soustavy plyne nejobecněji ze vztahu (466). Při úpravě tohoto výrazu pro případ pravidelných multiaxiálních textilií užijeme zavedené předpoklady a vztah (472) a nalezneme

$$\left.\begin{array}{ll} S_i = D\cos^2\vartheta_i \left(1 - \dfrac{|\mathrm{tg}\,\vartheta_i|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}|}\right)\sigma(\varepsilon_{l,i})\,\dfrac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_{l,i}} & |\vartheta_i| \le |\vartheta_\mathrm{m}| \\ S_i = 0 \qquad |\vartheta_i| > |\vartheta_\mathrm{m}| & \\ \text{kde:} & \\ \varepsilon_{l,i} = \sqrt{1+\cos^2\vartheta_i\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]} - 1, \qquad \vartheta_i = \vartheta_n - \pi + \dfrac{i}{n}\pi & \end{array}\right\} \qquad (473)$$

**Měrná síla soustavy v pravidelné multiaxiální textilii - varianta A.** Jsou-li u všech soustav splněny podmínky varianty A (definované v kap. 4.1 za rovnicí (443) ), platí pro měrné síly jednotlivých soustav vztah (470).

Využitím zavedeného značení a rovnice (472) ve (470) nalezneme

$$\left.\begin{array}{ll} S_i = Q\varepsilon\cos^4\vartheta_i\left(1-\dfrac{|\mathrm{tg}\,\vartheta_i|}{|\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}|}\right) & |\vartheta_i|\le|\vartheta_\mathrm{m}| \text{ a } \varepsilon\le\varepsilon_i^* \\ S_i = 0 \qquad |\vartheta_i|>|\vartheta_\mathrm{m}| \text{ nebo } \varepsilon>\varepsilon_i^* & \\ \text{kde:} & \\ \quad \varepsilon_i^* = a/\cos^2\vartheta_i, \qquad Q=\dfrac{DP}{a}, \qquad \vartheta_i=\vartheta_n-\pi+\dfrac{i}{n}\pi & \end{array}\right\} \tag{474}$$

**Měrná síla pravidelné multiaxiální textilie** $R$ je **v obecném případě** dána rovnicí (465) jako součet měrných sil $S_i$ soustav, pro něž nyní platí vztah (473). Ve **variantě A** se při určení měrné síly $R$ dosadí do rovnice (465) vztah (474). (Pravidelný charakter multiaxiální textilie tedy nepřináší žádné zvláštní formální zjednodušení.)

**Měrná pevnost a tažnost pravidelné multiaxiální textilie.** Stejně jako v obecnějším případě (viz text za rov. (469) ) se **měrná pevnost** $P_\Sigma$ **multiaxiální textile** stanovuje (obvykle numericky) jako maximum měrné síly textilie, tj. $P_\Sigma = \max(R)$, a **tažnost multiaxiální textilie** $a_\Sigma$ jako poměrné prodloužení $\varepsilon = a_\Sigma$ odpovídající měrné pevnosti $R = P_\Sigma$.

## 4.4 Nejjednodušší případ multiaxiální textilie.

**Vymezení textilie.** Vůbec nejjednodušší řešení tahového namáhání nalezneme u multiaxiální textilie, která splňuje následující *předpoklady*: *1)* **je pravidelná**, *2)* **splňuje předpoklady varianty A** (poměrné prodloužení v čelistech je malé a tahová pracovní křivka vláken je lineární), *3)* **vliv okrajů čelistí lze zanedbat** ($|\vartheta_\mathrm{m}|\to\pi/2$, viz "široké" soustavy v závěru kap. 4.2) a *4)* **poměrné prodloužení v čelistech nepřekročí hodnotu tažnosti vláken** ($\varepsilon\le a$, a tedy žádné vlákno textilie nemůže být přetrženo).

**Měrná síla soustavy.** Za uvedených předpokladů **vždy** platí:
*a)* ze 3. podmínky $|\vartheta_i|\le|\vartheta_\mathrm{m}|=\pi/2$ a
*b)* ze 4. podmínky $\varepsilon\le a\le a/\cos^2\vartheta_i=\varepsilon_i^*$.
Pro **měrnou sílu soustavy** pak ze (474) vyplývá jednoduchý vztah

$$S_i = Q\varepsilon\cos^4\vartheta_i \qquad \text{kde:}\quad Q=\frac{DP}{a},\quad \vartheta_i=\vartheta_n-\pi+\frac{i}{n}\pi \tag{475}$$

Pro úpravu předchozí rovnice užijeme následující, obecně známé goniometrické výrazy: $1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ a $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. Sečtením nalezneme $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ a odtud $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha$. Dále platí $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$, takže $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha$. Konečně připomeňme, že $\cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha$ a $\sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha$.

S uvedenými výrazy lze provést následující úpravy vztahu (475):

$$S_i = Q\varepsilon\cos^4\left(\vartheta_n - \pi + \frac{i}{n}\pi\right) = Q\varepsilon\left\{\cos\left(\vartheta_n - \pi + \frac{i}{n}\pi\right)\right\}^4 = Q\varepsilon\left\{-\cos\left(\vartheta_n + \frac{i}{n}\pi\right)\right\}^4 =$$

$$= Q\varepsilon\cos^4\left(\vartheta_n + \frac{i}{n}\pi\right) = Q\varepsilon\left\{\cos^2\left(\vartheta_n + \frac{i}{n}\pi\right)\right\}^2 = Q\varepsilon\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\vartheta_n + \frac{i}{n}2\pi\right)\right\}^2$$

$$S_i = Q\varepsilon\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(2\vartheta_n + \frac{i}{n}2\pi\right) + \frac{1}{4}\cos^2\left(2\vartheta_n + \frac{i}{n}2\pi\right)\right\} =$$

$$= Q\varepsilon\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(2\vartheta_n + \frac{i}{n}2\pi\right) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(4\vartheta_n + \frac{i}{n}4\pi\right)\right]\right\} =$$

$$= Q\varepsilon\left\{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos\left(2\vartheta_n + \frac{i}{n}2\pi\right) + \frac{1}{8}\cos\left(4\vartheta_n + \frac{i}{n}4\pi\right)\right\} =$$

$$= Q\varepsilon\left\{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\left[\cos(2\vartheta_n)\cos\left(\frac{i}{n}2\pi\right) - \sin(2\vartheta_n)\sin\left(\frac{i}{n}2\pi\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\left[\cos(4\vartheta_n)\cos\left(\frac{i}{n}4\pi\right) - \sin(4\vartheta_n)\sin\left(\frac{i}{n}4\pi\right)\right]\right\}$$

$$S_i = Q\varepsilon\left\{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2\vartheta_n)\cos\left(\frac{i}{n}2\pi\right) - \frac{1}{2}\sin(2\vartheta_n)\sin\left(\frac{i}{n}2\pi\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\cos(4\vartheta_n)\cos\left(\frac{i}{n}4\pi\right) - \frac{1}{8}\sin(4\vartheta_n)\sin\left(\frac{i}{n}4\pi\right)\right\} \qquad \text{kde } Q = \frac{DP}{a} \qquad (476)$$

**Měrná síla multiaxiální textilie.** Užitím (476) v (465) nalezneme pro měrnou sílu v uvažované multiaxiální textilii vztah

$$R = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n}\left[Q\varepsilon\left\{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2\vartheta_n)\cos\left(\frac{i}{n}2\pi\right) - \frac{1}{2}\sin(2\vartheta_n)\sin\left(\frac{i}{n}2\pi\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{8}\cos(4\vartheta_n)\cos\left(\frac{i}{n}4\pi\right) - \frac{1}{8}\sin(4\vartheta_n)\sin\left(\frac{i}{n}4\pi\right)\right\}\right] =$$

$$= Q\varepsilon\frac{3n}{8} + \frac{Q\varepsilon}{2}\cos(2\vartheta_n)\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{i}{n}2\pi\right) - \frac{Q\varepsilon}{2}\sin(2\vartheta_n)\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i}{n}2\pi\right) +$$

$$+ \frac{Q\varepsilon}{8}\cos(4\vartheta_n)\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{i}{n}4\pi\right) - \frac{Q\varepsilon}{8}\sin(4\vartheta_n)\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i}{n}4\pi\right) \qquad (477)$$

**Matematické vztahy.** Pro další úpravy rovnice (477) odvodíme některé matematické závislosti. Uvažujme **komplexní čísla**

$$w_k = \cos\left(\frac{k}{n}2\pi\right) + i\sin\left(\frac{k}{n}2\pi\right) \qquad k = 1, 2, \cdots, n \qquad (478)$$

Speciálně při $k = 1$ je

$$w_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \qquad (478a)$$

Mezi těmito komplexními čísly platí podle známé **Moivreovy věty** vztah

$$\left[\cos\left(\frac{k}{n}2\pi\right)+i\sin\left(\frac{k}{n}2\pi\right)\right]=\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^{k}$$

$$w_k = w_1^k \tag{479}$$

Zavedeme **součet** $n$ **komplexních čísel** $S_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$ a užitím (478) a (479) jej vyjádříme tvarem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} w_1^k \tag{480}$$

jako **součet prvých** $n$ **členů geometrické posloupnosti** s prvním členem $w_1$ a kvocientem rovněž $w_1$. Pro takový součet platí známý vztah

$$S_n = w_1\frac{1-w_1^n}{1-w_1} \tag{481}$$

(Vztah snadno odvodíme následujícím postupem:

$$S_n = \left(w_1 + w_1^2 + \cdots + w_1^{n-1} + w_1^n\right) = \frac{\left(w_1 + w_1^2 + \cdots + w_1^{n-1} + w_1^n\right)\left(1-w_1\right)}{\left(1-w_1\right)} =$$

$$= \frac{w_1 + w_1^2 + \cdots + w_1^{n-1} + w_1^n - w_1^2 - w_1^3 - \cdots - w_1^n - w_1^{n+1}}{1-w_1} = \frac{w_1 - w_1^{n+1}}{1-w_1} = w_1\frac{1-w_1^n}{1-w_1}\quad)$$

Dosazením (479) a (478) do (481) nalezneme rovnici

$$S_n = w_1\frac{1-w_1^n}{1-w_1} = w_1\frac{1-w_n}{1-w_1} = w_1\frac{1-\cos\left(\frac{n}{n}2\pi\right)-i\sin\left(\frac{n}{n}2\pi\right)}{1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} =$$

$$= w_1\frac{1-\cos(2\pi)-i\sin(2\pi)}{1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = w_1\frac{1-1-i\cdot 0}{1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} =$$

$$= w_1\frac{0}{1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \tag{482a}$$

Pro $n=2$ nabývá jmenovatel zlomku hodnoty $1-\cos\pi - i\sin\pi = 1-(-1)-i\cdot 0 = 2$ a je tedy $\neq 0$. Pro $n\geq 3$, leží úhel $2\pi/n \in \left(0,\tfrac{2}{3}\pi\right\rangle$, a tedy $\sin(2\pi/n)>0$. Imaginární složka ve jmenovateli je pak $\neq 0$ a tím i celý jmenovatel zlomku je $\neq 0$. Můžeme tedy pro všechna $n\geq 2$ psát

$$S_n = 0 \tag{482}$$

Užitím (478) a (482) ve (480) nalezneme vztah

$$0 = \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\frac{k}{n}2\pi\right)+i\sin\left(\frac{k}{n}2\pi\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}2\pi\right)+i\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}2\pi\right) \tag{483}$$

Komplexní číslo je rovno 0 tehdy, jsou-li reálná i imaginární složka nulové. Ze (483) proto plyne

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}2\pi\right) = 0 \tag{484}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}2\pi\right) = 0 \tag{485}$$

Podobně uvažujme **komplexní čísla**

$$v_k = \cos\left(\frac{k}{n}4\pi\right) + i\sin\left(\frac{k}{n}4\pi\right) \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{486}$$

Speciálně pro $k = 1$ lze psát

$$v_1 = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) \tag{486a}$$

Podle **Moivreovy věty** platí vztah

$$\left[\cos\left(\frac{k}{n}4\pi\right) + i\sin\left(\frac{k}{n}4\pi\right)\right] = \left[\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right]^k$$

$$v_k = v_1^k \tag{487}$$

Zavedeme **součet** $n$ **komplexních čísel** $Q_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ a užitím (486), (486a) a (487) jej vyjádříme jako **součet členů geometrické posloupnosti**. Postupně nalezneme

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} v_1^k = v_1 \frac{1-v_1^n}{1-v_1} = v_1 \frac{1-v_n}{1-v_1} = v_1 \frac{1-\cos\left(\frac{n}{n}4\pi\right) - i\sin\left(\frac{n}{n}4\pi\right)}{1-\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)} =$$

$$= v_1 \frac{1-\cos(4\pi) - i\sin(4\pi)}{1-\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)} = v_1 \frac{1-1-i\cdot 0}{1-\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)} =$$

$$= v_1 \frac{0}{1-\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)} \tag{488a}$$

Pro $n = 3$ má jmenovatel zlomku hodnotu $\left[1-\cos(4\pi/3) - i\sin(4\pi/3)\right] \neq 1$. Pro $n = 4$ má jmenovatel zlomku hodnotu $\left[1-\cos(4\pi/4) - i\sin(4\pi/4)\right] = 2 \neq 1$. Pro $n \geq 5$ leží úhel $4\pi/n \in \left(0, \frac{4}{5}\pi\right\rangle$, hodnota $\sin(4\pi/n) > 0$, imaginární složka ve jmenovateli je $\neq 0$ a tím i celý jmenovatel zlomku je $\neq 0$. Jmenovatel je tedy $\neq 0$ pro všechna $n \geq 3$. Naproti tomu pro $n = 2$ má jmenovatel hodnotu $1-\cos(4\pi/2) - i\sin(4\pi/2) = 1-\cos(2\pi) - i\sin(2\pi) = 1-1-0 = 0$ a zlomek ve vztahu (488a) vede na neurčitý výraz typu $0/0$. Pro $n = 2$ plyne $Q_n = Q_2$ přímo z definice.

$$Q_2 = \sum_{k=1}^{2} v_k = \sum_{k=1}^{2}\left[\cos\left(\frac{k}{2}4\pi\right) + i\sin\left(\frac{k}{2}4\pi\right)\right] =$$

$$= \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) + \cos(4\pi) + i\sin(4\pi) = 1 + i\cdot 0 + 1 + i\cdot 0 = 2 \tag{488b}$$

Souhrnně z (448a) a (448b) platí

$$\left.\begin{aligned} Q_n &= 2 \ldots n = 2 \\ Q_n &= 0 \ldots n \geq 3 \end{aligned}\right\} \tag{488}$$

Užitím (486) a (488) v součtu $Q_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ nalezneme:

*a)* $2 = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\frac{k}{n}4\pi\right) + i\sin\left(\frac{k}{n}4\pi\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}4\pi\right) + i\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}4\pi\right)$, je-li $n = 2$,

*b)* $0 = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\frac{k}{n}4\pi\right) + i\sin\left(\frac{k}{n}4\pi\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}4\pi\right) + i\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}4\pi\right)$, je-li $n \geq 3$.

Z předchozích výrazů plynou následující vztahy

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}4\pi\right)&=2 \qquad n=2\\ \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}4\pi\right)&=2 \qquad n\geq 3\end{aligned}\right\} \tag{489}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}4\pi\right)=0 \qquad n\geq 2 \tag{490}$$

**Upravený vztah pro měrnou sílu multiaxiální textilie.** Pro případ $n=2$ nalezneme dosazením výrazů (484), (485) a (489), (490) do výchozího vztahu (477) vztah

$$\begin{aligned}R&=Q\varepsilon\frac{3\cdot 2}{8}+\frac{Q\varepsilon}{2}\cos(2\vartheta_2)\cdot 0-\frac{Q\varepsilon}{2}\sin(2\vartheta_2)\cdot 0+\frac{Q\varepsilon}{8}\cos(4\vartheta_2)\cdot 2-\frac{Q\varepsilon}{8}\sin(4\vartheta_2)\cdot 0=\\ &=Q\varepsilon\frac{3}{4}+\frac{Q\varepsilon}{4}\cos(4\vartheta_2)=Q\varepsilon\left\{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos(4\vartheta_2)\right\}=Q\varepsilon\left\{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left[\cos^2(2\vartheta_2)-\sin^2(2\vartheta_2)\right]\right\}=\\ &=Q\varepsilon\left\{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left[\cos^2(2\vartheta_2)-1+\cos^2(2\vartheta_2)\right]\right\}=Q\varepsilon\left\{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left[2\cos^2(2\vartheta_2)-1\right]\right\}=\\ &=Q\varepsilon\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2(2\vartheta_2)\right\} \qquad n=2\end{aligned} \tag{491}$$

Pro $n\geq 3$ nalezneme analogickým postupem vztah

$$\begin{aligned}R&=Q\varepsilon\frac{3n}{8}+\frac{Q\varepsilon}{2}\cos(2\vartheta_n)\cdot 0-\frac{Q\varepsilon}{2}\sin(2\vartheta_n)\cdot 0+\frac{Q\varepsilon}{8}\cos(4\vartheta_n)\cdot 0-\frac{Q\varepsilon}{8}\sin(4\vartheta_n)\cdot 0=\\ &=Q\varepsilon\frac{3n}{8} \qquad n\geq 3\end{aligned} \tag{492}$$

Povšimněme si, že **při dvou soustavách** ($n=2$, soustavy pootočené o $90^{\circ}$) **závisí** měrná síla $R$ na úhlu, pod jakým je tato dvouosá textilie upnuta v čelistech (závisí na úhlu $\vartheta_2\in\left(0,\ \pi/2\right\rangle$ ). Naproti tomu **při 3 a více soustavách** ($n\geq 3$) **nezávisí** velikost měrné síly $R$ na úhlu, pod jakým je tato textilie upnuta v čelistech (nezávisí na úhlu $\vartheta_n\in\left(\pi/2-\pi/n,\ \pi/2\right\rangle$). Jinak řečeno, textilie ze 3 a více soustav se deformuje ve všech směrech stejně. Lze říci, že taková textilie je **modulově isotropní**. (Měrným modulem této textilie je poměr $R/\varepsilon=Q\cdot 3n/8$, což je pro všechny možné hodnoty $\vartheta_n$ stále stejná hodnota.).

Pokud bychom všechny soustavy uvažované textilie (myšleně) pootočily tak, aby jejich směr byl rovnoběžný s osou čelistí (tj. se směrem tahového namáhání), potom by měrná síla každé soustavy byla dle (471) určena vztahem

$$S_{i\max}=Q\varepsilon \tag{493}$$

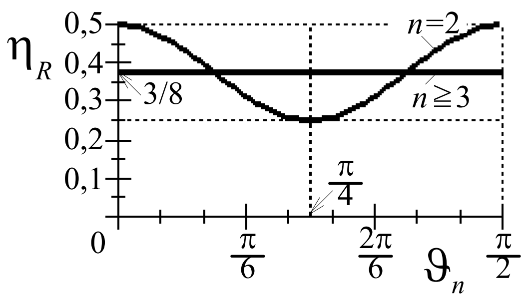
(U pravidelných textilií jsou všechny hodnoty $Q_i=Q$.) Měrná síla textilie by byla dle definice (468) při užití (493) vyjádřena ve tvaru

$$R_{\max}=\sum_{i=1}^{n}S_{i\max}=Q\varepsilon\, n \tag{494}$$

Dosazením (491), (492) a (494) do vztahu (469) můžeme nyní vyjádřit **využití materiálu** $\eta_R$ při tahovém namáhání.

Nalezneme vztah

$$\left.\begin{aligned} \eta_R &= \frac{R}{R_{\max}} = \frac{Q\varepsilon\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\left(2\vartheta_2\right)\right\}}{Q\varepsilon\, 2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos^2\left(2\vartheta_2\right) \qquad n=2 \\ \eta_R &= \frac{R}{R_{\max}} = \frac{Q\varepsilon\frac{3n}{8}}{Q\varepsilon\, n} = \frac{3}{8} \qquad n \geq 3 \end{aligned}\right\} \tag{495}$$




obr. 32

Průběh závislosti (495) charakterizuje obr. 32. Textilie ze 2 soustav (tj. $n = 2$) vzájemně pootočených o $\pi/2$ (pravidelná textilie) má proměnlivou hodnotu využití materiálu $\eta_R$ v závislosti na hodnotě úhlu $\vartheta_n \equiv \vartheta_2$. Největší hodnota $\eta_R = 0,5$ odpovídá úhlu $\vartheta_2 = \pi/2$ (resp. $\vartheta_2 = 0$); směr namáhání odpovídá směru jedné ze dvou soustav. Naopak nejmenší hodnota využití $\eta_R = 0,25$ odpovídá úhlu $\vartheta_2 = \pi/4$, tj. tahovému namáhání v "úhlopříčném" směru. Naproti tomu textile vytvořené z počtu soustav $n \geq 3$ mají ve všech směrech stejnou hodnotu využití $\eta_R = 3/8 = 0,375$.

*Poznámky: 1)* Závěry k nimž jsme dospěli platí jenom v rámci předpokladů, uvedených v úvodu této kapitoly. Jejich platnost zejména nelze rozšiřovat na oblast přetrhů. (Pevnosti pravidelných multiaxiálních textilií nejsou ani při $n \geq 3$ nezávislé na směru namáhání.)

*2)* Podle rovnice (495) má již pravidelná triaxiální textilie ve všech směrech konstantní využití materiálu $\eta_R$ (tj. je modulově isotropní). Výsledek prvotního teoretického rozboru vedl před časem pracovníky NASA k zadání vývoje a realizace stroje na výrobu **triaxiálních tkanin**, které se pak uplatnily jako materiál padáků sestupných modulů v projektu Apollo.

## 4.5 Namáhání textilie se spojitým rozložením směrů vláken v rovině.

**Problém a idea jeho řešení.** V praxi často pracujeme s textiliemi jejichž vlákna mají **spojité** rozložení směrů. Jsou jimi textilní útvary z pavučin mykacích strojů (rouna, netkané textilie), vrstvy vláken tvořené pneumaticky a pod. V takovém případě se v jednom vybraném směru - nebo přesněji v nekonečně (diferenciálně) malém intervalu směrů - vyskytuje jen nekonečně (diferenciálně) málo vláken; tato vlákna lze chápat jako **nekonečně "řídkou" soustavu**. V uvažovaném textilním útvaru je ovšem **nekonečně mnoho** takových nekonečně "řídkých" soustav. Namáhání textilního útvaru se spojitým rozložením směrů vláken můžeme proto chápat jako namáhání zvláštní multiaxiální textilie, vytvořené z nekonečného počtu nekonečně "řídkých" soustav. Pro popis mechanického chování lze pak s výhodou využít mnohé postupy a vztahy nalezené v předchozích statích.

**Síla od jednoho vlákna.** V kap. 4.1 bylo studováno jedno vlákno upnuté v obou čelistech - viz obr. 27. Uvažujme, že *předpoklady* uvedené v úvodu citované kapitoly jsou splněny (vlákna nekonečná, rovná, homogenně rozložená, stejných vlastností, bez vlivu upínací délky na mech. vlastnosti). Pak pro **sílu $F$ od jednoho vlákna, působící ve směru osy čelistí**, platí vztah (442) s **poměrným prodloužením vlákna** $\varepsilon_l$ vyjádřeným rovnicí (434). Pro **poměrné prodloužení** $\varepsilon = \varepsilon^*$ **ve směru osy čelistí při přetrhu** uvažovaného vlákna platí vztah (435). Jsou-li navíc splněny *předpoklady* **varianty A**, uvedené za rovnicí (443), pak pro $F$ platí jednodušší vztah (446) s $\varepsilon_l$ dle (437) a pro $\varepsilon = \varepsilon^*$ vztah (438).

Ve všech zmiňovaných výrazech kap. 4.1 se vyskytuje **orientovaný úhel** $\vartheta \in \left(-\pi/2, \pi/2\right\rangle$ sklonu vlákna vzhledem k ose čelistí, a to výhradně ve tvaru goniometrické funkce $\cos\vartheta$. Platí však $\cos\vartheta = \cos(-\vartheta)$, a proto vypočtené hodnoty $F, \varepsilon_l, \varepsilon^*$ **nezávisejí na znaménku úhlu** $\vartheta$.

Při řešení mechanického namáhání textilií se spojitým rozložením směrů vláken je výhodnější definovat úhel $\vartheta$ sklonu vlákna vzhledem k ose čelistí jako **neorientovaný úhel** $\vartheta \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. (Takto zavedený úhel nerozlišuje, zda je vlákno od osy odkloněno "vpravo" nebo "vlevo".) Zmiňované vztahy (442), (434), (435), nebo (446), (437), (438) budou přesto platit beze změny. Platit budou i další dříve odvozené výrazy, které jsou sudou funkcí úhlu $\vartheta$ [1)].

**Počet vláken nekonečně "řídké" soustavy sevřený v obou čelistech** nelze popsat dříve odvozenou rovnicí (452); nekonečně "řídká" soustava má totiž nekonečně malou "dostavu" $D$. Pro textilie se spojitým rozložením směrů vláken je třeba odvodit výraz jiný.

Uvažujme **myšlený řez** vlákennou strukturou, vedený svěrnou linií čelisti o šířce $c$ (srovnej s obr. 28a) ). Pro **počet všech vláken sevřených v jednotce šířky čelisti** (t.j. připadajících na jednotku délky myšleného řezu) platí vztah $n_\alpha = k_n \gamma / t$, odvozený v části A, kap.4.6., rovnice (115); $\gamma$ je plošná hmotnost textilie, $t$ je jemnost vláken, význam součinitele $k_n$ je popsán v části A, kap.4.5. Počet vláken sevřený v **celé šířce** svěrné linie čelisti je tedy

$$c n_\alpha = \frac{c\gamma}{t} k_n \tag{496}$$

V části A, kap.4.4 je dále odvozen výraz (103) pro **hustotu pravděpodobnosti** $u^*(\vartheta)$ [2)] **směrového rozložení vláken sevřených ve svěrné linii** (v myšleném řezu). Jmenovatel zlomku na pravé straně rovnice (103) je však dle části A, kap. 4.5, rovnice (107) roven veličině $k_n$, takže

$$u^*(\vartheta) = \frac{\cos\vartheta\, u(\vartheta)}{\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, u(\vartheta) d\vartheta} = \frac{\cos\vartheta\, u(\vartheta)}{k_n} \qquad \vartheta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \tag{497}$$

($u(\vartheta)$ je hustotou pravděpodobnosti rozložení neorientovaných směr. úhlů vláken v **celé** textilii.)

---

1) V dalším textu budeme odkazovat **bez dalšího zdůvodňování** i na jiné, dříve odvozené rovnice, které obsahují jen výrazy $\cos\vartheta$, $\sin^2\vartheta$ či $|\mathrm{tg}\,\vartheta|$, neboť jsou platné i pro neorientovaný úhel $\vartheta \in \langle 0, \pi/2 \rangle$.

2) V rovnici (103) je zapsán otevřený interval úhlu $\vartheta$. Z poznámky pod čarou v části A, kap. 4.1, je však zřejmé, že se jedná pouze o zjednodušenou konvenci zápisu. Nedopouštíme se proto žádné chyby uvažujeme-li rovnici (103) platnou i v uzavřeném intervalu $\vartheta \in \langle 0, \pi/2 \rangle$.

**Relativní četnost vláken svírajících s osou čelistí úhel** $\vartheta$ (přesněji úhel z diferenciálního intervalu $(\vartheta, \vartheta + \mathrm{d}\vartheta)$ ) lze vyjádřit výrazem $u^*(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$. **Počet vláken, která jsou sevřena v čelisti a současně svírají s osou čelistí úhel** $\vartheta$ je $\mathrm{d}\overleftrightarrow{m} = \underbrace{cn_\alpha}_{\substack{\text{celkový}\\ \text{počet}}} \cdot \underbrace{u^*(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta}_{\substack{\text{relativní}\\ \text{četnost}}}$. Užitím (496) a (497) nalezneme

$$\mathrm{d}\overleftrightarrow{m} = cn_\alpha u^*(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = \frac{c\gamma}{t}k_n \frac{\cos\vartheta u(\vartheta)}{k_n}\mathrm{d}\vartheta = \frac{c\gamma}{t}\cos\vartheta u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \qquad \vartheta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \tag{498}$$

Je zřejmé, že počet vláken $\mathrm{d}\overleftrightarrow{m}$, která jsou sevřena v čelisti a současně svírají s osou čelistí úhel $\vartheta$, je nekonečně (diferenciálně) malý - soustava je tedy nekonečně "řídká".

V kap. 4.2 jsme na obr. 28 ukázali, že v obou čelistech jsou současně sevřena jenom vlákna, která leží v úseku $c^* \le c$. Má-li soustava úhel $\vartheta > \vartheta_\mathrm{m}$ (mezní hodnota úhlu - viz obr. 29), je $c^* = 0$ a žádné vlákno není sevřeno v obou čelistech současně. **Počet vláken, která jsou sevřena v obou čelistech a současně svírají s osou čelistí úhel** $\vartheta$ je tedy $dm = d\overleftrightarrow{m} \cdot c^*/c$. Užitím dříve odvozených výrazů (450) a (451) ve (498) nalezneme vyjádření

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}m &= \mathrm{d}\overleftrightarrow{m}\frac{c^*}{c} = \frac{c\gamma}{t}\cos\vartheta u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\frac{c^*}{c} = \frac{c\gamma}{t}\cos\vartheta u(\vartheta)\,\frac{(c - h\,\mathrm{tg}\,\vartheta)}{c}\,\mathrm{d}\vartheta = \\
&= \frac{c\gamma}{t}\cos\vartheta u(\vartheta)\left(1 - \frac{h}{c}\,\mathrm{tg}\,\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta = \frac{c\gamma}{t}\cos\vartheta u(\vartheta)\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)\mathrm{d}\vartheta \qquad \vartheta \in \langle 0, \vartheta_\mathrm{m}\rangle \\
\mathrm{d}m &= 0\ \vartheta \in (\vartheta_\mathrm{m}, \pi/2\rangle
\end{aligned}\right\} \tag{499}$$

(Absolutní hodnoty v rovnicích (450) a (451) jsme vynechali, protože nyní $\vartheta \in \langle 0, \pi/2\rangle$.)

Počet vláken jedné soustavy multiaxiální textilie sevřený v jedné čelistí (t.j. na délce $c$) je podle textu za rovnicí (452) dán výrazem $Dc\cos\vartheta$; veličina $D$ je **dostavou** uvažované soustavy. Porovnáme-li tento výraz s $\mathrm{d}\overleftrightarrow{m}$ dle (498) můžeme vyjádřit **dostavu nekonečně "řídké" soustavy**.

$$Dc\cos\vartheta = \mathrm{d}\overleftrightarrow{m} = \frac{c\gamma}{t}\cos\vartheta u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta D = \frac{\gamma}{t}u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \tag{500}$$

Dostava nekonečně "řídké" textilie je podle očekávání nekonečně malá. (Výraz (499) získáme také dosazením dostavy nekonečně "řídké" textilie dle (500) do rovnice (452).)

**Síla od vláken nekonečně "řídké" soustavy** (působící ve směru osy čelistí) bude označována symbolem $\mathrm{d}\overleftrightarrow{S}$; je rovněž veličinou nekonečně malou. Tuto sílu můžeme v analogii k výrazu (453) vyjádřit součinem síly $F$ od jednoho vlákna a počtu d$m$ vláken soustavy, která jsou současně sevřena v obou čelistech.

$$\mathrm{d}\overleftrightarrow{S} = Fdm \tag{501}$$

Na jednotku šířky čelistí připadá **měrná síla nekonečně "řídké" soustavy** d$S$, určená v analogii ke (454) výrazem

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{S}}{c} = F\frac{\mathrm{d}m}{c} \tag{502}$$

Vyjádříme-li $F$ rovnicí (442) s $\varepsilon_l$ dle (434) a užijeme d$m$ ve tvaru (499), nalezneme vztah

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= F\frac{\mathrm{d}m}{c} = \sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos\vartheta\,\frac{\frac{c\gamma}{t}\cos\vartheta\,u(\vartheta)\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}}\right)\mathrm{d}\vartheta}{c} = \\
&= \frac{\gamma}{t}\sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \qquad \vartheta\in\langle 0,\vartheta_{\mathrm{m}}\rangle \\
\mathrm{d}S &= F\frac{\mathrm{d}m}{c} = \sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos\vartheta\,\frac{0}{c} = 0 \qquad \vartheta\in(\vartheta_{\mathrm{m}},\ \pi/2\rangle \\
&\text{kde:}\quad \varepsilon_l = \sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]}-1
\end{aligned}\right\} \qquad (503)$$

Uvažujme, že jsme oddálením čelistí vyvodili jistou hodnotu poměrného prodloužení v čelistech $\varepsilon \geq a$. V tomto okamžiku pro jednu nekonečně "řídkou" soustavu platí, že je právě na mezi své pevnosti, tj. právě pro ni platí $\varepsilon = \varepsilon^*$ (a tedy také $\varepsilon_l = a$, $F = P$). Vlákna této soustavy mají jistý **hraniční úhel sklonu** $\vartheta = \vartheta_\varepsilon$. Přepíšeme-li rovnici (435) do této symboliky, můžeme z ní vyjádřit úhel $\vartheta_\varepsilon$.

$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2a+a^2}{\cos^2\vartheta_\varepsilon}}-1 \qquad (504a)$$

$$(1+\varepsilon)^2-1 = \frac{2a+a^2}{\cos^2\vartheta_\varepsilon} \qquad \cos^2\vartheta_\varepsilon = \frac{2a+a^2}{(1+\varepsilon)^2-1} = \frac{2a+a^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2} \qquad (504b)$$

$$\vartheta_\varepsilon = \arccos\sqrt{\frac{2a+a^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}} \qquad (504)$$

(Pokud by bylo poměrné prodloužení v čelistech $\varepsilon < a$, potom by **žádná** nekonečně "řídká" soustava nedosáhla meze své pevnosti; výraz (504) by nebyl definován.) Nekonečně "řídké" soustavy s úhlem sklonu vláken $\vartheta < \vartheta_\varepsilon$ již překonali mez své pevnosti, zatímco soustavy s úhlem sklonu vláken $\vartheta_\varepsilon < \vartheta < \vartheta_{\mathrm{m}}$ - pokud existují - ji dosud nedosáhly.

Obvykle je $\vartheta_\varepsilon < \vartheta_{\mathrm{m}}$. Hraniční případ, kdy $\vartheta_\varepsilon = \vartheta_{\mathrm{m}}$ nastane při určitém poměrném prodloužení v čelistech $\varepsilon = \varepsilon'$. Z (504a) plyne

$$\varepsilon' = \sqrt{1+\frac{2a+a^2}{\cos^2\vartheta_{\mathrm{m}}}}-1 \qquad (505)$$

Je-li $\varepsilon > \varepsilon'$ (z (504) vypočteme $\vartheta_\varepsilon > \vartheta_{\mathrm{m}}$), všechny soustavy upnuté v obou čelistech ($\vartheta \leq \vartheta_{\mathrm{m}}$) již překonali mez své pevnosti. Přehled odvozených souvislostí charakterizuje následující tabulka:

| *var.* | *pom. prodl. v čelistech* $\varepsilon$ | *úhel* $\vartheta_\varepsilon$ | *Stav jednotlivých (nekonečně "řídkých") soustav* |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | $\varepsilon < a$ | neexis-tuje | $\vartheta \leq \vartheta_{\mathrm{m}}$ ...soustavy dosud **nedosáhly mez své pevnosti** (tj. poměrné prodloužení jejich vláken $\varepsilon_l < a$)<br>$\vartheta_{\mathrm{m}} < \vartheta$ ...vlákna nejsou sevřena oběma čelistmi, proto neposkytují žádný přínos sil |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 2 | $a \le \varepsilon \le \varepsilon'$ | $\vartheta_\varepsilon \le \vartheta_m$ | $\vartheta < \vartheta_\varepsilon$ ...soustavy **překročily mez své pevnosti** (tj. poměrné prodloužení jejich vláken $\varepsilon_l > a$)<br>$\vartheta_\varepsilon \le \vartheta \le \vartheta_m$ ...soustavy dosud **nepřekročily mez své pevnosti** (tj. poměrné prodloužení jejich vláken $\varepsilon_l \le a$)<br>$\vartheta_m < \vartheta$ ...vlákna nejsou sevřena oběma čelistmi, proto neposkytují žádný přínos sil |
| 3 | $\varepsilon' < \varepsilon$ | $\vartheta_m < \vartheta_\varepsilon$ | $\vartheta \le \vartheta_m$ ...soustavy **překročily mez své pevnosti** (tj. poměrné prodloužení jejich vláken $\varepsilon_l > a$)<br>$\vartheta_m < \vartheta$ ...vlákna nejsou sevřena oběma čelistmi, proto neposkytují žádný přínos sil |

*Předpokládáme-li*, že **tahová pracovní křivka vláken** $\sigma(\varepsilon_l)$ **nabývá pro** $\varepsilon_l > a$ **nulových hodnot**, můžeme **měrnou sílu nekonečně "řídké" soustavy** d$S$ vyjádřit z (503) s přihlédnutím relacím, uvedeným v předchozí tabulce. Tak nalezneme

- pro $\varepsilon < a$ a $\vartheta \in \langle 0, \vartheta_m \rangle$, nebo pro $\varepsilon \in \langle a, \varepsilon' \rangle$ a $\vartheta \in \langle \vartheta_\varepsilon, \vartheta_m \rangle$:

$$\mathrm{d}S = \frac{\gamma}{t}\sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$$

- jinak: $\mathrm{d}S = 0$

$$\text{kde } \varepsilon' = \sqrt{1+\left[2a+a^2\right]/\cos^2\vartheta_m} - 1$$

$$\varepsilon_l = \sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]} - 1$$

$$\vartheta_\varepsilon = \arccos\sqrt{\left(2a+a^2\right)/\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)} \qquad (506)$$

**Měrnou sílu soustavy ve variantě A** odvodíme analogicky. Úhel $\vartheta_\varepsilon$ určíme podobně, jako obecnější vztah (504). Místo rovnice (435) však můžeme ve variantě A užít jednodušší vztah (438). Přepíšeme-li jej do zavedené symboliky, můžeme vyjádřit úhel $\vartheta_\varepsilon$.

$$\varepsilon = \frac{a}{\cos^2\vartheta_\varepsilon} \qquad (507a)$$

$$\vartheta_\varepsilon = \arccos\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \qquad (507)$$

Při $\varepsilon \ge a$ existují soustavy, které nedosáhly meze své pevnosti jen je-li $\vartheta_\varepsilon < \vartheta_m$. Hraniční případ $\vartheta_\varepsilon = \vartheta_m$, nastane při určitém poměrném prodloužení v čelistech $\varepsilon = \varepsilon'$. Ve variantě A nalezneme z rovnice (507a) vztah

$$\varepsilon' = \frac{a}{\cos^2\vartheta_m} \qquad (508)$$

Sílu $F$ od jednoho vlákna vyjádříme rovnicí (446), užijeme d$m$ ve tvaru (499) a vyjádříme **měrnou sílu nekonečně "řídké" soustavy** d$S$ z rovnice (502).

Přihlédneme-li ještě k souvislostem z předchozí tabulky a rovnicím (507) a (508) nalezneme

$$\left.\begin{aligned}
&\text{- pro } \varepsilon < a \text{ a } \vartheta \in \langle 0, \vartheta_{\mathrm{m}} \rangle, \text{ nebo pro } \varepsilon \in \langle a, \varepsilon' \rangle \text{ a } \vartheta \in \langle \vartheta_{\varepsilon}, \vartheta_{\mathrm{m}} \rangle\text{:}\\
&\qquad \mathrm{d}S = F\frac{\mathrm{d}m}{c} = \frac{P}{a}\varepsilon\cos^3\vartheta\,\frac{\frac{c\gamma}{t}\cos\vartheta\, u(\vartheta)\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_{\mathrm{m}}}\right)\mathrm{d}\vartheta}{c} =\\
&\qquad = \frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_{\mathrm{m}}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\\
&\text{- jinak:}\quad \mathrm{d}S = 0\\
&\qquad\qquad\qquad \text{kde}\quad \varepsilon' = a/\cos^2\vartheta_{\mathrm{m}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vartheta_{\varepsilon} = \arccos\sqrt{a/\varepsilon}
\end{aligned}\right\} \tag{509}$$

**Tahová síla v textilii se spojitým rozložením směrů vláken.** Při napínání textilie se uplatňují všechny její nekonečně "řídké" soustavy dohromady. Na jednotku šířky čelisti připadá tahová síla $R$, jíž shodně s kap. 4.3 nazveme **měrná síla textilie se spojitým rozložením směrů vláken**. U multiaxiálních textilií je $R$ součtem měrných sil všech soustav - viz rov. (465). Textilie se spojitým rozložením směrů vláken je ovšem vytvořena součtem nekonečně malých měrných sil d$S$ od nekonečného počtu nekonečně "řídkých" soustav; odpovídající formou "sčítání" je integrace. V analogii ke (465) můžeme psát

$$R = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} \mathrm{d}S \tag{510}$$

V nejobecnějším uvažovaném případě dosadíme d$S$ z (503) do (510) a nalezneme vztah

$$\left.\begin{aligned}
R &= \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2}\mathrm{d}S = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_{\mathrm{m}}}\mathrm{d}S + \int_{\vartheta=\vartheta_{\mathrm{m}}}^{\vartheta=\pi/2}\mathrm{d}S = \int_0^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\frac{\gamma}{t}\sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_{\mathrm{m}}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\vartheta_{\mathrm{m}}}^{\pi/2} 0\,\mathrm{d}\vartheta =\\
&= \frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\int_0^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_{\mathrm{m}}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\\
&\qquad\qquad \text{kde: } \varepsilon_l = \sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]} - 1
\end{aligned}\right\} \tag{511}$$

V kap. 4.3 je zavedena také měrná síla $R_{\max}$, která by vznikla, kdyby byla **všechna vlákna rovnoběžná se směrem osy čelistí**, tj. kdyby každé vlákno mělo svůj **úhel** $\vartheta = 0$. Potom by bylo dle (434) poměrné **prodloužení každého vlákna** $\varepsilon_l = \varepsilon$ a podle (442) by byla **osová síla vyvozená jedním vláknem** $F = \sigma(\varepsilon)$. Protože **součinitel** $k_n$ ve vztahu (496) by byl roven 1 (viz část A, kap. 4.5), byl by **počet vláken sevřených v čelisti** podle (496) vyjádřen vztahem $cn_{\alpha} = c\gamma/t$. Měrnou sílu $R_{\max}$ by potom bylo možné vyjádřit vztahem

$$R_{\max} = \frac{\overbrace{(c\gamma/t)}^{\text{počet vláken}}\cdot\overbrace{\sigma(\varepsilon)}^{\text{síla od 1 vlákna}}}{c} = \frac{\gamma}{t}\sigma(\varepsilon) \tag{512}$$

V kapitole 4.3 je rovnicí (469) zavedeno **využití** $\eta_R$ materiálu při tahovém namáhání textilie poměrem $\eta_R = R/R_{\max}$. Nyní je můžeme vyjádřit užitím rovnic (511) a (512).

Tak nalezneme

$$\left.\begin{aligned}
\eta_R &= \frac{R}{R_{\max}} = \frac{\dfrac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\displaystyle\int_0^{\vartheta_m}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta}{\dfrac{\gamma}{t}\sigma(\varepsilon)} = \\
&= \frac{(1+\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\vartheta_m}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \\
&\text{kde: } \varepsilon_l = \sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]}-1
\end{aligned}\right\} \tag{513}$$

Pokud tahová pracovní křivka vláken $\sigma(\varepsilon_l)$ nabývá pro $\varepsilon_l > a$ nulových hodnot, můžeme pro d$S$ užít vztah (506), a tak nalézt následující výrazy:

I) Pro $\varepsilon < a$:

$$R = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2}\mathrm{d}S = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_m}\mathrm{d}S + \int_{\vartheta=\vartheta_m}^{\vartheta=\pi/2}\mathrm{d}S =$$

$$= \int_0^{\vartheta_m}\frac{\gamma}{t}\sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta + \int_{\vartheta_m}^{\pi/2}0\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\int_0^{\vartheta_m}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \tag{514a}$$

II) Pro $\varepsilon \in \langle a, \varepsilon' \rangle$:

$$R = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2}\mathrm{d}S = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_\varepsilon}\mathrm{d}S + \int_{\vartheta=\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta=\vartheta_m}\mathrm{d}S + \int_{\vartheta=\vartheta_m}^{\vartheta=\pi/2}\mathrm{d}S =$$

$$= \int_0^{\vartheta_\varepsilon}0\,\mathrm{d}\vartheta + \int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m}\frac{\gamma}{t}\sigma(\varepsilon_l)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta + \int_{\vartheta_m}^{\pi/2}0\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \tag{514b}$$

III) Pro $\varepsilon > \varepsilon'$:

$$R = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2}\mathrm{d}S = \int_0^{\pi/2}0\,\mathrm{d}\vartheta = 0 \tag{514c}$$

kde

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon' &= \sqrt{1+\left[2a+a^2\right]/\cos^2\vartheta_m}-1 \\
\varepsilon_l &= \sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]}-1 \\
\vartheta_\varepsilon &= \arccos\sqrt{\left(2a+a^2\right)/\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}
\end{aligned}\right\} \tag{514d}$$

V uvažovaném případě platí pro měrnou sílu $R_{\max}$ vztah (512) pouze je-li $\varepsilon \le a$; pro $\varepsilon > a$ je evidentně $R_{\max} = 0$. **Využití** $\eta_R$ materiálu při tahovém namáhání textilie je tedy definováno jenom pro případ, kdy $\varepsilon \le a$. Pro $R$ zde platí rovnice (514a), která je formálně shodná s (511), a proto využití $\eta_R$ můžeme vyjádřit rovněž vztahem (513).

**Měrná síla textilie ve variantě A.** Jsou-li splněny podmínky varianty A, můžeme do rovnice (510) za d$S$ dosadit vztah (509), a tak nalézt následující výrazy.

I) Pro $\varepsilon < a$:

$$R = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} \mathrm{d}S = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_\mathrm{m}} \mathrm{d}S + \int_{\vartheta=\vartheta_\mathrm{m}}^{\vartheta=\pi/2} \mathrm{d}S = \int_0^{\vartheta_\mathrm{m}} \frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\vartheta_\mathrm{m}}^{\pi/2} 0\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon\int_0^{\vartheta_\mathrm{m}}\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \qquad (515a)$$

II) Pro $\varepsilon \in \langle a, \varepsilon' \rangle$:

$$R = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} \mathrm{d}S = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_\varepsilon} \mathrm{d}S + \int_{\vartheta=\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta=\vartheta_\mathrm{m}} \mathrm{d}S + \int_{\vartheta=\vartheta_\mathrm{m}}^{\vartheta=\pi/2} \mathrm{d}S =$$

$$= \int_0^{\vartheta_\varepsilon} 0\,\mathrm{d}\vartheta + \int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}} \frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\vartheta_\mathrm{m}}^{\pi/2} 0\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}}\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \qquad (515b)$$

III) Pro $\varepsilon > \varepsilon'$:

$$R = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} \mathrm{d}S = \int_0^{\pi/2} 0\,\mathrm{d}\vartheta = 0 \qquad (515c)$$

kde

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon' &= a/\cos^2\vartheta_\mathrm{m} \\ \vartheta_\varepsilon &= \arccos\sqrt{a/\varepsilon} \end{aligned}\right\} \qquad (515d)$$

Pro měrnou sílu $R_{\max}$ platí vztah (512). Protože však $\varepsilon_l = \varepsilon$ (viz text před rovnicí (512)) a tahová pracovní křivka $\sigma(\varepsilon_l)$ je ve variantě A dána vztahem (431), můžeme měrnou sílu $R_{\max}$ vyjádřit rovnicí

$$\left.\begin{aligned} R_{\max} &= \frac{\gamma}{t}\sigma(\varepsilon) = \frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon & \varepsilon \le a \\ R_{\max} &= \frac{\gamma}{t}\sigma(\varepsilon) = \frac{\gamma}{t}0 = 0 & \varepsilon > a \end{aligned}\right\} \qquad (516)$$

**Využití** $\eta_R$ materiálu při tahovém namáhání textilie dle varianta A je definováno jen pro případ $\varepsilon \le a$. Pro $R$ pak platí rovnice (515a). Užitím (516) a (515a) v definičním vztahu (469) nalezneme pro $\eta_R$ rovnici

$$\eta_R = \frac{R}{R_{\max}} = \frac{\frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon\int_0^{\vartheta_\mathrm{m}}\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta}{\frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon} = \int_0^{\vartheta_\mathrm{m}}\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \quad \varepsilon \le a \qquad (517)$$

**Měrná pevnost textilie se spojitým rozložením směrů vláken** vyjadřuje největší tahovou sílu, připadající na jednotku šířky čelistí; ve shodě se symbolikou minulé kapitoly (text za rovnicí (469) aj.) ji označíme $P_\Sigma = \max(R)$. Poměrné prodloužení v čelistech $\varepsilon = a_\Sigma$ odpovídající měrné pevnosti $R = P_\Sigma$ je **tažností textilie** se spojitým rozložením směrů vláken. Určit měrnou pevnost $P_\Sigma$ a tažnost $a_\Sigma$ textilie tedy znamená stanovit totální maximum funkce $R$, dané nejobecněji rovnicí (511), nebo ve speciálních případech rovnicemi (514) či (515).

*Předpokládáme-li*, že $R$ dle (511) je **hladká funkce** (tj. spojitá a spojitá i v 1. derivaci), můžeme pro určení tažnosti textilie využít 1. derivaci. Nejprve vyjádříme výraz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\left(\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}(1+\varepsilon_l)-\sigma(\varepsilon_l)}{(1+\varepsilon_l)^2}=\frac{1}{1+\varepsilon_l}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}-\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\right) \tag{518}$$

Derivováním vztahu (434) dále nalezneme

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_l}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\sqrt{1+\cos^2\vartheta\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}-1\right)=\frac{\cos^2\vartheta(2+2\varepsilon)}{2\sqrt{1+\cos^2\vartheta\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}}=$$

$$=\frac{\cos^2\vartheta(1+\varepsilon)}{\sqrt{1+\cos^2\vartheta\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}}=\frac{\cos^2\vartheta\,(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon_l} \tag{519}$$

takže

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\left(\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\right)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_l}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{1}{1+\varepsilon_l}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}-\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\right)\frac{\cos^2\vartheta\,(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon_l}=$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}-\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\right)\frac{\cos^2\vartheta\,(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon_l)^2} \tag{520}$$

Derivováním (511) za užití (520) nalezneme

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\int_0^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right]=$$

$$=\frac{\gamma}{t}\int_0^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+\frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\int_0^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\right)\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \tag{521a}$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{\gamma}{t}\int_0^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+$$

$$+\frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\int_0^{\vartheta_\mathrm{m}}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}-\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\right)\frac{\cos^2\vartheta\,(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon_l)^2}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=\frac{\gamma}{t}\int_0^{\vartheta_\mathrm{m}}\left\{\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}+\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\frac{\cos^2\vartheta\,(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon_l)^2}-\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\frac{\cos^2\vartheta\,(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon_l)^2}\right\}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{\gamma}{t}\int_0^{\vartheta_\mathrm{m}}\left\{\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\left[1-\frac{\cos^2\vartheta\,(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon_l)^2}\right]+\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\frac{\cos^2\vartheta\,(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon_l)^2}\right\}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\\&\quad\text{kde: }\varepsilon_l=\sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]}-1\end{aligned}\right\} \tag{521}$$

Z rovnice (434) můžeme též vyjádřit vztah

$$(1+\varepsilon_l)^2=1+\cos^2\vartheta\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)=1+\cos^2\vartheta\left(1+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)-\cos^2\vartheta=\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta(1+\varepsilon)^2$$

$$\cos^2\vartheta(1+\varepsilon)^2 = (1+\varepsilon_l)^2 - \sin^2\vartheta \tag{522}$$

a dosadit jej do (521). Tak nalezneme alternativní vyjádření derivace $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varepsilon$.

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\gamma}{t}\int_0^{\vartheta_m}\left\{\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\left[1-\frac{(1+\varepsilon_l)^2-\sin^2\vartheta}{(1+\varepsilon_l)^2}\right]+\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\frac{\left[(1+\varepsilon_l)^2-\sin^2\vartheta\right]}{(1+\varepsilon_l)^2}\right\}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{\gamma}{t}\int_0^{\vartheta_m}\left\{\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{(1+\varepsilon_l)^3}\sin^2\vartheta+\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\left[1-\frac{\sin^2\vartheta}{(1+\varepsilon_l)^2}\right]\right\}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{\gamma}{t}\int_0^{\vartheta_m}\left\{\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{(1+\varepsilon_l)^3}\sin^2\vartheta+\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}-\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\frac{\sin^2\vartheta}{(1+\varepsilon_l)^2}\right\}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\gamma}{t}\Bigg\{&\int_0^{\vartheta_m}\frac{\dfrac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}-\dfrac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}}{(1+\varepsilon_l)^2}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+\\ &+\int_0^{\vartheta_m}\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\Bigg\}\qquad \text{kde: } \varepsilon_l=\sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]}-1\end{aligned}\right\} \tag{523}$$

V okamžiku, kdy $P_\Sigma = \max(R)$, a tedy $\varepsilon = a_\Sigma$, je $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varepsilon = 0$. Z (523) tak nalezneme rovnici

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\vartheta_m}\frac{\dfrac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}-\dfrac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}}{(1+\varepsilon_l)^2}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+\\ &+\int_0^{\vartheta_m}\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta=0\qquad \text{kde: } \varepsilon_l=\sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2a_\Sigma+a_\Sigma^2\right]}-1\end{aligned}\right\} \tag{524}$$

Z rovnice (524) je možné vyhledat (obvykle numerickou metodou) její kořen, jímž je **tažnost textilie** $a_\Sigma$ (obsažená v proměnné $\varepsilon_l$). **Měrnou pevnost textilie** $P_\Sigma$ poté nalezneme dosazením $\varepsilon = a_\Sigma$ do původní rovnice (511).

$$P_\Sigma = \frac{\gamma}{t}(1+a_\Sigma)\int_0^{\vartheta_m}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\quad \text{kde: } \varepsilon_l=\sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2a_\Sigma+a_\Sigma^2\right]}-1 \tag{525}$$

Existuje-li více kořenů rovnice (524), pak skutečnou tažnost a skutečnou měrnou pevnost vyjadřuje ta dvojice $(a_\Sigma, P_\Sigma)$, která má největší hodnotu $P_\Sigma$.

Pokud tahová pracovní křivka vláken $\sigma(\varepsilon_l)$ nabývá pro $\varepsilon_l > a$ nulových hodnot, nelze vztah (525) použít - tahová pracovní křivka $\sigma(\varepsilon_l)$ není v bodě $\varepsilon_l = a$ spojitá, a tedy $R$ dle (511) není hladkou funkcí. Tahová síla v textilii $R$ je v tomto případě vyjádřena rovnicemi (514a) až (514d). Je-li $\varepsilon < a$ - rovnice (514a) - namáhání žádného vlákna v textilii dosud nedosahuje meze jeho pevnosti. Je-li $\varepsilon > \varepsilon'$ - rovnice (514c) - je tahová síla $R$ trvale rovna 0, takže žádné vlákno již nepřenáší sílu. Měrná pevnost a tažnost textilie proto nemohou ležet v těchto oblastech, ale pouze v oblasti $\varepsilon \in \langle a, \varepsilon' \rangle$ popsané rovnicí (514b). Je-li v této oblasti funkce $R$ hladká, můžeme postupovat obdobně, jako při odvození vztahu (525).

Výraz (514b) se liší od vztahu (511) pouze v tom, že v dolní mezi integrálu není 0, ale veličina $\vartheta_\varepsilon$, jež je dle (514d) také funkcí $\varepsilon$. Derivace $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varepsilon$ je pak vyjádřena vztahem

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left\{\frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right\}=$$

$$=\frac{\gamma}{t}\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+$$

$$+\frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\left\{\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\right)\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta-\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{d}\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right]_{\vartheta=\vartheta_\varepsilon}\right\}=A-B \tag{526}$$

kde podle (514d) $\varepsilon_l=\sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]}-1$, $\vartheta_\varepsilon=\arccos\sqrt{\left(2a+a^2\right)/\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}$ a zavedené symboly $A$ a $B$ označují výrazy

$$A=\frac{\gamma}{t}\left\{\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+\right.$$

$$\left.+(1+\varepsilon)\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\right)\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right\} \tag{527}$$

$$B=\frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\frac{\mathrm{d}\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_\varepsilon} \tag{528}$$

(Připomeňme, že pro derivování podobných integrálů platí obecný vztah $\mathrm{d}\left[\int_{\psi(p)}^{\varphi(p)}f(x,p)\mathrm{d}x\right]\Big/\mathrm{d}p=$ $=\int_{\psi(p)}^{\varphi(p)}\frac{\mathrm{d}f(x,p)}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\varphi(p)}{\mathrm{d}p}f\left(\left[\varphi(p)\right],p\right)-\frac{\mathrm{d}\psi(p)}{\mathrm{d}p}f\left(\left[\psi(p)\right],p\right)$.)

Výraz na pravé straně rovnice (527) je až na dolní mez shodný s pravou stranou výrazu (521a). Postupem, jímž jsme upravili vztah (521a) do tvaru (523), můžeme upravit i vztah (527).

$$A=\frac{\gamma}{t}\left\{\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\dfrac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}-\dfrac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}}{(1+\varepsilon_l)^2}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+\right.$$

$$\left.+\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right\} \tag{529}$$

V hranaté závorce rovnice (528) nabývá úhel $\vartheta$ hodnoty $\vartheta_\varepsilon$. Úhel $\vartheta$ se však vyskytuje i uvnitř výrazu definujícího veličinu $\varepsilon_l$ - viz (434) nebo (514d). V tomto případě je tedy $(\varepsilon_l)_{\vartheta=\vartheta_\varepsilon}=\sqrt{1+\cos^2\vartheta_\varepsilon\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]}-1$. Dle (504b) či (514d) je však $\cos^2\vartheta_\varepsilon\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)=2a+a^2$, takže

$$(\varepsilon_l)_{\vartheta=\vartheta_\varepsilon}=\sqrt{1+\cos^2\vartheta_\varepsilon\left[2\varepsilon+\varepsilon^2\right]}-1=\sqrt{1+2a+a^2}-1=\sqrt{(1+a)^2}-1=a \tag{530}$$

(Výraz plyne též přímo z definice úhlu $\vartheta_\varepsilon$ - viz text před rov. (504a).)

V (528) je též derivace $\mathrm{d}\vartheta_\varepsilon/\mathrm{d}\varepsilon$. Z rovnice (434) nebo (514d) pro ni nalezneme následující vztah.

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\arccos\sqrt{\frac{2a+a^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}}\right]=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{2a+a^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}}}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{2a+a^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}}}\,\frac{-\left(2a+a^2\right)\left(2+2\varepsilon\right)}{\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2a+a^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}}}\,\frac{\frac{2a+a^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}}{\sqrt{\frac{2a+a^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}}}\,\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_\varepsilon}}\,\frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_\varepsilon}}\,\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon^2}=$$

$$=\frac{1}{\sin\vartheta_\varepsilon}\,\frac{\cos\vartheta_\varepsilon}{1}\,\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon^2}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\,\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon^2}\tag{531}$$

Dosazením (530) a (531) do (528) vznikne výraz

$$B=\frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\frac{\mathrm{d}\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta_\varepsilon}=$$

$$=\frac{\gamma}{t}(1+\varepsilon)\frac{1}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\,\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon^2}\,\frac{\sigma(a)}{1+a}\cos^2\vartheta_\varepsilon\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta_\varepsilon)=$$

$$=\frac{\gamma}{t}\frac{(1+\varepsilon)^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}\frac{\sigma(a)}{1+a}\frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta_\varepsilon)\tag{532}$$

Užitím (504b) můžeme ovšem upravit následující zlomek

$$\frac{(1+\varepsilon)^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}=\frac{(1+\varepsilon)^2}{\left(1+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)-1}=\frac{\left[(1+\varepsilon)^2-1\right]+1}{(1+\varepsilon)^2-1}=1+\frac{1}{(1+\varepsilon)^2-1}=1+\frac{1}{\frac{2a+a^2}{\cos^2\vartheta_\varepsilon}}=$$

$$=1+\frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{2a+a^2}\tag{533}$$

a dosazením tohoto výrazu do (532) získáme pro $B$ vztah

$$B=\frac{\gamma}{t}\frac{(1+\varepsilon)^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}\frac{\sigma(a)}{1+a}\frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta_\varepsilon)=$$

$$=\frac{\gamma}{t}\frac{\sigma(a)}{1+a}\left(1+\frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{2a+a^2}\right)\frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta_\varepsilon)\tag{534}$$

Dosazením (529) a (534) do (526) nalezneme hledanou derivaci $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varepsilon$ ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varepsilon}=A-B=\Bigg\{\frac{\gamma}{t}\Bigg[&\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}-\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}}{(1+\varepsilon_l)^2}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+\\&+\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta-\\&-\frac{\sigma(a)}{1+a}\left(1+\frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{2a+a^2}\right)\frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\mathrm{m}}\right)u(\vartheta_\varepsilon)\Bigg]\Bigg\}\end{aligned}\tag{535}$$

V okamžiku, kdy $P_\Sigma = \max(R)$, a tedy $\varepsilon = a_\Sigma$, je $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varepsilon = 0$. Z (535) tak nalezneme rovnici

$$\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \frac{\dfrac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l} - \dfrac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l}}{(1+\varepsilon_l)^2} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right) u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta +$$
$$+ \int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon_l)}{\mathrm{d}\varepsilon_l} \cos^2\vartheta \left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right) u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta - \tag{536a}$$
$$- \frac{\gamma}{t}\frac{\sigma(a)}{1+a}\left(1 + \frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{2a+a^2}\right)\frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right) u(\vartheta_\varepsilon) = 0$$

kde místo obecných vztahů (514d) je nyní speciálně

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_l &= \sqrt{1 + \cos^2\vartheta\left[2a_\Sigma + a_\Sigma{}^2\right]} - 1 \\ \vartheta_\varepsilon &= \arccos\sqrt{\left(2a + a^2\right)/\left(2a_\Sigma + a_\Sigma{}^2\right)} \end{aligned}\right\} \tag{536b}$$

Z rovnic (536a) a (536b) je možné vyhledat (numerickou metodou) kořen, jímž je **tažnost textilie** $a_\Sigma$ (obsažená v proměnných $\varepsilon_l$ a $\vartheta_\varepsilon$). **Měrnou pevnost textilie** $P_\Sigma$ poté nalezneme dosazením $\varepsilon = a_\Sigma$ do původní rovnice (514b).

$$\left.\begin{aligned} P_\Sigma &= \frac{\gamma}{t}(1+a_\Sigma)\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \frac{\sigma(\varepsilon_l)}{1+\varepsilon_l}\cos^2\vartheta\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\ &\text{kde: } \varepsilon_l = \sqrt{1+\cos^2\vartheta\left[2a_\Sigma + a_\Sigma^2\right]} - 1,\ \vartheta_\varepsilon = \arccos\sqrt{\left(2a+a^2\right)/\left(2a_\Sigma + a_\Sigma{}^2\right)} \end{aligned}\right\} \tag{537}$$

Existuje-li více kořenů rovnice (537), pak skutečnou tažnost a skutečnou měrnou pevnost vyjadřuje ta dvojice $(a_\Sigma, P_\Sigma)$, která má největší hodnotu $P_\Sigma$.

**Měrná pevnost textilie ve variantě A.** Tahová síla v textilii $R$ je pro variantu A vyjádřena rovnicemi (515a) až (515d). Je-li $\varepsilon < a$ - rovnice (515a) - namáhání žádného vlákna dosud nedosáhlo meze jeho pevnosti. Je-li $\varepsilon > \varepsilon'$ - rovnice (515c) - je tahová síla $R$ trvale rovna 0, takže žádné vlákno již nepřenáší sílu. Měrná pevnost a tažnost textilie proto musí ležet v oblasti $\varepsilon \in \langle a, \varepsilon' \rangle$, popsané rovnicí (515b) a lze je určit z 1. derivace této funkce.

Derivováním (515b) nalezneme

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m}\cos^4\vartheta\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right] =$$
$$= \frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m}\cos^4\vartheta\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta - \frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon\frac{\mathrm{d}\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\cos^4\vartheta_\varepsilon\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta_\varepsilon) \tag{538}$$

Z (507) či (515d) nalezneme derivováním a úpravou za užití (507a) výraz

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\arccos\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-a/\varepsilon}}\frac{1}{2\sqrt{a/\varepsilon}}\frac{-a}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{1-a/\varepsilon}}\frac{a/\varepsilon}{\sqrt{a/\varepsilon}}\frac{1}{2\varepsilon} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_\varepsilon}}\frac{\cos^2\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_\varepsilon}}\frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon} \tag{539}$$

a dosazením (539) do (538) získáme derivaci $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varepsilon$ ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m}\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta-\frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\varepsilon\frac{1}{2\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\cos^4\vartheta_\varepsilon\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta_\varepsilon)=$$

$$=\frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\left[\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m}\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta-\frac{\cos^4\vartheta_\varepsilon}{2\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta_\varepsilon)\right] \tag{540}$$

V okamžiku, kdy $P_\Sigma=\max(R)$, a tedy $\varepsilon=a_\Sigma$, je $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varepsilon=0$. Z (535) tak nalezneme rovnici

$$\frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}\left[\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m}\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta-\frac{\cos^4\vartheta_\varepsilon}{2\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta_\varepsilon)\right]=0$$

$$\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m}\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta=\frac{\cos^4\vartheta_\varepsilon}{2\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta_\varepsilon) \tag{541a}$$

kde místo obecného výrazu z (515d) je nyní speciálně

$$\vartheta_\varepsilon=\arccos\sqrt{\frac{a}{a_\Sigma}}\qquad\left(a_\Sigma=\frac{a}{\cos^2\vartheta_\varepsilon}\right) \tag{541b}$$

Z rovnic (541a) a (541b) lze vyhledat (většinou numerickou metodou hledání kořenů) jedinou neznámou, jíž je **tažnost textilie** $a_\Sigma$, obsaženou v proměnné $\vartheta_\varepsilon$. (Prakticky je třeba vyhledat kořen $\vartheta_\varepsilon$ rovnice (541a) a potom vyjádřit $a_\Sigma$ z (541b).) **Měrnou pevnost textilie** $P_\Sigma$ následně stanovíme dosazením $\varepsilon=a_\Sigma$ do původní rovnice (515b).

$$P_\Sigma=\frac{\gamma}{t}\frac{P}{a}a_\Sigma\int_{\arccos\sqrt{\frac{a}{a_\Sigma}}}^{\vartheta_m}\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_m}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \tag{542}$$

## 4.6 Příklad řešení varianty A s modelovým rozložením směrů vláken.

**Zadání příkladu.** Uvažujme textilii se spojitým rozložením směrů vláken, která splňuje předpoklady uvedené v úvodu kapitoly 4.1 (vlákna nekonečná, rovná, homogenně rozložená, stejných vlastností, bez vlivu upínací délky na mech. vlastnosti).a dále ještě předpoklady varianty A, popsané za rovnicí (443) (malá poměrná prodloužení v čelistech $\varepsilon$ a lineární tahová pracovní křivka vláken).

Směrové uspořádání vláken v textilii nechť odpovídá modelu, odvozenému v části A, kapitole 4.2. Hustota pravděpodobnosti $f(\psi)$ rozložení **orientovaných úhlů** $\psi\in(-\pi/2,\,+\pi/2)$, které svírají vlákna s **nejčetnějším** (obvykle "podélným") směrem je pak popsána v části A, kapitole 4.2 rovnicí (74).

Uvažujme, že tato textilie je sevřena v čelistech dynamometru tak, že nejčetnější směr svírá s osou čelistí jistý úhel $\alpha\in(-\pi/2,\,+\pi/2)$. Svěrnou linii čelisti je pak možno považovat za myšlený "řez" textilií a užít výsledky odvozené části A, kapitole 4.6. Hustota pravděpodobnosti směrového rozložení **orientovaného úhlu** $\xi\in(-\pi/2,\,+\pi/2)$, který svírají vlákna s osou čelistí (tj. s normálou řezné roviny) je dle části A, rov. (110) vyjádřena funkcí $f(\alpha+\xi)$ ($\xi$ je proměnná, $\alpha$ je parametr rozložení). Hustota pravděpodobnosti $u(\vartheta)$směrového rozložení **neorientovaného úhlu** $\vartheta=|\xi|$, $\vartheta\in(0,\pi/2)$, je podle části A, rov. (112) vyjádřena tvarem $u(\vartheta)=f(\alpha+\vartheta)+f(\alpha-\vartheta)$. Vzájemným dosazením rovnic (74), (110) a (112) z části A nalezneme

$$\left.\begin{aligned} &u(\vartheta)=f(\alpha+\vartheta)+f(\alpha-\vartheta)\\ &\text{kde:}\quad f(\alpha+\vartheta)=\frac{1}{\pi}\frac{C}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2(\alpha+\vartheta)},\\ &\qquad\quad f(\alpha-\vartheta)=\frac{1}{\pi}\frac{C}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2(\alpha-\vartheta)}\end{aligned}\right\}\qquad(543)$$

Užitím této hustoty pravděpodobnosti je možno konkrétně stanovit: *1)* **měrnou sílu** $R$ ze vztahů (515a) až (515d), *2)* **využití** $\eta_R$ materiálu ze vztahu (517), *3)* **tažnost textilie** $a_\Sigma$ jako kořen rovnice (541a) s (541b) a *4)* **měrnou pevnost textilie** $P_\Sigma$ vztahem (542). (Mezní úhel $\vartheta_{\mathrm{m}}$, který se ve vztazích též vyskytuje, závisí na upínací délce a na šířce čelistí a je určen rovnicí (451).)

**Matematické vztahy.** Ve všech uvedených vztazích se vyskytuje určitý integrál $\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\vartheta\left(1-\mathrm{tg}\,\vartheta/\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$ (či $\int_0^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\vartheta\left(1-\mathrm{tg}\,\vartheta/\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$). Takový integrál lze upravit do tvaru

$$\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\vartheta\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta=\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\vartheta\,u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}}\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\sin\vartheta\cos^3\vartheta\,u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta=J_1-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\vartheta_{\mathrm{m}}}J_2\qquad(544)$$

kde

$$J_1=\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\vartheta\,u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\qquad J_2=\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\sin\vartheta\cos^3\vartheta\,u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\qquad(545)$$

Pro **určitý integrál** $J_1$ nalezneme za užití (543) vztah

$$J_1=\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\vartheta\,u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta=\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\vartheta\left[f(\alpha+\vartheta)+f(\alpha-\vartheta)\right]\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\vartheta\,f(\alpha+\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\vartheta\,f(\alpha-\vartheta)\mathrm{d}\vartheta=\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\vartheta\,f(\alpha+\vartheta)\mathrm{d}\vartheta-\int_{-\vartheta_\varepsilon}^{-\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4(-x)\,f(\alpha+x)\mathrm{d}x=$$

$$-\vartheta=x,\ -\mathrm{d}\vartheta=\mathrm{d}x$$

(platí $\cos(-x)=\cos x$ a přejmenujeme integrační proměnné v obou integrálech na $\xi$)

$$=\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\xi\,f(\alpha+\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{-\vartheta_\varepsilon}^{-\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4(\xi)\,f(\alpha+\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\xi\,f(\alpha+\xi)\mathrm{d}\xi+$$

$$+\int_{-\vartheta_{\mathrm{m}}}^{-\vartheta_\varepsilon}\cos^4(\xi)\,f(\alpha+\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{-\vartheta_{\mathrm{m}}}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\cos^4\xi\,f(\alpha+\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{-\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\varepsilon}\cos^4(\xi)\,f(\alpha+\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{C}{\pi}\int_{-\vartheta_{\mathrm{m}}}^{\vartheta_{\mathrm{m}}}\frac{\cos^4\xi\,\mathrm{d}\xi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2(\alpha+\xi)}-\frac{C}{\pi}\int_{-\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_\varepsilon}\frac{\cos^4\xi\,\mathrm{d}\xi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2(\alpha+\xi)}$$

$$\psi=\alpha+\xi,\ \mathrm{d}\psi=\mathrm{d}\xi$$

$$J_1 = \frac{C}{\pi}\int\limits_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} \frac{\cos^4(\psi-\alpha)\,\mathrm{d}\psi}{C^2-(C^2-1)\cos^2\psi} - \frac{C}{\pi}\int\limits_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon} \frac{\cos^4(\psi-\alpha)\,\mathrm{d}\psi}{C^2-(C^2-1)\cos^2\psi} \tag{546}$$

Podobně pro **určitý integrál** $J_2$ nalezneme užitím (543) vztah

$$J_2 = \int\limits_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \sin\vartheta\cos^3\vartheta\, u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \int\limits_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \sin\vartheta\cos^3\vartheta\left[f(\alpha+\vartheta)+f(\alpha-\vartheta)\right]\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int\limits_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \sin\vartheta\cos^3\vartheta\, f(\alpha+\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta + \int\limits_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \sin\vartheta\cos^3\vartheta\ f(\alpha-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$-\vartheta = x,\ -\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \sin\vartheta\cos^3\vartheta\, f(\alpha+\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta - \int\limits_{-\vartheta_\varepsilon}^{-\vartheta_m} \sin(-x)\cos^3(-x)\, f(\alpha+x)\,\mathrm{d}x$$

( platí $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ a přejmenujeme integr. proměnné na $\xi$ )

$$= \int\limits_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \sin\xi\cos^3\xi\, f(\alpha+\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_{-\vartheta_\varepsilon}^{-\vartheta_m} \sin\xi\cos^3\xi\, f(\alpha+\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{C}{\pi}\int\limits_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \frac{\sin\xi\cos^3\xi\,\mathrm{d}\xi}{C^2-(C^2-1)\cos^2(\alpha+\xi)} + \frac{C}{\pi}\int\limits_{-\vartheta_\varepsilon}^{-\vartheta_m} \frac{\sin\xi\cos^3\xi\,\mathrm{d}\xi}{C^2-(C^2-1)\cos^2(\alpha+\xi)}$$

$$\psi = \alpha+\xi,\ \mathrm{d}\psi = \mathrm{d}\xi$$

$$J_2 = \frac{C}{\pi}\int\limits_{\alpha+\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_m} \frac{\sin(\psi-\alpha)\cos^3(\psi-\alpha)\,\mathrm{d}\psi}{C^2-(C^2-1)\cos^2\psi} + \frac{C}{\pi}\int\limits_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha-\vartheta_m} \frac{\sin(\psi-\alpha)\cos^3(\psi-\alpha)\,\mathrm{d}\psi}{C^2-(C^2-1)\cos^2\psi} \tag{547}$$

Jmenovatel zlomků v integrálech (546) a (547) lze ovšem vyjádřit třemi rovnocennými tvary

$$C^2-(C^2-1)\cos^2\psi = (C^2-1)\sin^2\psi + 1 = C^2\sin^2\psi + \cos^2\psi \tag{548}$$

Pro analytické řešení výrazů (546) a (547) bude třeba nalézt následující neurčité integrály.

$$I_1 = \int\frac{\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi} = \int\frac{1}{C^2\mathrm{tg}^2\psi+1}\,\frac{\mathrm{d}\psi}{\cos^2\psi} = \int\frac{\mathrm{d}x}{C^2x^2+1} = \frac{1}{C}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$

$$\mathrm{tg}\psi = x,\quad \frac{\mathrm{d}\psi}{\cos^2\psi} = \mathrm{d}x \qquad t = Cx,\quad \mathrm{d}t = C\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{C}\mathrm{arctg}\, t = \frac{1}{C}\mathrm{arctg}(Cx) = \frac{1}{C}\mathrm{arctg}(C\,\mathrm{tg}\psi) \tag{549}$$

$$I_2 = \int\frac{\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi} = \int\frac{(C^2-1)\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi}{(C^2-1)(C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi)} = \int\frac{C^2\cos^2\psi-\cos^2\psi}{(C^2-1)(C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi)}\mathrm{d}\psi =$$

$$= \int\frac{C^2(1-\sin^2\psi)-\cos^2\psi}{(C^2-1)(C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi)}\mathrm{d}\psi = \int\frac{C^2-(C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi)}{(C^2-1)(C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi)}\mathrm{d}\psi =$$

$$= \frac{C^2}{C^2-1}\int\frac{\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi} - \frac{1}{C^2-1}\int\mathrm{d}\psi = \frac{C^2}{C^2-1}I_1 - \frac{\psi}{C^2-1} \tag{550}$$

$$I_3 = \int\frac{\cos\psi\sin\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2-(C^2-1)\cos^2\psi} = \frac{1}{C^2-1}\int\frac{\cos\psi\sin\psi\,\mathrm{d}\psi}{\dfrac{C^2}{C^2-1}-\cos^2\psi} = \frac{1}{C^2-1}\,\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2(C^2-1)}\ln|t|$$

$$C^2\big/(C^2-1)-\cos^2\psi = t,\quad \cos\psi\sin\psi\,\mathrm{d}\psi = \mathrm{d}t/2$$

$$I_3 = \frac{1}{2\left(C^2-1\right)}\ln\left(\frac{C^2}{C^2-1}-\cos^2\psi\right) \tag{551}$$

$$I_4 = \int\frac{\cos^3\psi\sin\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi} = \frac{1}{C^2-1}\int\frac{\cos\psi\sin\psi}{\dfrac{C^2}{C^2-1}-\cos^2\psi}\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi =$$

$$= \frac{1}{C^2-1}\int\frac{\cos\psi\sin\psi}{\dfrac{C^2}{C^2-1}-\cos^2\psi}\left[\frac{C^2}{C^2-1}-\left(\frac{C^2}{C^2-1}-\cos^2\psi\right)\right]\mathrm{d}\psi = \frac{C^2}{C^2-1}\int\frac{\cos\psi\sin\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi} -$$

$$-\frac{1}{C^2-1}\int\cos\psi\sin\psi\,\mathrm{d}\psi = \frac{C^2}{C^2-1}I_3+\frac{1}{2\left(C^2-1\right)}\int\left(-2\cos\psi\sin\psi\right)\mathrm{d}\psi$$

$$I_4 = \frac{C^2}{C^2-1}I_3+\frac{\cos^2\psi}{2\left(C^2-1\right)} \tag{552}$$

Definujeme však

$$I_4 = I_0+\tfrac{1}{2}I_3 \tag{553}$$

kde

$$I_0 = I_4-\tfrac{1}{2}I_3 = \frac{C^2}{C^2-1}I_3+\frac{\cos^2\psi}{2\left(C^2-1\right)}-\tfrac{1}{2}I_3 =$$

$$= \frac{2C^2-\left(C^2-1\right)}{2\left(C^2-1\right)}I_3+\frac{\cos^2\psi}{2\left(C^2-1\right)} = \frac{C^2+1}{2\left(C^2-1\right)}I_3+\frac{\cos^2\psi}{2\left(C^2-1\right)} \tag{554}$$

Dále zavádíme

$$I_5 = \int\frac{\sin^3\psi\cos\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi} = \int\frac{\left(1-\cos^2\psi\right)\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi} =$$

$$= \int\frac{\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi}-\int\frac{\cos^3\psi\sin\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi}$$

$$I_5 = I_3-I_4 = I_3-\left(I_0+\tfrac{1}{2}I_3\right) = -I_0+\tfrac{1}{2}I_3 \tag{555}$$

$$I_6 = \int\frac{\sin^2\psi\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi} = \frac{1}{C^2-1}\int\frac{\left(C^2-1\right)\sin^2\psi\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi} =$$

$$= \frac{1}{C^2-1}\int\frac{\cos^2\psi\left(C^2\sin^2\psi-\sin^2\psi\right)\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi} = \frac{1}{C^2-1}\int\frac{\cos^2\psi\left(C^2\sin^2\psi-1+\cos^2\psi\right)\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi} =$$

$$= \frac{1}{C^2-1}\int\frac{\cos^2\psi\left(C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi\right)-\cos^2\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}\mathrm{d}\psi =$$

$$= \frac{1}{C^2-1}\int\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi-\frac{1}{C^2-1}\int\frac{\cos^2\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}\mathrm{d}\psi$$

$$\begin{pmatrix} \int\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi = \sin\psi\cos\psi+\int\sin^2\psi\,\mathrm{d}\psi = \sin\psi\cos\psi+\int\left(1-\cos^2\psi\right)\mathrm{d}\psi \\ u' = \cos\psi,\, u = \sin\psi, \quad v = \cos\psi,\, v' = -\sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l}\int\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi=\sin\psi\cos\psi+\int\mathrm{d}\psi-\int\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi=\sin\psi\cos\psi+\psi-\int\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi\\ 2\int\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi=\sin\psi\cos\psi+\psi,\quad\int\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi=\dfrac{\sin\psi\cos\psi}{2}+\dfrac{\psi}{2}\end{array}\right)$$

$$I_6=\frac{\sin\psi\cos\psi}{2\left(C^2-1\right)}+\frac{\psi}{2\left(C^2-1\right)}-\frac{1}{C^2-1}I_2=\frac{\sin\psi\cos\psi}{2\left(C^2-1\right)}+\frac{\psi}{2\left(C^2-1\right)}-\frac{1}{C^2-1}\left[\frac{C^2}{C^2-1}I_1-\frac{\psi}{C^2-1}\right]=$$

$$=\frac{\sin\psi\cos\psi}{2\left(C^2-1\right)}+\left[\frac{1}{2\left(C^2-1\right)}+\frac{1}{\left(C^2-1\right)^2}\right]\psi-\frac{C^2}{\left(C^2-1\right)^2}I_1$$

$$=\frac{\sin\psi\cos\psi}{2\left(C^2-1\right)}+\frac{C^2+1}{2\left(C^2-1\right)^2}\psi-\frac{C^2}{\left(C^2-1\right)^2}I_1 \qquad (556)$$

$$I_7=\int\frac{\cos^4\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}=\int\frac{\cos^2\psi\left(1-\sin^2\psi\right)\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}=\int\frac{\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}-\int\frac{\cos^2\psi\sin^2\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}$$

$$=I_2-I_6 \qquad (557)$$

$$I_8=\int\frac{\sin^4\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}=\int\frac{\left(1-\cos^2\psi\right)^2\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}=\int\frac{\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}-$$

$$-2\int\frac{\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}+\int\frac{\cos^4\psi\,\mathrm{d}\psi}{C^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}=I_1-2I_2+I_7=I_1-2I_2+I_2-I_6=$$

$$=I_1-I_2-I_6 \qquad (558)$$

**Neurčitý integrál** potřebný po řešení výrazu (546) je

$$U=\int\frac{\cos^4\left(\psi-\alpha\right)\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi} \qquad (559)$$

Pro výraz v čitateli platí

$$\begin{aligned}\cos^4\left(\psi-\alpha\right)&=\left(\cos\psi\cos\alpha+\sin\psi\sin\alpha\right)^4=\cos^4\psi\cos^4\alpha+4\cos^3\psi\sin\psi\cos^3\alpha\sin\alpha+\\&+6\cos^2\psi\sin^2\psi\cos^2\alpha\sin^2\alpha+4\cos\psi\sin^3\psi\cos\alpha\sin^3\alpha+\sin^4\psi\sin^4\alpha\end{aligned} \qquad (560)$$

Užitím (560) v (559) a úpravou za užití integrálů (549) až (558) nalezneme

$$\begin{aligned}U&=I_7\cos^4\alpha+I_4 4\cos^3\alpha\sin\alpha+I_6 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+I_5 4\cos\alpha\sin^3\alpha+I_8\sin^4\alpha=\\&=\left(I_2-I_6\right)\cos^4\alpha+\left(I_0+\tfrac{1}{2}I_3\right)4\cos^3\alpha\sin\alpha+I_6 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\\&\quad+\left(-I_0+\tfrac{1}{2}I_3\right)4\cos\alpha\sin^3\alpha+\left(I_1-I_2-I_6\right)\sin^4\alpha=\\&=-I_6\left[\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right]+I_2\left[\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right]+I_1\sin^4\alpha+\\&\quad+I_3\left[2\cos^3\alpha\sin\alpha+2\cos\alpha\sin^3\alpha\right]+I_0\left[4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha\right]\end{aligned} \qquad (561a)$$

$$\begin{aligned}U&=-I_6\left[\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2-\left(2\cos\alpha\sin\alpha\right)^2\right]+I_2\left[\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\right]+\\&\quad+I_1\sin^4\alpha+I_3\left[2\cos\alpha\sin\alpha\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\right]+I_0\left[2\left(2\cos\alpha\sin\alpha\right)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\right]=\\&=-I_6\left[\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right]+I_2\cos 2\alpha+I_1\sin^4\alpha+I_3\sin 2\alpha+I_0\left[2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\right]=\\&=-I_6\cos 4\alpha+I_2\cos 2\alpha+I_1\sin^4\alpha+I_3\sin 2\alpha+I_0\sin 4\alpha\end{aligned} \qquad (561)$$

**Neurčitý integrál** potřebný po řešení výrazu (547) je

$$V = \int \frac{\sin(\psi-\alpha)\cos^3(\psi-\alpha)\,d\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi} \tag{562}$$

kde pro výraz v čitateli platí

$$\begin{aligned}
&\sin(\psi-\alpha)\cos^3(\psi-\alpha) = (\sin\psi\cos\alpha-\cos\psi\sin\alpha)(\cos\psi\cos\alpha+\sin\psi\sin\alpha)^3 = \\
&= (\sin\psi\cos\alpha-\cos\psi\sin\alpha)\big(\cos^3\psi\cos^3\alpha+3\cos^2\psi\cos^2\alpha\sin\psi\sin\alpha+ \\
&\quad +3\cos\psi\cos\alpha\sin^2\psi\sin^2\alpha+\sin^3\psi\sin^3\alpha\big) = \\
&= \cos^3\psi\sin\psi\cos^4\alpha+3\cos^2\psi\sin^2\psi\cos^3\alpha\sin\alpha+3\cos\psi\sin^3\psi\cos^2\alpha\sin^2\alpha+ \\
&\quad +\sin^4\psi\cos\alpha\sin^3\alpha-\cos^4\psi\cos^3\alpha\sin\alpha-3\cos^3\psi\sin\psi\cos^2\alpha\sin^2\alpha- \\
&\quad -3\cos^2\psi\sin^2\psi\cos\alpha\sin^3\alpha-\cos\psi\sin^3\psi\sin^4\alpha = \\
&= -\cos^4\psi\left(\cos^3\alpha\sin\alpha\right)+\cos^3\psi\sin\psi\left(\cos^4\alpha-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right)+ \\
&\quad +\cos^2\psi\sin^2\psi\left(3\cos^3\alpha\sin\alpha-3\cos\alpha\sin^3\alpha\right)+ \\
&\quad +\cos\psi\sin^3\psi\left(3\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\sin^4\alpha\right)+\sin^4\psi\left(\cos\alpha\sin^3\alpha\right) =
\end{aligned} \tag{563}$$

Užitím (563) v (562) a úpravou za užití integrálů (549) až (558) nalezneme

$$\begin{aligned}
V &= -I_7\left(\cos^3\alpha\sin\alpha\right)+I_4\left(\cos^4\alpha-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right)+ \\
&\quad +I_6\left(3\cos^3\alpha\sin\alpha-3\cos\alpha\sin^3\alpha\right)+I_5\left(3\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\sin^4\alpha\right)+I_8\left(\cos\alpha\sin^3\alpha\right) = \\
&= -(I_2-I_6)\left(\cos^3\alpha\sin\alpha\right)+\left(I_0+\tfrac{1}{2}I_3\right)\left(\cos^4\alpha-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right)+ \\
&\quad +I_6\left(3\cos^3\alpha\sin\alpha-3\cos\alpha\sin^3\alpha\right)+\left(-I_0+\tfrac{1}{2}I_3\right)\left(3\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\sin^4\alpha\right)+ \\
&\quad +(I_1-I_2-I_6)\left(\cos\alpha\sin^3\alpha\right) = \\
&= I_6\left(\cos^3\alpha\sin\alpha+3\cos^3\alpha\sin\alpha-3\cos\alpha\sin^3\alpha-\cos\alpha\sin^3\alpha\right)- \\
&\quad -I_2\left(\cos^3\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\sin^3\alpha\right)+I_1\left(\cos\alpha\sin^3\alpha\right)+ \\
&\quad +\tfrac{1}{2}I_3\left(\cos^4\alpha-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\sin^4\alpha\right)+ \\
&\quad +I_0\left(\cos^4\alpha-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right) \\
&= I_6 2(2\cos\alpha\sin\alpha)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)-\tfrac{1}{2}I_2(2\cos\alpha\sin\alpha)\left(\cos^2+\sin^2\alpha\right)+ \\
&\quad +I_1\left(\cos\alpha\sin^3\alpha\right)+\tfrac{1}{2}I_3\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)+ \\
&\quad +I_0\left[\left(\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right)-(2\cos\alpha\sin\alpha)^2\right] = \\
&= I_6 2\sin2\alpha\cos2\alpha-\tfrac{1}{2}I_2\sin2\alpha+I_1\left(\cos\alpha\sin^3\alpha\right)+\tfrac{1}{2}I_3\cos2\alpha+I_0\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)
\end{aligned}$$

$$V = I_6\sin4\alpha-\tfrac{1}{2}I_2\sin2\alpha+I_1\left(\cos\alpha\sin^3\alpha\right)+\tfrac{1}{2}I_3\cos2\alpha+I_0\cos4\alpha \tag{564}$$

Pro **určité integrály** budeme používat označení odpovídajícího neurčitého integrálu v hranatých závorkách, s uvedenými indexy mezí (např. $[I_1]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}$).

Vztah (546) nyní upravíme užitím (559) a (561).

$$J_1 = \frac{C}{\pi}\int_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}\frac{\cos^4(\psi-\alpha)\,d\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi}-\frac{C}{\pi}\int_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\frac{\cos^4(\psi-\alpha)\,d\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi} = \frac{C}{\pi}\left\{[U]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}-[U]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\right\}$$

$$J_1 = \frac{C}{\pi}\Big\{\Big[-I_6\cos 4\alpha + I_2\cos 2\alpha + I_1\sin^4\alpha + I_3\sin 2\alpha + I_0\sin 4\alpha\Big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} -$$
$$-\Big[-I_6\cos 4\alpha + I_2\cos 2\alpha + I_1\sin^4\alpha + I_3\sin 2\alpha + I_0\sin 4\alpha\Big]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\Big\} =$$
$$= \frac{C}{\pi}\Big(\Big\{-\big[I_6\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} + \big[I_6\big]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\Big\}\cos 4\alpha + \Big\{\big[I_2\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} - \big[I_2\big]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\Big\}\cos 2\alpha +$$
$$+ \Big\{\big[I_1\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} - \big[I_1\big]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\Big\}\sin^4\alpha + \Big\{\big[I_3\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} - \big[I_3\big]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\Big\}\sin 2\alpha +$$
$$+ \Big\{\big[I_0\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} - \big[I_0\big]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\Big\}\sin 4\alpha\Big) \qquad (565)$$

Podobně upravíme vztah (547) užitím (562) a (564).

$$J_2 = \frac{C}{\pi}\int_{\alpha+\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_m} \frac{\sin(\psi-\alpha)\cos^3(\psi-\alpha)\,\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi} + \frac{C}{\pi}\int_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha-\vartheta_m} \frac{\sin(\psi-\alpha)\cos^3(\psi-\alpha)\,\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi} =$$
$$= \frac{C}{\pi}\Big\{\big[V\big]_{\alpha+\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_m} + \big[V\big]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha-\vartheta_m}\Big\} = \frac{C}{\pi}\Big\{\big[V\big]_{\alpha+\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_m} - \big[V\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha-\vartheta_\varepsilon}\Big\} =$$
$$= \frac{C}{\pi}\Big\{\Big[I_6\sin 4\alpha - \tfrac{1}{2}I_2\sin 2\alpha + I_1\left(\cos\alpha\sin^3\alpha\right) + \tfrac{1}{2}I_3\cos 2\alpha + I_0\cos 4\alpha\Big]_{\alpha+\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_m} -$$
$$-\Big[I_6\sin 4\alpha - \tfrac{1}{2}I_2\sin 2\alpha + I_1\left(\cos\alpha\sin^3\alpha\right) + \tfrac{1}{2}I_3\cos 2\alpha + I_0\cos 4\alpha\Big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha-\vartheta_\varepsilon}\Big\} =$$
$$= \frac{C}{\pi}\Big(\Big\{\big[I_6\big]_{\alpha+\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_m} - \big[I_6\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha-\vartheta_\varepsilon}\Big\}\sin 4\alpha - \tfrac{1}{2}\Big\{\big[I_2\big]_{\alpha+\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_m} - \big[I_2\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha-\vartheta_\varepsilon}\Big\}\sin 2\alpha +$$
$$+ \Big\{\big[I_1\big]_{\alpha+\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_m} - \big[I_1\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha-\vartheta_\varepsilon}\Big\}\cos\alpha\sin^3\alpha + \tfrac{1}{2}\Big\{\big[I_3\big]_{\alpha+\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_m} - \big[I_3\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha-\vartheta_\varepsilon}\Big\}\cos 2\alpha +$$
$$+ \Big\{\big[I_0\big]_{\alpha+\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_m} - \big[I_0\big]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha-\vartheta_\varepsilon}\Big\}\cos 4\alpha\Big) \qquad (566)$$

Určité integrály v (565) a (566) stanovíme z výrazů (556), (550), (549), (551), (554). (Připomeňme, že pro hodnoty parametrů platí $C \geq 1,\ \ 0 \leq \vartheta_\varepsilon \leq \vartheta_m \leq \pi/2$ a $\alpha \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.)

*Poznámka:* Vyjádření určitého integrálu jako "výraz s horní mezí minus výraz s dolní mezí" může selhat u integrálů typu $\big[I_1\big]_A^B$, neboť funkce $\mathrm{tg}\,\psi$ v (549) je nespojitá v bodech $\pi/2 \pm n\pi$, kde $n$ je přirozené. (Vzhledem k přípustným hodnotám $\alpha, \vartheta_\varepsilon, \vartheta_m$ leží meze *A, B* určitých integrálů v intervalu od $-\pi$ do $\pi$.) Pro tyto integrály obecně platí:

$$\left.\begin{array}{l} \text{-pro } \left(-\pi/2 \pm n\pi\right) \leq A \text{ a současně } B \leq \left(\pi/2 \pm n\pi\right) \text{ je } \big[I_1\big]_A^B = \dfrac{1}{C}\left\{\mathrm{arctg}\left[C\,\mathrm{tg}B\right] - \mathrm{arctg}\left[C\,\mathrm{tg}A\right]\right\} \\ \text{- jinak } \big[I_1\big]_A^B = \dfrac{1}{C}\left\{\mathrm{arctg}\left[C\,\mathrm{tg}B\right] - \mathrm{arctg}\left[C\,\mathrm{tg}A\right] + \pi\right\} \end{array}\right\} (567)$$

Konečně vyjádříme **konkrétní tvar integrálu** $\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \cos^4\vartheta\left(1-\mathrm{tg}\,\vartheta/\mathrm{tg}\,\vartheta_m\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$ dosazením $J_1$ dle (565) a $J_2$ dle (566) do vztahu (544). Položíme formálně $\vartheta_\varepsilon = 0$ nalezneme stejným postupem i konkrétní tvar druhého potřebného integrálu $\int_0^{\vartheta_m} \cos^4\vartheta\left(1-\mathrm{tg}\,\vartheta/\mathrm{tg}\,\vartheta_m\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$.

**Zvláště jednoduchý tvar** nabude integrál (544) v případě, kdy $\vartheta_m = \pi/2$ (**nekonečně široké čelisti**) a $\vartheta_\varepsilon = 0$ (**poměrné prodloužení v čelistech** $\varepsilon$ **menší než tažnost** *a* **vláken**, žádné vlákno není přetrženo).

Potom z (567) nalezneme

- pro $\alpha = 0$ vztah

$$\left[I_1\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} = \left[I_1\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{C}\left\{\operatorname{arctg}\left[C\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\right] - \operatorname{arctg}\left[C\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{C}\left\{\operatorname{arctg}[\infty] - \operatorname{arctg}[-\infty]\right\} = \frac{1}{C}\left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{C} \tag{568a}$$

- pro $\alpha > 0$, tj. $(\alpha + \pi/2) > \pi/2$ vztah

$$\left[I_1\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} = \left[I_1\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2} = \frac{1}{C}\left\{\operatorname{arctg}\left[C\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] - \operatorname{arctg}\left[C\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \pi\right\} =$$

$$= \frac{1}{C}\left\{\operatorname{arctg}\left[C\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \pi\right)\right] - \operatorname{arctg}\left[C\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \pi\right\} = \frac{\pi}{C} \tag{568b}$$

- pro $\alpha < 0$, tj. $(\alpha - \pi/2) < (-\pi/2)$ vztah

$$\left[I_1\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} = \left[I_1\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2} = \frac{1}{C}\left\{\operatorname{arctg}\left[C\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] - \operatorname{arctg}\left[C\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \pi\right\} =$$

$$= \frac{1}{C}\left\{\operatorname{arctg}\left[C\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] - \operatorname{arctg}\left[C\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + \pi\right)\right] + \pi\right\} = \frac{\pi}{C} \tag{568c}$$

Úhrnně tedy pro všechny hodnoty $\alpha$ platí vztah

$$\left[I_1\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} = \left[I_1\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2} = \frac{\pi}{C} \tag{568}$$

Dále z (550) a (568) nalezneme

$$\left[I_2\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} = \left[I_2\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2} = \frac{C^2}{C^2-1}\frac{\pi}{C} - \frac{(\alpha+\pi/2)-(\alpha-\pi/2)}{C^2-1} = \frac{C\pi}{C^2-1} - \frac{\pi}{C^2-1} =$$

$$= \frac{\pi(C-1)}{(C+1)(C-1)} = \frac{\pi}{C+1} \tag{569}$$

Protože platí $\cos(\alpha+\pi/2) = -\cos(\alpha-\pi/2)$, $\cos^2(\alpha+\pi/2) = \cos^2(\alpha-\pi/2)$, plyne z (551) vztah

$$\left[I_3\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} = \left[I_3\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2} = \frac{1}{2\left(C^2-1\right)}\left\{\ln\left(\frac{C^2}{C^2-1} - \cos^2(\alpha+\pi/2)\right) - \right.$$

$$\left. - \ln\left(\frac{C^2}{C^2-1} - \cos^2(\alpha-\pi/2)\right)\right\} = 0 \tag{570}$$

a z (554) vyjádříme užitím (570) výraz

$$\left[I_0\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} = \left[I_0\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2} = \frac{C^2+1}{2\left(C^2-1\right)}\,0 + \frac{\cos^2(\alpha+\pi/2) - \cos^2(\alpha-\pi/2)}{2\left(C^2-1\right)} = 0 + 0 = 0 \tag{571}$$

Z (556) nalezneme při použití (568) rovnici

$$\left[I_6\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m} = \left[I_6\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2} = \frac{\sin(\alpha+\pi/2)\cos(\alpha+\pi/2) - \sin(\alpha-\pi/2)\cos(\alpha-\pi/2)}{2\left(C^2-1\right)} +$$

$$+ \frac{C^2+1}{2\left(C^2-1\right)^2}\left[(\alpha+\pi/2) - (\alpha-\pi/2)\right] - \frac{C^2}{\left(C^2-1\right)^2}\frac{\pi}{C}$$

$$\left[I_6\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}=\left[I_6\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2}=0+\frac{C^2+1}{2\left(C^2-1\right)^2}\pi-\frac{C}{\left(C^2-1\right)^2}\pi=\pi\frac{C^2+1-2C}{2\left(C^2-1\right)^2}=$$

$$=\pi\frac{\left(C-1\right)^2}{2\left(C+1\right)^2\left(C-1\right)^2}=\frac{\pi}{2\left(C+1\right)^2} \tag{572}$$

Veličinu $J_1$ vyjádříme pro tento případ výhodněji ze vztahu (546) užitím (559) a (561a). Místo tvaru (565) tak najdeme alternativní vyjádření

$$J_1=\frac{C}{\pi}\int_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}\frac{\cos^4\left(\psi-\alpha\right)\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi}-\frac{C}{\pi}\int_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\frac{\cos^4\left(\psi-\alpha\right)\mathrm{d}\psi}{C^2-\left(C^2-1\right)\cos^2\psi}=\frac{C}{\pi}\left\{\left[U\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}-\left[U\right]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\right\}$$

$$\begin{aligned}J_1=\frac{C}{\pi}\Big(&\left\{-\left[I_6\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}+\left[I_6\right]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\right\}\left(\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right)+\\&+\left\{\left[I_2\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}-\left[I_2\right]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\right\}\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)+\left\{\left[I_1\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}-\left[I_1\right]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\right\}\sin^4\alpha+\\&+\left\{\left[I_3\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}-\left[I_3\right]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\right\}\left(2\cos^3\alpha\sin\alpha+2\cos\alpha\sin^3\alpha\right)+\\&+\left\{\left[I_0\right]_{\alpha-\vartheta_m}^{\alpha+\vartheta_m}-\left[I_0\right]_{\alpha-\vartheta_\varepsilon}^{\alpha+\vartheta_\varepsilon}\right\}\left(4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha\right)\Big)\end{aligned} \tag{573}$$

Protože $\vartheta_m=\pi/2$, platí pro první z každé dvojice určitých integrálů v předchozím výrazu některý ze vztahů (568) až (572). Druhý z každé dvojice určitých integrálů je roven nule, protože v uvažovaném případě je $\vartheta_\varepsilon=0$, takže $\alpha+\vartheta_\varepsilon=\alpha-\vartheta_\varepsilon=\alpha$. V tomto případě z (573) plyne vztah

$$\begin{aligned}J_1=\frac{C}{\pi}\Big(&-\left[I_6\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2}\left(\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right)+\left[I_2\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2}\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)+\left[I_1\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2}\sin^4\alpha+\\&+\left[I_3\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2}\left(2\cos^3\alpha\sin\alpha+2\cos\alpha\sin^3\alpha\right)+\left[I_0\right]_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2}\left(4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha\right)\Big)=\\=&\frac{C}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2\left(C+1\right)^2}\left(\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right)+\frac{\pi}{C+1}\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)+\frac{\pi}{C}\sin^4\alpha\right)=\\=&\frac{-C+C2\left(C+1\right)}{2\left(C+1\right)^2}\cos^4\alpha+\frac{C}{2\left(C+1\right)^2}6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\frac{-C-C2\left(C+1\right)+2\left(C+1\right)^2}{2\left(C+1\right)^2}\sin^4\alpha=\\=&\frac{C\left(2C+1\right)}{2\left(C+1\right)^2}\cos^4\alpha+\frac{C}{2\left(C+1\right)^2}6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\frac{C+2}{2\left(C+1\right)^2}\sin^4\alpha=\\=&\frac{2C^2\cos^4\alpha+C\cos^4\alpha+6C\cos^2\alpha\sin^2\alpha+C\sin^4\alpha+2\sin^4\alpha}{2\left(C+1\right)^2}=\\=&\frac{C\left(\cos^4\alpha+2C\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right)+2C^2\cos^4\alpha+4C\cos^2\alpha\sin^2\alpha+2\sin^4\alpha}{2\left(C+1\right)^2}=\\=&\frac{C\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2+2\left[\left(C\cos^2\alpha\right)^2+2\left(C\cos^2\alpha\right)\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right]}{2\left(C+1\right)^2}\end{aligned}$$

$$J_1=\frac{C+2\left(C\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2}{2\left(C+1\right)^2}=\frac{C}{2\left(C+1\right)^2}+\frac{\left(C\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2}{\left(C+1\right)^2} \tag{574}$$

Pro případ, kdy $\vartheta_{\mathrm{m}} = \pi/2$ a $\vartheta_{\varepsilon} = 0$ vyjádříme integrál $\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}} \cos^4\vartheta\left(1 - \operatorname{tg}\vartheta/\operatorname{tg}\vartheta_{\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$ ze vztahu (544) dosazením $J_1$ dle (574). Tak nalezneme vyjádření

$$\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}} \cos^4\vartheta\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_{\mathrm{m}}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = \int_{0}^{\pi/2} \cos^4\vartheta\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta_{\mathrm{m}}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = J_1 - \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi/2)}J_2 =$$

$$= J_1 - \frac{1}{\infty}J_2 = J_1 = \frac{C}{2(C+1)^2} + \frac{\left(C\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)^2}{(C+1)^2} \qquad (575)$$

**Algoritmus výpočtu.** Užitím vztahů z předchozích kapitol a matematických výrazů z této kapitoly lze zadaný příklad řešit ve 4 krocích, formulovaných za rovnicí (543). Nejprve je nutno zjistit

*I) vstupní parametry*, jimiž jsou

*a)* pevnost vláken *P*, tažnost vláken *a*, jemnost vláken *t*,

*b)* plošná hmotnost textilie $\gamma$,

*c)* parametr hustoty pravděpodobnosti rozložení směrů vláken *C*, úhel $\alpha$ "natočení" upnutého vzorku textilie vzhledem k ose čelistí,

*d)* šířka čelistí *c*, upínací délka *h*.

Ve vlastním řešení je užíván

*II) postup výpočtu integrálu* $\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_{\mathrm{m}}} \cos^4\vartheta\left(1 - \operatorname{tg}\vartheta/\operatorname{tg}\vartheta_{\mathrm{m}}\right)u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$. (Pro výpočet je nutno znát parametry $C$, $\alpha$ a integrační meze $\vartheta_\varepsilon$ a $\vartheta_{\mathrm{m}}$.) Postup výpočtu je následující:

*a)* Je-li $\vartheta_{\mathrm{m}} = \pi/2$ a $\vartheta_\varepsilon = 0$, vypočteme integrál vztahem (575).

*b)* Ve všech ostatních případech vypočteme integrál z rovnice (545), dosazením hodnoty $J_1$ z rov. (565) a hodnoty $J_2$ z rov. (567).

*Poznámka:* Při výpočtu určitých integrálů typu $I_1$ užijeme vztah (567), ostatní určité integrály vyjádříme jako "výraz s horní mezí minus výraz s dolní mezí" z neurčitých integrálů (550), (551), (554) a (556).

Uvažujme, že jsme stanovili parametry ad *I)*. Výpočet 4 dílčích úloh, formulovaných za rov. (543), lze pak provést následujícím postupem:

*1)* Výpočet *měrné síly textilie R.*

*a)* Z rov. (451) vypočteme **úhel** $\vartheta_{\mathrm{m}}$. (Uvažujeme $\vartheta_{\mathrm{m}} \geq 0$, neboť v této kapitole jsou všechny úhly $\vartheta$ nezáporné - viz kap.4.5.)

*b)* Stanovíme **poměrné prodloužení v čelistech** $\varepsilon$, pro které má být vypočtena hodnota měrné síly textilie *R.*,

*c)* Z rov. (515d) vypočteme **veličinu** $\varepsilon'$. Pokud $\varepsilon \in \langle a, \varepsilon' \rangle$, vypočteme z téže rovnice také **veličinu** $\vartheta_\varepsilon$.

*d)* Z rovnic (515a) až (515c) za užití postupu ad *II)* vypočteme **měrnou sílu textilie** *R.*

*Poznámka:* Opakováním bodů *b), c), d)* pro různé hodnoty $\varepsilon$ nalezneme závislost $R$ na $\varepsilon$, tj. nalezneme **tahovou pracovní křivku** upnutého vzorku textilie.

*2)* Výpočet *využití* $\eta_R$ *materiálu*

*a)* Z rov. (451) vypočteme **úhel** $\vartheta_m$. (Uvažujeme $\vartheta_m \geq 0$, neboť v této kapitole jsou všechny úhly $\vartheta$ nezáporné - viz kap.4.5.)

*b)* Z rov. (517) za užití postupu ad *II)* vypočteme **využití** $\eta_R$ **materiálu**.

*Poznámka:* V daném příkladě je využití $\eta_P$ stejné pro všechny hodnoty $\varepsilon \leq a$; pro $\varepsilon > a$ není $\eta_P$ definováno.

*3)* Výpočet *tažnosti textilie* $a_\Sigma$.

*a)* Z rov. (451) vypočteme **úhel** $\vartheta_m$. (Uvažujeme $\vartheta_m \geq 0$, neboť v této kapitole jsou všechny úhly $\vartheta$ nezáporné - viz kap.4.5.)

*iterativní vyhledání kořene rovnice:*

*b)* zvolíme nějakou **hodnotu** $\vartheta_\varepsilon \in \langle 0, \vartheta_m )$, vypočteme **pravou stranu** rovnice (541a) a s využitím postupu ad *II)* také **levou stranu** téže rovnice.

*c)* postup ad *b)* opakujeme pro různé hodnoty $\vartheta_\varepsilon$ tak dlouho, až je levá strana rovnice (541a) rovna její pravé straně. (Užijeme vhodnou **numerickou metodu hledání kořene rovnice**.)

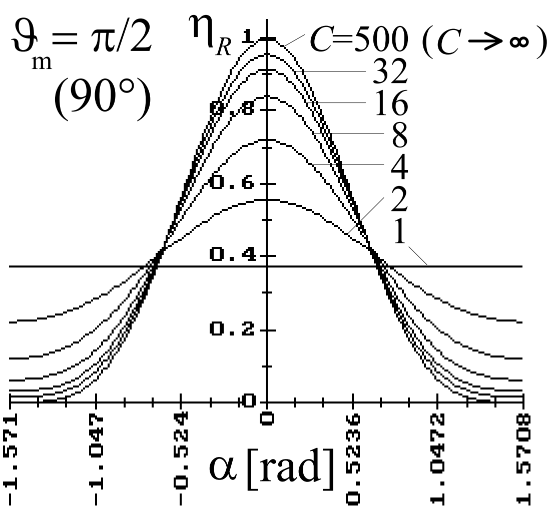
*d)* Poslední užitou hodnotu $\vartheta_\varepsilon$ dosadíme do rov. (541b) a z ní nalezneme **tažnost** $a_\Sigma$ upnutého vzorku textilie $a_\Sigma = a/\cos^2 \vartheta_\varepsilon$.

*4)* Výpočet *měrné pevnosti textilie* $P_\Sigma$.

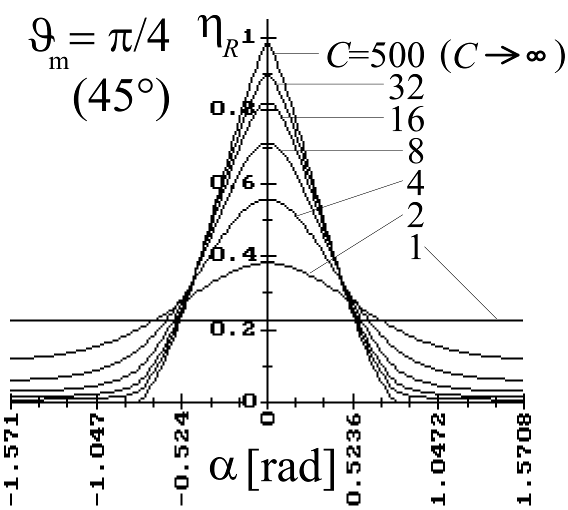
*a)* Vypočteme **tažnosti textilie** $a_\Sigma$ podle předchozího bodu *3)*.

*b)* Z rov. (542) za užití postupu ad *II)* vypočteme **měrnou pevnost** $P_\Sigma$ upnutého vzorku textilie.

**Výsledky výpočtů.** Závislost **využití** $\eta_R$ **materiálu** na úhlu $\alpha$ (natočení vzorku vzhledem k ose čelistí) je zobrazena v grafech na obr. 33. (Platí pro všechna $\varepsilon \leq a$.)




a)




b)

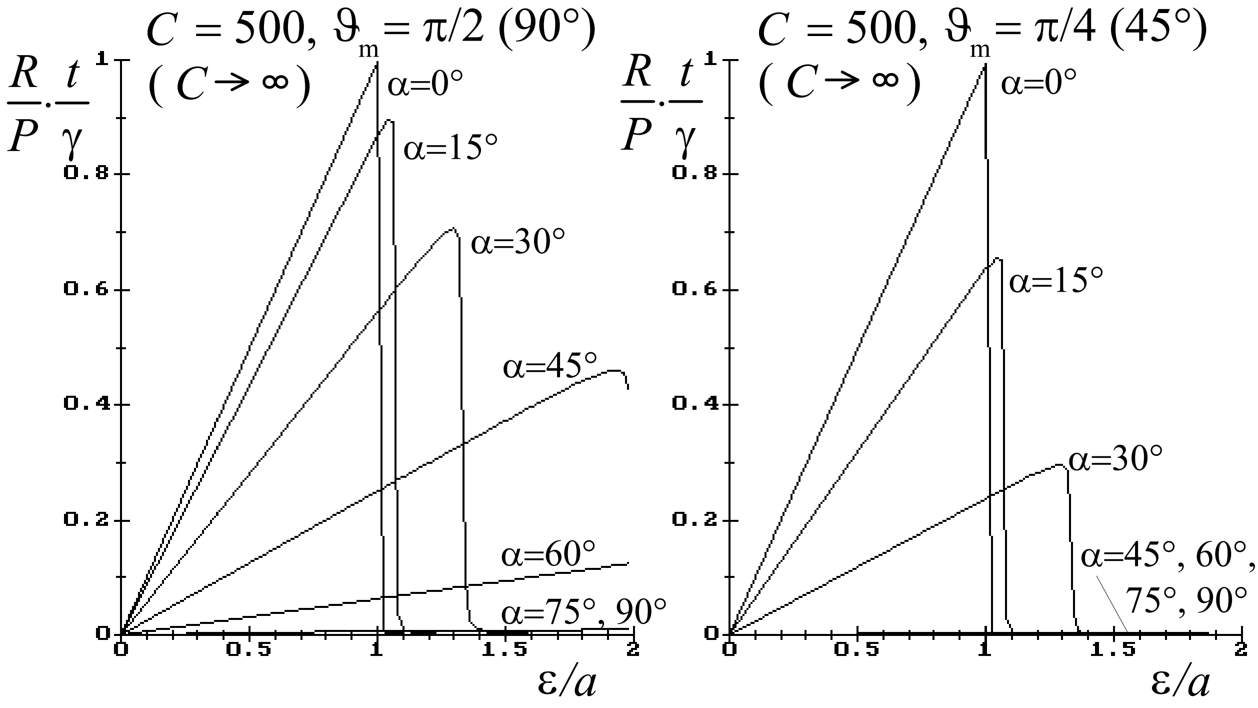
obr. 33

Obr. 33a) charakterizuje případ, kdy lze **zanedbat vliv okrajů čelistí** ($\vartheta_m = \pi/2$, užito rov. (575) ). Křivka pro $C = 500$ vyjadřuje závislost pro svazek **prakticky paralelních vláken**. (Je téměř identická s funkcí $\eta_R = \cos^4 \alpha$, jíž nalezneme limitováním vztahu (575) pro $C \to \infty$.) Naproti tomu textilie s **isotropní orientací vláken** ($C = 1$) má pro všechny úhly $\alpha$ stejnou hodnotu využití $\eta_R = 3/8$. (Je to vlastně pravidelná multiaxiální textilie s nekonečným počtem nekonečně "řídkých" soustav. Výsledek je proto shodný s rov. (498).)

Obr. 33b) ilustruje analogické závislosti pro případ, kdy **vliv okrajů čelistí je významný** ($\vartheta_m = \pi/4$, tj. šířka čelistí je stejná jako upínací délka). V porovnání s obr. 33a) je využití $\eta_R$ nižší zejména u menších hodnot $C$ (méně uspořádané struktury) a u větších absolutních hodnot úhlu $\alpha$.

**Tahové pracovní křivky** ilustrují grafy na obr. 34 až 37. Pro snazší zobrazení není zakreslována výchozí závislost $R$ na $\varepsilon$, nýbrž závislost veličiny $(R/P)\cdot(t/\gamma)$ na $\varepsilon/a$, která plyne rovněž z rovnic (515). ($P, a, t, \gamma$ jsou pevné parametry.) V jednom grafu jsou vždy vyneseny tahové pracovní křivky pro řadu hodnot $\alpha$. Obrázky a) charakterizují případy **bez vlivu okrajů čelistí** ($\vartheta_m = \pi/2$), obrázky b) ilustrují případ, kdy **vliv okrajů čelistí je významný** ($\vartheta_m = \pi/4$, tj. šířka čelistí je stejná jako upínací délka).

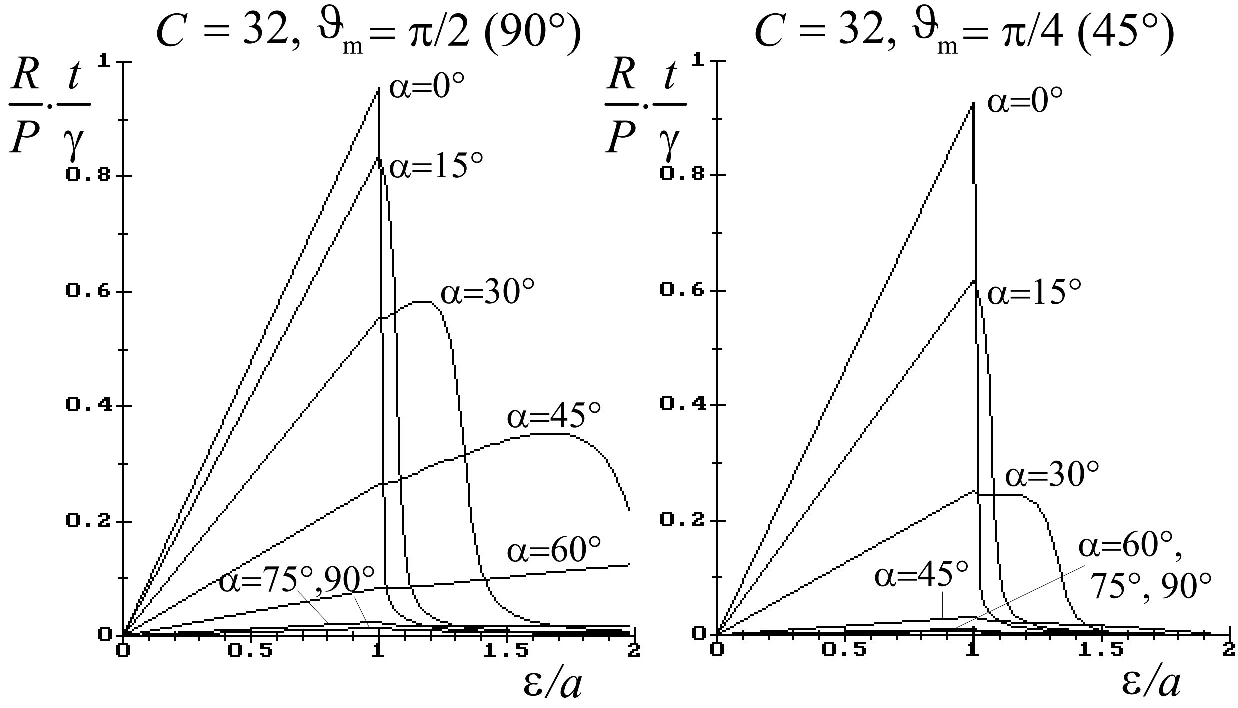
Obr. 34 se týká svazku prakticky **paralelních vláken** (velmi vysoká hodnota $C = 500$). Lze si povšimnout, že s úhlem $\alpha$ (natočení vzorku vzhledem k ose čelistí) se významně **mění pevnost i tažnost** upnutého vzorku textilie (tj. bod maxima tahové pracovní křivky). Vliv okrajů čelistí je pro malé hodnoty $\alpha$ nepodstatný, pro hodnoty $\alpha \geq \vartheta_m$ je naopak rozhodující (znamená prakticky nulovou pevnost).




a) b)

obr. 34

Pro stále ještě vysokou míru paralelity vláken při $C = 32$ jsou analogické grafy znázorněny na obr. 35. I zde se s úhlem $\alpha$ významně **mění pevnost i tažnost** upnutého vzorku textilie.

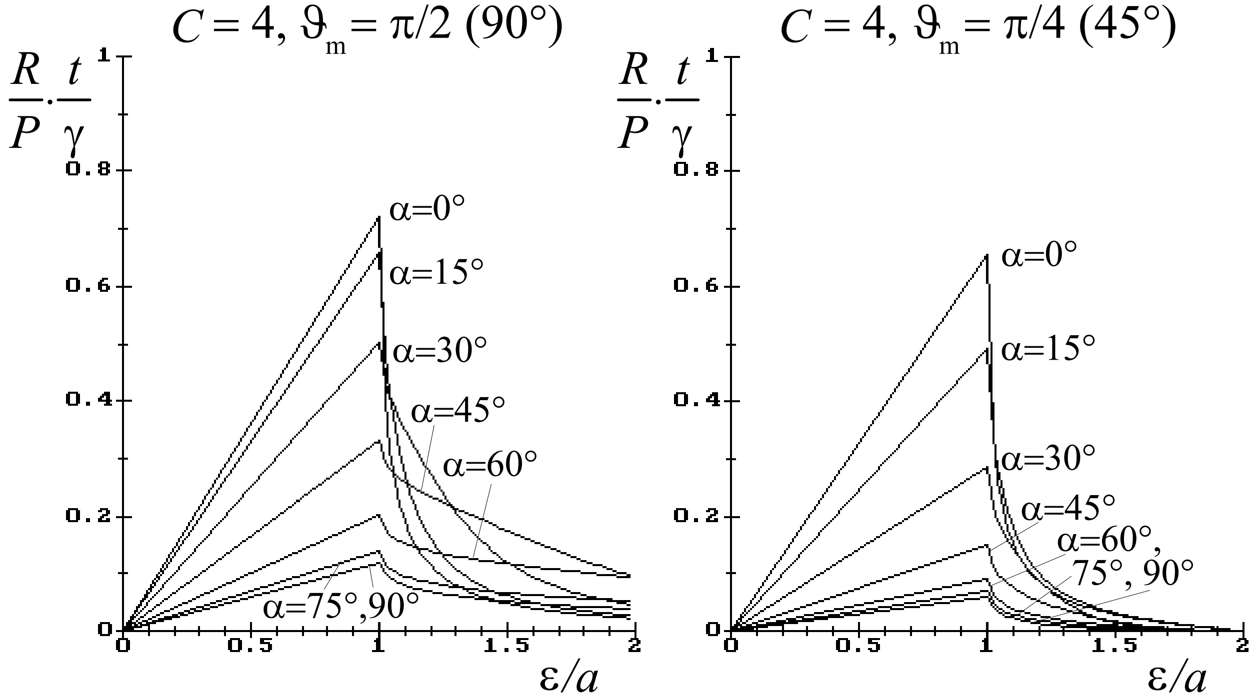



a) b)

obr. 35

(Zejména u úhlů $\alpha$ nad 15°.) Ve srovnání s obr. 34 jsou maxima těchto křivek "zaoblena".

Na obr. 36 jsou tahové pracovní křivky vypočteny pro $C = 4$ (odpovídá přibližně orientaci centimetrových úseků vláken v pavučině z mykacího stroje - viz část A, příklad v závěru kap. 4.2).

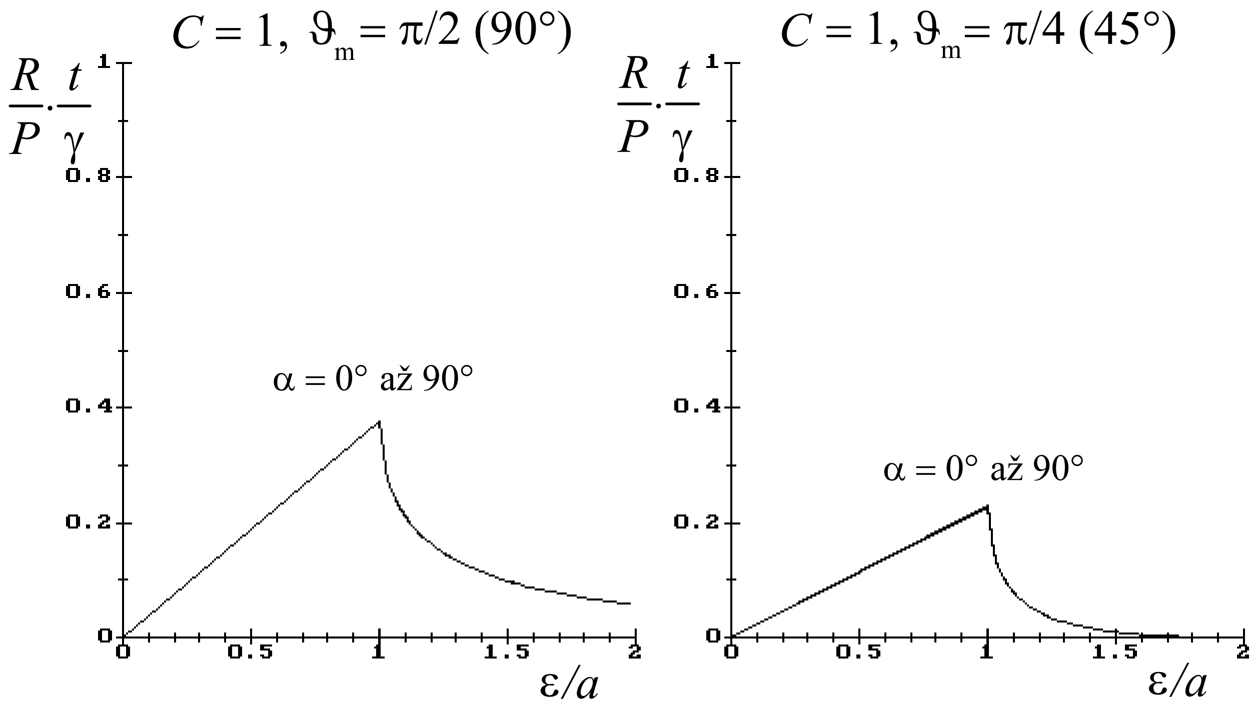



a) b)

obr. 36

Zde je již při všech úhlech $\alpha$ (natočení vzorku) **tažnost textilie prakticky rovna tažnosti vláken** ($a_\Sigma / a \cong 1$); jinak řečeno, jakmile se přetrhne první vlákno, přetrhne se i celá textilie. Vliv krajů čelistí (úhlu $\vartheta_m$) je zřejmý z porovnání grafů ad a) a b.

Konečně pro isotropní uspořádání vláken, popsané hodnotou $C = 1$ byly vypočteny tahové pracovní křivky znázorněné na obr. 37.




a) b)

obr. 37

Jak bylo možné očekávat, je **tahová pracovní křivka stejná při všech úhlech** $\alpha$ natočení vzorku textilie vzhledem k ose čelistí. Stejně jako v předchozím případě je i zde **tažnost textilie rovna tažnosti vláken** ($a_\Sigma / a \cong 1$).

Z grafů na obr. 34 až 37 je zřejmé, že výpočet **tažnosti textilie** $a_\Sigma$ speciálním algoritmem ad *3)* přichází prakticky v úvahu jenom u textilií s vysokou paralelitou vláken.

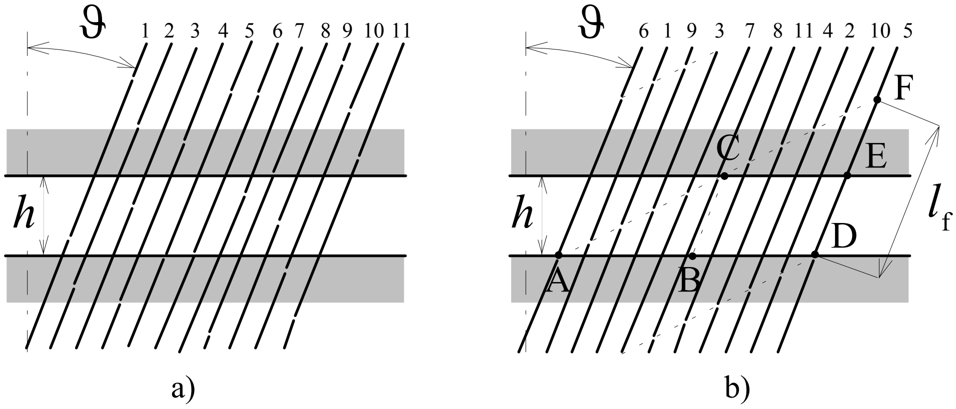
*Poznámka:* Při programování výpočtu integrálu podle popsaného algoritmu *II)* je třeba pečlivě ošetřit numerickou nestabilitu v okolí neurčitých výrazů resp. singularit (např. v okolí úhlů $\pi/2 \pm i\pi$, $i$ je celé číslo, nebo jestliže $C \to 1$ nebo $C \to \infty$). Přímý numerický výpočet integrálu (544) po dosazení (543) je z tohoto hlediska "robustnější", méně "rizikový"; je ovšem podstatně pomalejší.

## 4.7 Multiaxiální textilie ze staplových vláken a další vlivy

**Staplová vlákna.** V předchozích kapitolách je mechanické chování multiaxiálních textilií řešeno za užití řady předpokladů. Šest nejpodstatnějších je uvedeno v úvodu kap. 4.1.

Hned první předpoklad uvažoval nekonečná vlákna. Mnohé multiaxiální textilie (zejména se spojitým rozložením směrů) jsou však vyráběny ze **staplových vláken**, tj. vláken relativně krátkých.

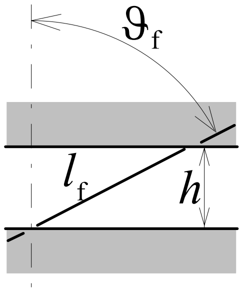
Uvažujme soustavu staplových vláken s **konstantní délkou vláken** $l_\mathrm{f}$. Takovou soustavu (myšleně) vytvoříme ze soustavy nekonečných vláken tak, že na každém nekonečném vlákně vybereme náhodně a nezávisle výchozí bod a od tohoto bodu na obě strany nekonečné vlákno rozřežeme na úseky o délce $l_\mathrm{f}$.




obr. 38

Na obr. 38a) je znázorněn svazek rozřezaných nekonečných vláken, sevřený pod úhlem $\vartheta$ v čelistech dynamometru. Některá dříve nekonečná vlákna nyní nepřenášejí žádnou sílu, protože jsou v prostoru mezi čelistmi rozříznuta (např. vlákna č. 1, 3 atd.). Jiná dříve nekonečná vlákna sílu přenášejí, protože příslušné staplové vlákno je sevřeno oběma čelistmi (např. vlákna č. 2, 4 atd.).

Bez újmy na obecnosti je možno původně nekonečná vlákna **přerovnat** podle toho, jak velký konec staplového vlákna "vyčnívá" ze spodní čelisti. Tak vznikne uspořádání znázorněné na obr. 38b). Po přerovnání tvoří konce staplových vláken čárkované přímky[1)] (AF a další). Je zřejmé, že vlákna protínající úsečku AB sílu nepřenášejí a naopak vlákna v úsečce BD přenášejí stejně velkou sílu jako dříve nekonečná vlákna. **Podíl** $\lambda$ vláken, která přenášejí sílu nalezneme jako podíl velikosti úseček $\mathrm{BD}/\mathrm{AD}$. Z obr. 38b) za užití podobnosti trojúhelníků ADF a CEF vyplývá vztah




obr. 39

$$\lambda = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DF}} = \frac{l_\mathrm{f} - \mathrm{DE}}{l_\mathrm{f}} = 1 - \frac{\mathrm{DE}}{l_\mathrm{f}} = 1 - \frac{h/\cos\vartheta}{l_\mathrm{f}} = 1 - \frac{h/l_\mathrm{f}}{\cos\vartheta} \qquad (576)$$

Při jisté hraniční hodnotě úhlu $\vartheta = \vartheta_\mathrm{f}$ nabude podíl $\lambda$ hodnoty 0.

$$0 = 1 - \frac{h/l_\mathrm{f}}{\cos\vartheta_\mathrm{f}} \qquad \cos\vartheta_\mathrm{f} = \frac{h}{l_\mathrm{f}} \qquad \vartheta_\mathrm{f} = \arccos\frac{h}{l_\mathrm{f}} \qquad (577)$$

(Situaci znázorňuje obr. 39.) Je-li $\vartheta > \vartheta_\mathrm{f}$ pak žádné staplové vlákno není sevřeno oběma čelistmi, a nepřenáší tedy sílu. Souhrnně proto platí

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = 1 - \frac{h/l_\mathrm{f}}{\cos\vartheta} && h/l_\mathrm{f} < \cos\vartheta \quad (\cos\vartheta_\mathrm{f} < \cos\vartheta) \\ &\lambda = 0 && h/l_\mathrm{f} \geq \cos\vartheta \quad (\cos\vartheta_\mathrm{f} \geq \cos\vartheta) \end{aligned}\right\} \qquad (578)$$

---

1) Výchozí bod pro rozřezávání každého nekonečného vlákna jsme volili **nezávisle** na jiných vláknech a **náhodně**. Každé místo na nekonečném vlákně má proto stejnou pravděpodobnost, že bude místem řezu. Odtud je zřejmé, že konce vláken po přerovnání musí tvořit přímky.

Při výpočtu tahového namáhání je možné použít výsledky odvozené v předešlých kapitolách, je však třeba zmenšit počet vláken vynásobením podílem $\lambda$.

U **multiaxiálních textilií s konečným počtem soustav** musíme u každé soustavy místo její skutečné dostavy $D$ (zavedené v kap. 4.2) užít **redukovanou dostavu** soustavy $D_{\mathrm{red}}$.

$$D_{\mathrm{red}} = D\lambda \tag{579}$$

kde $\lambda$ je vyjádřeno rovnicí (578).

*Poznámka:* Redukce dostavy se promítne i do veličiny $Q$ dle (459); $Q_{\mathrm{red}} = D_{\mathrm{red}} P/a = \lambda\, DP/a = = \lambda Q$. V pravidelné multiaxiální textilii mají sice všechny soustavy stejné $Q$, ale hodnoty $Q_{\mathrm{red}}$ jsou nyní různé (vzhledem k různým hodnotám $\vartheta$, a tedy různým hodnotám $\lambda$).

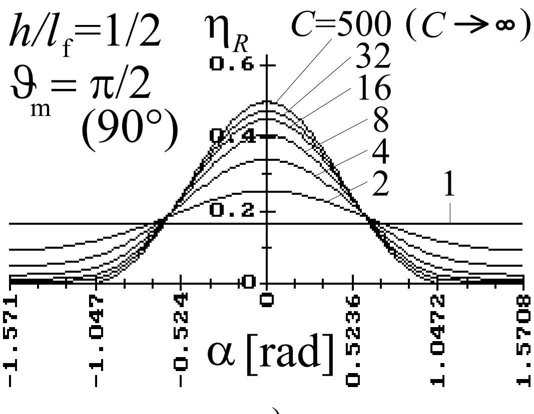
U textilií se spojitým rozložením směrů vláken v rovině je nutno obdobně místo hustoty pravděpodobnosti $u(\vartheta)$ směrového rozložení vláken užít **redukovanou hustotu pravděpodobnosti** $u_{\mathrm{red}}(\vartheta)$, jíž vyjádříme tvarem

$$u_{\mathrm{red}}(\vartheta) = u(\vartheta)\,\lambda \tag{580}$$

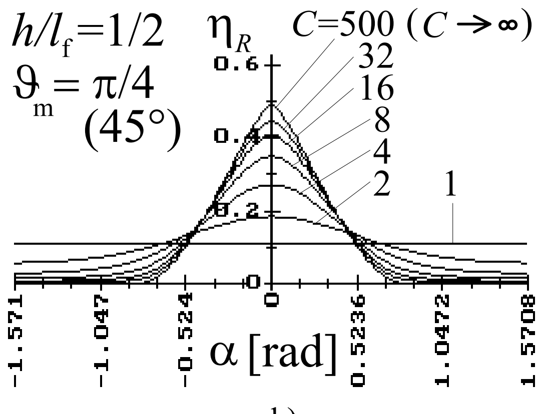
kde $\lambda$ je vyjádřeno též rovnicí (578).

**Příklad** textilie se spojitým rozložením směrů vláken v rovině, uvedený v kapitole 4.6, je možno dále rozšířit i na případ textilie ze staplových vláken. V tomto případě musíme užít při výpočtu integrálu $\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \cos^4\vartheta\left(1-\mathrm{tg}\,\vartheta/\mathrm{tg}\,\vartheta_m\right)u(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$ místo původní funkce $u(\vartheta)$ funkci $u_{\mathrm{red}}(\vartheta)$. Pro příklad jsme zvolili hodnotu $h/l_{\mathrm{f}} = 1/2$ $\left(\vartheta_{\mathrm{f}} = 60^{\circ}\right)$. Místo grafů na obr. 33 až 37 jsme pak nalezli grafy na obr. 40 až 44. (Pro porovnání jsou grafy zakresleny ve stejném měřítku. Integrál $\int_{\vartheta_\varepsilon}^{\vartheta_m} \cos^4\vartheta\left(1-\mathrm{tg}\,\vartheta/\mathrm{tg}\,\vartheta_m\right)u_{\mathrm{red}}(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$ byl nyní vypočítáván numericky - viz též poznámka v závěru kap. 4.6.)

Závislost **využití materiálu** $\eta_R$ **na úhlu** $\alpha$ charakterizují grafy na obr. 40. V porovnání s obr. 33 je zřejmý pokles křivek, způsobený vlivem konců staplových vláken.



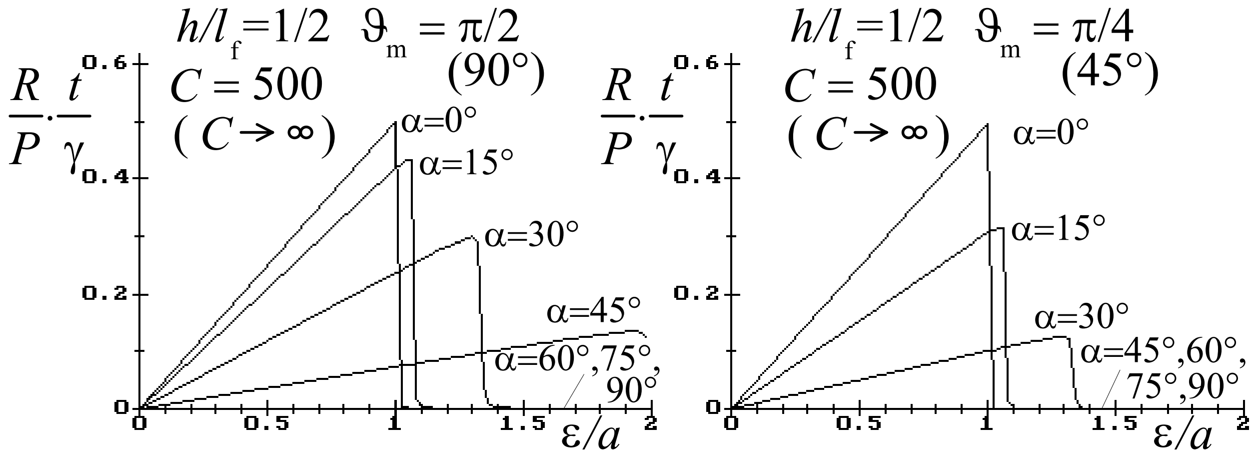

a)




b)

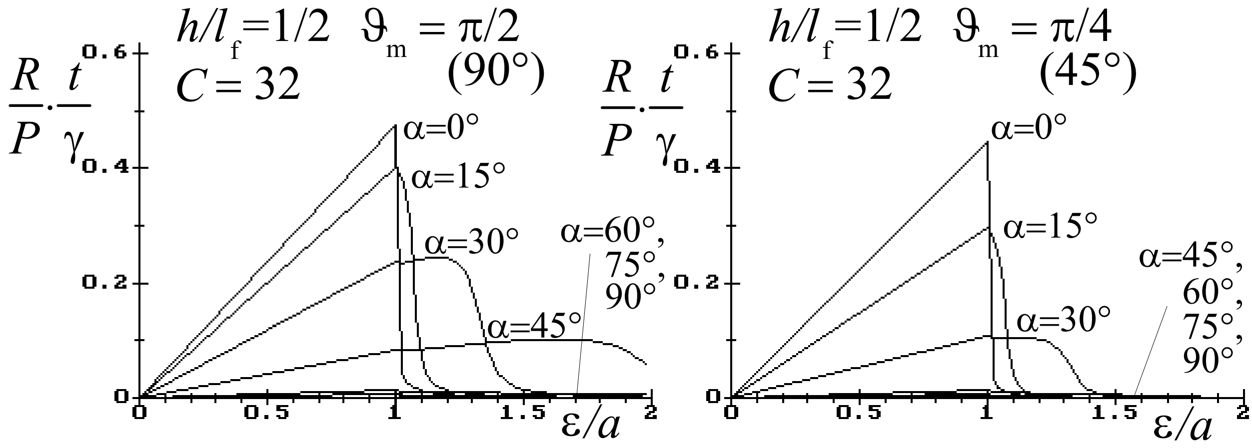
obr. 40

Tahové pracovní křivky znázorňují grafy na obr. 41 až 44. Ve srovnání s grafy na obr. 34 až 37 je i zde zřejmá nižší poloha křivek, jako důsledek použití staplových vláken.



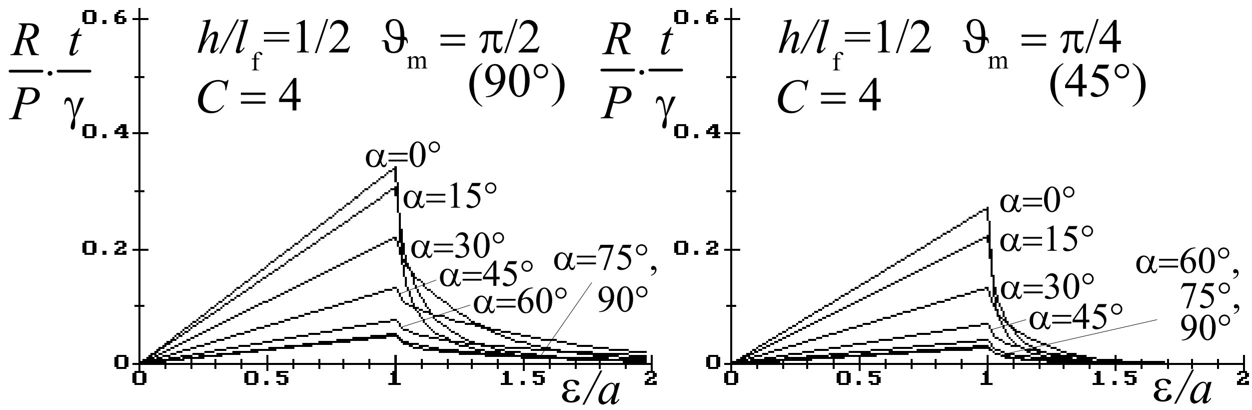

a) b)

obr. 41



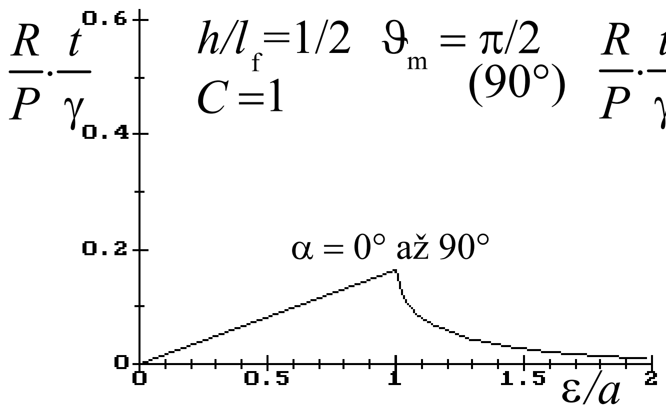

a) b)

obr. 42

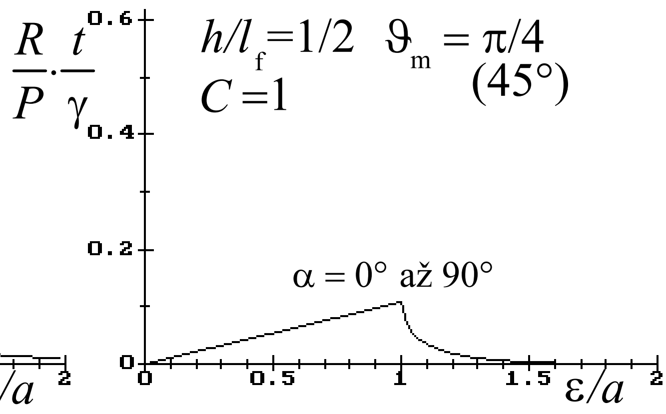



a) b)

obr. 43




a)




b)

obr. 44

**Nelineární tahové pracovní křivky vláken či velké deformace v čelistech.** Pro tyto případy nelze použít jednodušší rovnice varianty A. Je nutno vycházet z obecnějších vztahů, do nichž se zadává tahová pracovní křivka vláken $\sigma(\varepsilon_l)$ a poměrné prodloužení vlákna $\varepsilon_l$ se počítá obecněji - viz např. rov. (466), (473) nebo (511) či (514a) až (514d).

**Vliv upínací délky vlákna.** Na počátku je vlákno upnuto v délce $l = h/\cos\vartheta$, závisející na $\vartheta$ - viz kap. 4.1, obr. 27 a vztah (427). Ve statích 1 a 2 je však ukázáno, že pevnost, tažnost a nejobecněji i tvary tahových pracovních křivek závisejí na upnuté délce. Místo $\sigma(\varepsilon_l)$ musíme proto zadat obecnější funkci $\sigma(\varepsilon_l, l)$. (Funkce závisí na $\vartheta$ i prostřednictvím $l = h/\cos\vartheta$.)

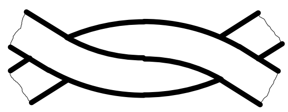
**Vliv variability tahové pracovní křivky vláken.** Mají-li použitá vlákna významnou variabilitu pevnosti a tažnosti, lze se na jednu soustavu multiaxiální textilie dívat jako na svazek rovnoběžných vláken, popsaný v kap. 3. Ve funkci tahové pracovní křivky vlákna pak můžeme použít tahovou pracovní křivku svazku vláken (přepočtenou na jedno vlákno).

**Další vlivy** lze zahrnout jen výraznějšími změnami dosud popsaných modelů. Takové problémy přináší např. **tření a jiné interakce mezi vlákny** (vlákna mezi čelistmi na sebe navzájem působí třecími silami a to i poté, je-li vlákno přetrženo či není-li staplové vlákno sevřeno oběma čelistmi), **navlnění vláken a jeho distribuce** (navlněná vlákna se chovají jakoby měla jakousi jinou, "zdánlivou" tahovou pracovní křivku a distribuce navlnění způsobuje variabilitu této "zdánlivé" tahové pracovní křivky - efekt je podobný jako vliv variace tažnosti u svazku vláken v kap. 3), **malé množství vláken v čelistech a nehomogenita textilie** (je nutno řešit vztah mezi chováním náhodného výběrového souboru vláken v čelistech a "průměrným" chováním textilie).

# 5. KONTAKTY MEZI VLÁKNY A STLAČOVÁNÍ VLÁKENNÉHO MATERIÁLU V JEDNÉ A DVOU DIMEZÍCH

## 5.1 Teorie kontaktů mezi vlákny podle C.M. van Wyka

**Pojem kontaktu.** Ve vlákenném útvaru se vlákna navzájem dotýkají. Jejich styk, znázorněný na obr. 44, nazveme **kontaktem**. Místo na povrchu vlákna, jímž se dotýká jiného vlákna nazveme **kontaktním místem**. Jeden kontakt je tedy tvořen dvěma kontaktními místy.

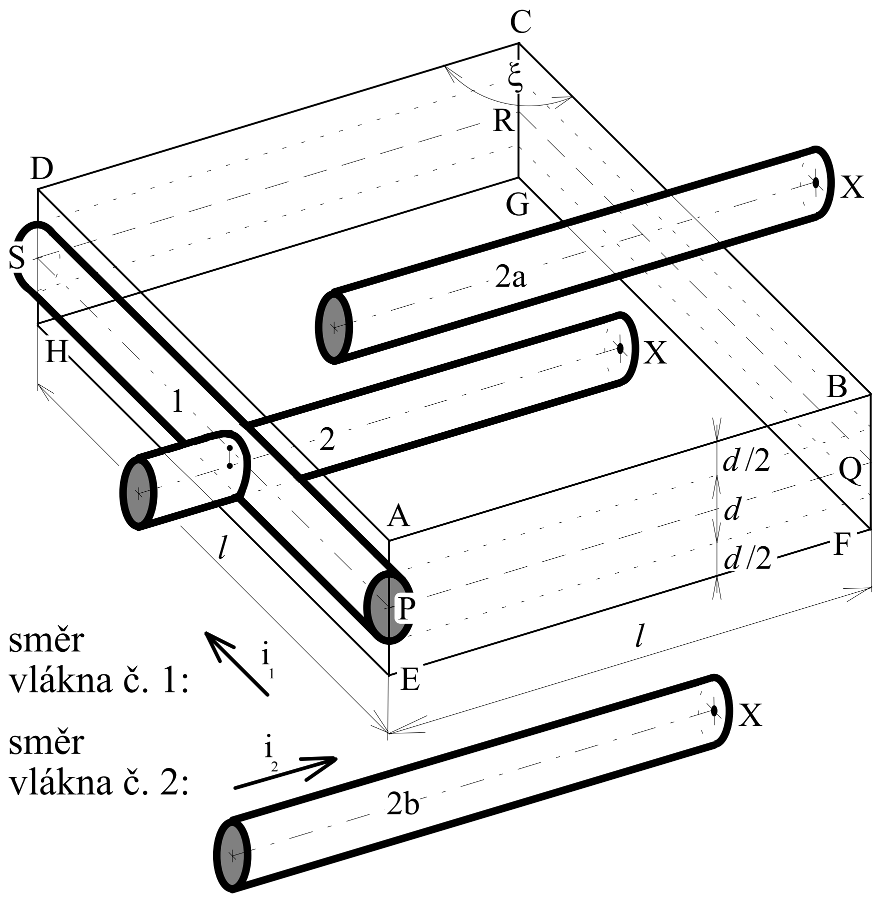


obr. 44

Prostřednictvím kontaktů se z vlákna na vlákno přenášejí síly, které vznikají při deformování (např. stlačování) vlákenného útvaru. Počet kontaktů je ovšem proměnlivý. Intuitivně je zřejmé, že čím vyšší je zaplnění vlákenného útvaru, tím větší je i počet kontaktů v něm.

**Základní idea** C.M. VAN WYKA [6]. Zaveďme zjednodušující *předpoklad:* **textilie je vytvořena z rovných** (přímkových) **vláken válcového tvaru, stejné délky** $l$ **a průměru** $d$.

Umístění každého vlákna v prostoru je popsáno:




obr. 45

*1)* **Směrem**, tj. *sférickými souřadnicemi* jednotkového směr. vektoru $\mathbf{i} \equiv (1, \vartheta, \varphi)$. (Viz část A, kap. 4.1. Definiční obor - tj. $\vartheta \in (0, \pi/2)$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$ - je souhrnně označován symbolem ω.)

*2)* **Polohou**, tj. prostorovými souřadnicemi nějakého bodu vlákna (např. krajního bodu jeho osy).

Uvažujme **dvě vlákna** (č. 1 a č. 2), jejichž **směr známe**, tj. známe jednotkové vektory $\mathbf{i_1} \equiv (1, \vartheta_1, \varphi_1)$ a $\mathbf{i_2} \equiv (1, \vartheta_2, \varphi_2)$ - obr. 45.

**Vlákno č. 1 má v prostoru danou polohu** - např. jako na obr. 45. Naproti tomu **vlákno č. 2 je umístěno v prostoru náhodně**.

Pro následující úvahy nahraďme hmotná vlákna ideální geometrickou představou **nehmotných válců**. V některých polohách náhodného umístění válce č. 2 (např. 2a či 2b na obr. 45) nebudou mít válce žádný společný bod. Jindy (např. při umístění do polohy 2) vznikne znázorněný **průniku válců**.

U hmotných vláken ovšem průnik nastat nemůže. Mělo-li by nastat takové uspořádání, pak vlákna po sobě "sklouznou", vzájemně se nepatrně "posunou" a "pootočí" tak, že se nakonec dotýkají - jsou v kontaktu. Tuto základní ideu lze vyjádřit následujícím *předpokladem*: **Pravděpodobnost, že vlákna č. 1 a č. 2 budou v kontaktu je rovna pravděpodobnosti, že** (nehmotné) **válce č. 1 a č. 2 budou mít společný průnik**.

**Kosý hranol**, znázorněný na obr. 45, je užitečný pro vyjádření pravděpodobnosti kontaktu vláken. V prostoru je daným způsobem umístěn válec č. 1, a tedy i jeho osa PS. Z bodů P a S veďme ve směru vektoru $\mathbf{i}_2$ (směru válce č. 2) úsečky PQ a SR o délce $l$. Úsečka QR má rovněž délku $l$ a je rovnoběžná s PS. V bodě P vztyčíme kolmici k rovině PQRS a ve vzdálenosti $d$ (průměr válců) na obou stranách od bodu P vyznačíme body A a E. Podobně vytvoříme kolmice v bodech Q, R a S a nalezneme body B, F, dále C, G a D, H. Tak vznikne **kosý hranol** ABCDEFGH, kde úsečky AD, BC, EH, FG mají délku $l$ a směr vektoru $\mathbf{i}_1$, úsečky AB, DC, EF, HG mají rovněž délku $l$ a směr vektoru $\mathbf{i}_2$ a úsečky AE, BF, CG, DH mají délku $2d$ a jsou na všechny předchozí úsečky kolmé.

Jednotkové směrové vektory $\mathbf{i_1} \equiv (1, \vartheta_1, \varphi_1)$ a $\mathbf{i_2} \equiv (1, \vartheta_2, \varphi_2)$ svírají **neorientovaný úhel** $\mathrm{DCB} \equiv \xi$, který je funkcí sférických souřadnic těchto vektorů.

$$\xi = \xi(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2) \tag{581}$$

(Ze způsobu zavedení v části A, kap. 4.1 je zřejmé, že $\xi \in (0, \pi)$.)

Plocha kosočtverce ABCD či EFGH v obr. 45 je $l\,(l \sin\xi) = l^2 \sin\xi$ a objem kosého hranolu ABCDEFGH je

$$V_{1,2} = \mathrm{AE} \cdot \mathrm{ABCD} = 2d\, l^2 \sin\xi \tag{582}$$

**Pravděpodobnost kontaktu.** Válec č. 2 má sice známý směr (vektoru $\mathbf{i}_2$), ale je náhodně umístěn v prostoru. Na obr. 45 je jeho umístění popsáno polohou "koncového bodu" X jeho osy. Válce č. 1 a č. 2 **nemají společný průnik**, jestliže (ve smyslu obr. 45):

*a)* bod X leží *nad* rovinou ABCD (viz např. 2a) či *pod* rovinou EFGH (viz např. 2b),

*b)* bod X leží *vpravo* od roviny BCGF, nebo *vlevo* od roviny ADHE,[1)]

*c)* bod X leží *před* rovinou ABFE, nebo *za* rovinou DCHG.[1)]

Naopak, válce č. 1 a č. 2 **mají společný průnik**, leží-li bod X **uvnitř kosého hranolu** ABCDEFGH.

---

1) Představa je jenom **přibližná**, protože zanedbává zvláštnosti plynoucí z vlivu **konců** a **tloušťky** vláken. Např. bude-li bod X ležet právě v rovině PQRS a jenom"malý kousek" (menší než $d/2$) vpravo od roviny BCGF, či vlevo od roviny ADHE, pak k průniku dojde. Nepřesnost však není příliš významná, neboť většinou $d \ll l$.

Je-li celkový objem vlákenného útvaru $V_c$, je **pravděpodobnost průniku** válců č. 1 a č. 2 vyjádřena z **geometrické definice pravděpodobnosti** poměrem $P = V_{1,2}/V_c$. Užitím (582) pak

$$P = \frac{V_{1,2}}{V_c} = \frac{2d\,l^2 \sin\xi}{V_c} \tag{583}$$

(Přitom uvažujeme, že $V_c \gg V_{1,2}$, takže jevy na okraji vlákenného útvaru lze zanedbat.)

Podle základní ideje C.M. VAN WYKa, popsané v úvodu kapitoly, **veličina** $P$ **vyjadřuje** také **pravděpodobnost, že vlákna č. 1 a č. 2 budou ve vzájemném kontaktu**.

**Střední počet kontaktních míst na vlákně č. 1.** Uvažujme vlákenný útvar vytvořený **náhodným uspořádáním** $N$ rovných (přímkových) vláken s **hustotou pravděpodobnosti jejich směrového rozložení** $w(\vartheta,\varphi)$[1]. Budiž libovolně vybrané vlákno vláknem č. 1. Sférické souřadnice jeho směru označme $\vartheta = \vartheta_1$, $\varphi = \varphi_1$ (vektor $\mathbf{i_1} \equiv (1,\vartheta_1,\varphi_1)$).

Zbývajících $N_2 = N - 1$ vláken může chápat jako množinu vláken č. 2 se sférickými souřadnicemi směru $\vartheta = \vartheta_2$, $\varphi = \varphi_2$. *Předpokládáme-li*, že **počet vláken** $N$ **je velký**, pak směrové rozložení množiny vláken č. 2 popisuje stejná hustota pravděpodobnosti $w(\vartheta_2,\varphi_2)$. Zvolme jeden určitý směr, daný dvojicí hodnot $\vartheta_2,\varphi_2$ (vektorem $\mathbf{i_2} \equiv (1,\vartheta_2,\varphi_2)$). V množině vláken č. 2 je **relativní četnost**[2] těchto vláken vyjádřena výrazem $w(\vartheta_2,\varphi_2)\,\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2$ a jejich **absolutní četnost**[2] (počet) je

$$\mathrm{d}N_2 = (N-1)\,w(\vartheta_2,\varphi_2)\,\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2 \tag{584}$$

Vlákno č. 2, zvoleného směru, je v kontaktu s vláknem č. 1 s pravděpodobností, vyjádřenou výrazem (583). **Střední počet kontaktních míst na vlákně č. 1 od vláken zvoleného směru** je proto $\mathrm{d}m_1 = P\,\mathrm{d}N_2$ [3] a dosazením (583) a (584) vznikne

$$\mathrm{d}m_1 = P\,\mathrm{d}N_2 = \frac{2d\,l^2\sin\xi}{V_c}(N-1)\,w(\vartheta_2,\varphi_2)\,\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2 = \\ = \frac{2d\,l^2(N-1)}{V_c}\sin\xi\; w(\vartheta_2,\varphi_2)\,\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2 \tag{585}$$

"Šanci" vytvořit kontakty s vláknem č. 1 má nejen skupina vláken s právě zvoleným směrem $\mathbf{i_2} \equiv (1,\vartheta_2,\varphi_2)$, ale i všechna vlákna jiných směrů. **Střední počet kontaktních míst na vlákně č. 1 od množiny všech vláken č. 2** nalezneme integrací ("sečtením") hodnot $\mathrm{d}m_1$ přes všechny možné úhly.

$$m_1 = \iint_{\omega_2} \frac{2d\,l^2(N-1)}{V_c}\sin\xi\; w(\vartheta_2,\varphi_2)\,\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2 = \\ = \frac{2d\,l^2(N-1)}{V_c}\iint_{\omega_2}\sin\xi\; w(\vartheta_2,\varphi_2)\,\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2 \qquad \text{kde } \omega_2\text{: } \vartheta_2 \in (0,\pi/2) \text{ a } \varphi_2 \in (0,2\pi) \tag{586}$$

1) Použito označení shodné s částí A, kap. 4.3.

2) Přesněji, jedná se o relativní či absolutní četnost vláken, jejichž sférické souřadnice směrů leží v diferenciálních intervalech $(\vartheta_2, \vartheta_2 + \mathrm{d}\vartheta_2)$ a $(\varphi_2, \varphi_2 + \mathrm{d}\varphi_2)$.

3) C.M. VAN WYK vychází ze zjednodušujícího *předpokladu*, že **při vzniku více kontaktů s vláknem č. 1 si vlákna č. 2 vzájemně "nepřekážejí"**. Ve skutečnosti se s každým dalším kontaktem pravděpodobnost $P$ zmenšuje.

**Počet kontaktních míst ve vlákenném útvaru.** Dosavadní úvahy vedly k určení středního počtu kontaktních míst na jednom konkrétním, libovolně zvoleném vlákně č. 1. Kdybychom zvolili jako č. 1 jiné vlákno, mělo by obecně jinou polohu v prostoru a jiné sférické souřadnice $\vartheta_1, \varphi_1$ (vektor $\mathbf{i_1} \equiv (1, \vartheta_1, \varphi_1)$). Množina vláken z níž lze vybrat vlákno č. 1 je množinou všech vláken tvořících uvažovaný vlákenný útvar. **Hustota pravděpodobnosti rozložení směru vláken č. 1** je tedy $w(\vartheta_1, \varphi_1)$.

Zvolme jeden určitý směr, daný dvojicí hodnot $\vartheta_1, \varphi_1$ (vektorem $\mathbf{i}_1 \equiv (1, \vartheta_1, \varphi_1)$). V množině vláken č. 1 je **relativní četnost** vláken tohoto směru vyjádřena výrazem $w(\vartheta_1, \varphi_1)\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\varphi_1$ a jejich **absolutní četnost** (počet) je

$$\mathrm{d}N_1 = N\, w(\vartheta_1, \varphi_1)\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\varphi_1 \tag{587}$$

Na každém vlákně je střední počet $m_1$ kontaktních míst, takže **na všech vláknech zvoleného směru je** $\mathrm{d}m = m_1 \mathrm{d}N_1$ **kontaktních míst**. Užitím (586) a (587) nalezneme vztah

$$\mathrm{d}m = m_1\mathrm{d}N_1 = \left[\frac{2d\, l^2 (N-1)}{V_\mathrm{c}} \iint_{\omega_2} \sin\xi\; w(\vartheta_2, \varphi_2)\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2\right]\left[N\, w(\vartheta_1, \varphi_1)\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\varphi_1\right] =$$

$$= \frac{2d\, l^2 N(N-1)}{V_\mathrm{c}} w(\vartheta_1, \varphi_1)\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\varphi_1 \left[\iint_{\omega_2} \sin\xi\; w(\vartheta_2, \varphi_2)\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2\right] \tag{588}$$

kde $\omega_2\!: \ \vartheta_2 \in (0, \pi/2)$ a $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$

Ve vlákenném útvaru jsou kontaktní místa na vláknech všech možných směrů. **Počet** $m$ **kontaktních míst v celém vlákenném útvaru** je proto integrálem ("součtem") hodnot $\mathrm{d}m$ přes všechny možné směry vláken č. 1.

$$m = \iint_{\omega_1} \left\{\frac{2d\, l^2 N(N-1)}{V_\mathrm{c}} w(\vartheta_1, \varphi_1)\left[\iint_{\omega_2} \sin\xi\; w(\vartheta_2, \varphi_2)\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2\right]\right\}\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\varphi_1 =$$

$$= \frac{2d\, l^2 N(N-1)}{V_\mathrm{c}} \iint\iint_{\omega_1,\, \omega_2} \sin\xi\; w(\vartheta_1, \varphi_1)\, w(\vartheta_2, \varphi_2)\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\varphi_1\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2 \tag{589}$$

kde $\omega_1\!: \ \vartheta_1 \in (0, \pi/2)$ a $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$, $\omega_2\!: \vartheta_2 \in (0, \pi/2)$ a $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$

Čtyřnásobný integrál z posledního výrazu lze užitím (581) zapsat ve formě

$$I = \iint\iint_{\omega_1,\, \omega_2} \sin\left[\xi(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)\right]\, w(\vartheta_1, \varphi_1)\, w(\vartheta_2, \varphi_2)\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\varphi_1\mathrm{d}\vartheta_2\mathrm{d}\varphi_2 \tag{590}$$

kde $\omega_1\!: \vartheta_1 \in (0, \pi/2)$ a $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$, $\quad \omega_2\!: \vartheta_2 \in (0, \pi/2)$ a $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$

Odtud je zřejmé, že **hodnota určitého integrálu** $I$ **závisí pouze na hustotě pravděpodobnosti směrového rozložení vláken** $w$. Veličina $I$ je **statistickou charakteristikou** tohoto rozložení.

**Počet kontaktů ve vlákenném útvaru.** Vznikne-li mezi dvěma vlákny kontakt, jsou kontaktní místa na obou vláknech. Jinak řečeno, jeden kontakt je tvořen dvěma kontaktními místy. **Počet kontaktů v celém vlákenném útvaru** je tedy polovinou počtu kontaktních míst

$$n = m/2 \tag{591}$$

Užitím (589) a (590) nalezneme pro počet kontaktů formálně jednoduchý výraz

$$n = \frac{m}{2} = \frac{d\, l^2 N(N-1)}{V_c} I \tag{592a}$$

Uvažovaný vlákenný útvar je dle předpokladu vytvořen z velkého počtu vláken ($N$ je velké), a proto přibližně platí $N(N-1) \cong N^2$. **Počet kontaktů v celém vlákenném útvaru** je pak možno zapsat ve tvaru

$$n = \frac{d\, l^2 N^2}{V_c} I \tag{592}$$

**Hustota kontaktů.** Uvažovaný vlákenný útvar obsahuje $N$ rovných (přímkových) válcových vláken o průměru $d$ a délce $l$. Objem vláken ve vlákenném útvaru je $V = N\left(\pi d^2/4\right) l$. **Celkový objem vlákenného útvaru** $V_c$ vyjádříme užitím jeho zaplnění $\mu$ ve tvaru

$$V_c = \frac{V}{\mu} = \frac{N\left(\pi d^2/4\right) l}{\mu} = \frac{N \pi d^2 l}{4\mu} \tag{593}$$

**Hustota kontaktů** vyjadřuje počet kontaktů, obsažený v jednotce objemu vlákenného útvaru, $\upsilon = n/V_c$. Užitím (592) a (593) vznikne výraz

$$\upsilon = \frac{n}{V_c} = \frac{d\, l^2 N^2}{V_c^2} I = d\, l^2 N^2 I \frac{16\mu^2}{N^2 \pi^2 d^4 l^2} = \frac{16 I}{\pi^2 d^3} \mu^2 \tag{594}$$

nebo, zavedeme-li **parametr** $k_\upsilon$ vztahem

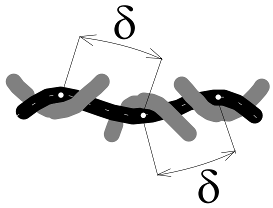
$$k_\upsilon = \frac{16 I}{\pi^2 d^3} \tag{595}$$

nalezneme

$$\upsilon = k_\upsilon \mu^2 \tag{596}$$

(Parametr $k_\upsilon$ závisí na průměru $d$ použitých vláken a prostřednictvím $I$ také na jejich směrovém uspořádání.)

**Střední vzdálenost kontaktních míst na vlákně.** Na obr. 46 je znázorněna část černého vlákna s dotýkajícími se vlákny šedými. Mezi "sousedními" kontaktními místy na černém vlákně nalézáme různě velké vzdálenosti $\delta$ (**měřené podél osy** vlákna). **Střední vzdálenost** $\bar{\delta}$ (sousedních) **kontaktních míst na vláknech** nalezneme jako podíl úhrnné délky $Nl$ všech vláken a počtu $m$ všech kontaktních míst ve vlákenném útvaru. Užitím (591), (592) a (593) vznikne vztah



obr. 46

$$\bar{\delta} = \frac{Nl}{m} = \frac{Nl}{2n} = \frac{Nl}{2\dfrac{d\, l^2 N^2}{V_c} I} = \frac{Nl}{2d\, l^2 N^2 I} V_c = \frac{Nl}{2d\, l^2 N^2 I} \frac{N\pi d^2 l}{4\mu} = \frac{\pi d}{8I} \frac{1}{\mu} \tag{597}$$

nebo, zavedeme-li **parametr** $k_\delta$ vztahem

$$k_\delta = \frac{\pi d}{8I} \tag{598}$$

můžeme vyjádřit

$$\overline{\delta} = \frac{k_\delta}{\mu} \tag{599}$$

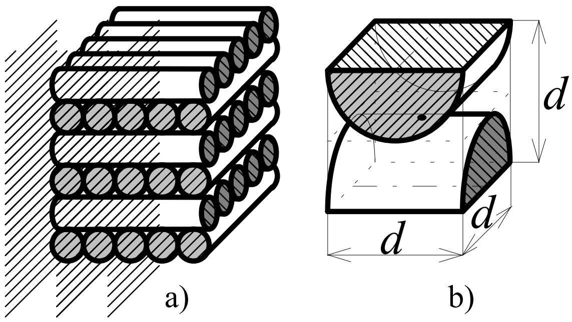
(Také $k_\delta$ závisí na průměru $d$ vláken a prostřednictvím $I$ na jejich směrovém uspořádání.)

Poznamenejme, že užitím (595) a (598) lze nalézt vztah mezi parametry $k_\upsilon$ a $k_\delta$.

$$k_\upsilon k_\delta = \frac{16I}{\pi^2 d^3}\frac{\pi d}{8I} = \frac{1}{2}\frac{4}{\pi d^2} = \frac{1}{2s} \tag{600}$$

($s = \pi d^2/4$ je plocha průřezu vlákna.)

**Příklady.** Orientační hodnoty vyplývající z předchozích vztahů ilustrujme dvěma příklady. V **1. příkladě** uvažujme speciální, pravidelné uspořádání vláken znázorněné na obr. 47a).




obr. 47

Taková struktura je tvořena opakujícími se strukturními jednotkami ve tvaru krychle s hranou odpovídající průměru vlákna $d$ - viz obr. 47b). Celkový objem strukturní jednotky je $V_c = d^3$. Objem vláken v ní je dán dvěma polovinami vlákna o délce $d$, tj. objemem vlákna délky $d$; $V = \left(\pi d^2/4\right)d = \pi d^3/4$. Zaplnění strukturní jednotky je $\mu = V/V_c = \left(\pi d^3/4\right)/d^3 = \pi/4 \ (\cong 0{,}785)$. Ve strukturní jednotce je právě 1 kontakt, takže hustotu kontaktů je $\upsilon = 1/d^3$. Užitím vypočítaných hodnot v (594) nalezneme $\upsilon = 1/d^3 = \left[16I/\left(\pi^2 d^3\right)\right]\left[\pi/4\right]^2 = I/d^3$ a odtud $\boldsymbol{I} = \mathbf{1}$. (K témuž výsledku dospějeme uvědomíme-li si, že vlákna v kontaktech svírají jen pravé úhly $\xi = \pi/2$ a v integrované funkci (590) je stále $\sin\xi = 1$.)

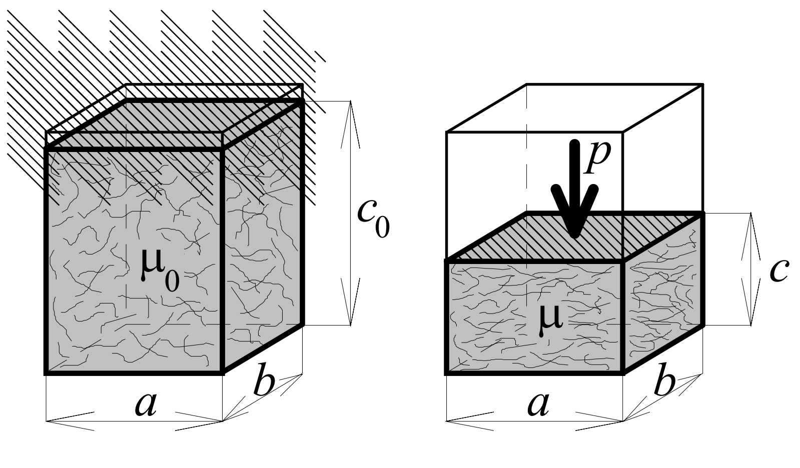
Uvažujme např. polyesterová vlákna s hustotou $\rho = 1360\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ o jemnosti $t = 0{,}17\,\mathrm{tex}$. Jejich průměr je $d_{[\mathrm{mm}]} = \sqrt{4t_{[\mathrm{tex}]}/\left(\pi\rho_{[\mathrm{kg\,m^{-3}}]}\right)} = \sqrt{4\cdot 0{,}17/(\pi\cdot 1360)} = 0{,}012616\,\mathrm{mm}$. Hodnotu para-metru $k_\upsilon$ nalezneme z (595); $\boldsymbol{k}_{\upsilon[\mathrm{mm^{-3}}]} = 16I/\left(\pi^2 d^3_{[\mathrm{mm}]}\right) = 16\cdot 1/\left(\pi^2 0{,}012616^3\right) = \mathbf{807338\,mm^{-3}}$. Pro méně zaplněnou strukturu (s pravoúhlým křížením vláken v kontaktech) nalezneme hustoty kontaktů z rovnice (596). Např. pro zaplnění 0,5 (typicky příze) je $\upsilon_{[\mathrm{mm^{-3}}]} = k_{\upsilon[\mathrm{mm^{-3}}]}\mu^2 = 807338\cdot 0{,}5^2 = 201835\,\mathrm{mm^{-3}}$, pro zaplnění 0,3 je podobně $\upsilon = 72660\,\mathrm{mm^{-3}}$, pro zaplnění 0,1 je $\upsilon = 8073\,\mathrm{mm^{-3}}$, pro zaplnění 0,01 (orientačně vata) je hustota kontaktů "jen" $\upsilon = 80{,}73\,\mathrm{mm^{-3}}$.

V **2. příkladě** uvažujme vlákenný útvar s ryze náhodnou (prostorově isotropní) orientací vláken. Hustota pravděpodobnosti směrového rozložení vláken je dle části A, kap. 4.3, rov. (88) dána vztahem $w(\vartheta,\varphi) = \sin\vartheta/(2\pi)$.

Ve sférických souřadnicích určuje směr vlákna č.1 jednotkový vektor $\mathbf{i_1} \equiv (1, \vartheta_1, \varphi_1)$. Kartézské souřadnice tohoto vektoru nalezneme užitím rovnice (59) z části A, kap.4.1. Platí $\mathbf{i}_1 \equiv (\sin\vartheta_1\cos\varphi_1, \sin\vartheta_1\sin\varphi_1, \cos\vartheta_1)$. Podobně pro jednotkový směrový vektor vlákna č. 2, $\mathbf{i_2} \equiv (1, \vartheta_2, \varphi_2)$, platí v kartézských souřadnicích $\mathbf{i}_2 \equiv (\sin\vartheta_2\cos\varphi_2, \sin\vartheta_2\sin\varphi_2, \cos\vartheta_2)$. Skalární součin těchto dvou jednotkových vektorů je kosinem úhlu $\xi$, který spolu svírají. Platí tedy vztah $\cos\xi = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 = \sin\vartheta_1\cos\varphi_1\sin\vartheta_2\cos\varphi_2 + \sin\vartheta_1\sin\varphi_1\sin\vartheta_2\sin\varphi_2 + \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2$ a přirozeně též $\sin\xi = \sqrt{1-\cos^2\xi} = \left[1-\left(\sin\vartheta_1\cos\varphi_1\sin\vartheta_2\cos\varphi_2 + \sin\vartheta_1\sin\varphi_1\sin\vartheta_2\sin\varphi_2 + \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\right)^2\right]^{1/2}$ (úhel $\xi$ je zaveden jako neorientovaný). V daném příkladě má určitý integrál (590) konkrétní tvar $I = \iint\limits_{\omega_1,\,\omega_2}\iint\left[1-\left(\sin\vartheta_1\cos\varphi_1\sin\vartheta_2\cos\varphi_2 + \sin\vartheta_1\sin\varphi_1\sin\vartheta_2\sin\varphi_2 + \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\right)^2\right]^{1/2}\dfrac{\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2}{4\pi^2}\cdot$ $\cdot d\vartheta_1 d\varphi_1 d\vartheta_2 d\varphi_2$, kde $\omega_1 : \vartheta_1 \in (0,\pi/2)$ a $\varphi_1 \in (0,2\pi)$, $\omega_2 : \vartheta_2 \in (0,\pi/2)$ a $\varphi_2 \in (0,2\pi)$. Jeho numerickým řešením se nalezneme hodnota $\boldsymbol{I} = \mathbf{0,7854}$. Pro dříve uvažovaná polyesterová vlákna ($d = 0,012616\,\text{mm}$) vypočteme z (595) $\boldsymbol{k}_{\upsilon\left[\text{mm}^{-3}\right]} = 16I\big/\left(\pi^2 d^3_{[\text{mm}]}\right) = 16\cdot 0,7854\big/\left(\pi^2\, 0,012616^3\right) =$ $= \mathbf{634083\,mm^{-3}}$. Podle (596) nalezneme např. pro zaplnění 0,5 (typicky příze) hustotu kontaktů $\upsilon_{\left[\text{mm}^{-3}\right]} = k_{\upsilon\left[\text{mm}^{-3}\right]}\mu^2 = 634083\cdot 0,5^2 = 158521\,\text{mm}^{-3}$, pro zaplnění 0,3 podobně $\upsilon = 57067\,\text{mm}^{-3}$, pro zaplnění 0,1 je $\upsilon = 6341\,\text{mm}^{-3}$ a pro zaplnění 0,01 (orientačně např. vata) je $\upsilon = 63,41\,\text{mm}^{-3}$.

## 5.2 Jednodimenzionální deformace vlákenného materiálu

**Výchozí předpoklady.** Stlačování vlákenného útvaru je obecně velmi složitým procesem, v němž probíhají reologické jevy, dochází k nejrůznějším formám disipace energie, probíhá restrukturalizace vlákenného úvaru atd. Následující model **jednoosého stlačování** vlákenného útvaru dle C.M. VAN WYKa [6] je proto jen dílčím řešením celé problematiky.



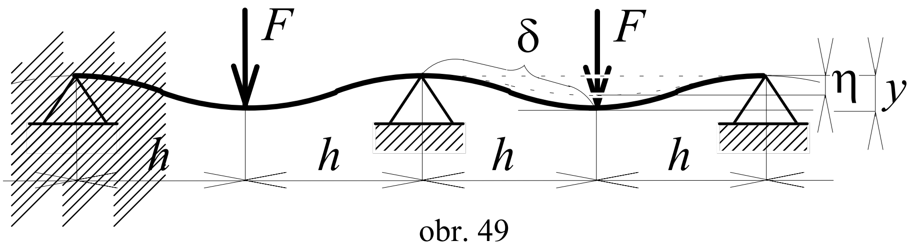
a) b)

obr. 48

Uvažujme **dokonale tuhou krabičku** (box), naplněnou do výšky $c_0$ nestlačeným vlákenným materiálem s **výchozím zaplněním** $\mu_0$ - obr. 48a). Následným působením tlaku $p$ se vlákenný útvar stlačí - obr. 48b). Rozměry $a$, $b$ se vzhledem k tuhosti krabičky nezmění, výška $c_0$ se zmenší na hodnotu $c$.

Při stlačování vlákenného materiálu jsou vlákna namáhána složitým způsobem. Zřejmě nejpodstatnější je deformace ohybová, a proto se zavádí zjednodušující *předpoklad 1:* **Stlačování způsobuje pouze ohybové deformace vláken**.

Klasickou úlohou technické mechaniky je řešení ohybové deformace **pravidelně zatíženého** (silami $F$) **nekonečného nosníku** s pravidelně rozmístěnými podporami (ve vzdálenosti $2h$).



obr. 49

Úlohu ukazuje obr. 49. Tradiční řešení je založeno na řadě předpokladů (Hookeův zákon, malé deformace aj.). Využitím třímomentové (Clapeyronovy) věty byl nalezen **vztah mezi působící silou** $F$ **a průhybem** $y$

$$F = k_F \frac{y}{h^3} \qquad k_F \ldots \text{parametr (vliv Youngova modulu a momentu setrvačnosti průřezu)} \tag{601}$$

a **vztah pro výpočet délky ohybové čáry** δ (obr. 49).

$$\delta = hf\left(\frac{y}{h}\right) \qquad f \ldots \text{monotónně rostoucí funkce (vliv Youngova modulu a momentu setrvačnosti průřezu)} \tag{602}$$

V popisovaném modelu stlačování vlákenného materiálu se zavádí zjednodušující *předpoklad 2:* **Vlákna ve stlačovaném vlákenném útvaru mají tvar pravidelně zatížených nekonečných nosníků a platí pro ně rovnice odvozené z teorie nosníků v technické mechanice**, zejména rovnice (601) a (602).

Zavádí se ještě zjednodušující *předpoklad 3:* **Délku ohybové čáry** δ na obr. 49 **lze chápat jako střední délku vlákna mezi sousedními kontakty** $\overline{\delta}$**, odvozenou v předešlé kapitole** a zjednodušující *předpoklad 4*: **Stlačováním vlákenného materiálu se hustota pravděpodobnosti směrového uspořádání vláken** $w$ významně **nemění**. Podle (590) se pak stlačováním nemění ani veličina $I$ a podle (598) se nemění ani veličina $k_\delta$. Při užití (599) se tedy předpokládá platnost vztahu

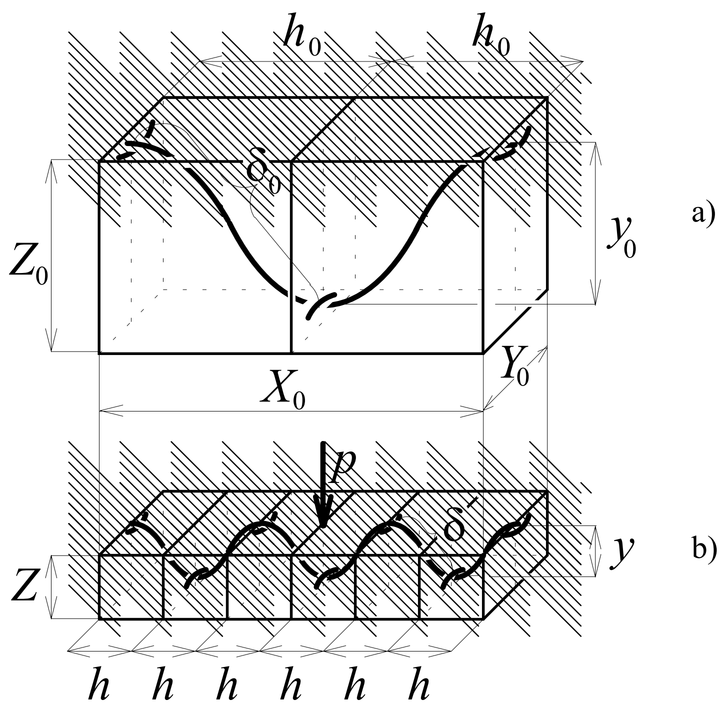
$$\delta = \overline{\delta} = \frac{k_\delta}{\mu} \qquad k_\delta \ldots \text{parametr materiálu} \tag{603}$$

Konečně zavádíme zjednodušující *předpoklad 4:* **Při stlačování se objem ani délka vláken nemění**.

**Idealizovaná strukturní jednotka.** Zjednodušeně si lze představit, že výchozí vlákenný útvar na obr. 48a) je složen z mnoha opakujících se **strukturních jednotek** znázorněných na obr. 50a). (Veličiny výchozího stavu budou značeny indexem 0, veličiny stlačeného stavu bez indexu.) Rozměry **výchozí strukturní jednotky** jsou $X_0, Y_0, Z_0$, její objem je $V_{c,0} = X_0 Y_0 Z_0$. Uvnitř strukturní jednotky je úsek vlákna ve tvaru části nekonečného, pravidelně zatíženého nosníku. Objem tohoto úseku označme $V$. **Výchozí zaplnění** $\mu_0$ je pak

$$\mu_0 = \frac{V}{V_{c,0}} = \frac{V}{X_0 Y_0 Z_0} \tag{604}$$

Úsek vlákna ve strukturní jednotce je tvořen jednotlivými **segmenty**, tj. částmi vlákna mezi sousedními kontakty. **Horizontální vzdálenost sousedních kontaktních míst** je $h_0$, **délka segmentu** ("délka ohybové čáry", střední délka vlákna mezi sousedními kontakty) je $\delta_0$ a **průhyb** je $y_0$.



obr. 50

Působením **tlaku** $p$ na vyšrafovanou plochu se výchozí strukturní jednotka stlačí do stavu dle obr. 50b). "Příčné" rozměry vlákenného útvaru se při jednoosé deformaci nemění - viz též obr. 48, a proto se nemění ani "příčné" rozměry $X_0, Y_0$ strukturní jednotky. Na-proti tomu výchozí rozměr $Z_0$ se působením tlaku $p$ zmenší na hodnotu $Z$ - viz obr. 50b). Protože objem vlákenného úseku je dle předpokladu 5 stále stejný, lze **zaplnění** $\mu$ **stlačené strukturní jednotky** vyjádřit vztahem

$$\mu = \frac{V}{X_0 Y_0 Z} \qquad (605)$$

Z porovnání rovnic (604) a (605) nalezneme relaci

$$V = \mu_0 X_0 Y_0 Z_0 = \mu X_0 Y_0 Z \qquad \mu_0 Z_0 = \mu Z \qquad Z = Z_0 \frac{\mu_0}{\mu} \qquad (606)$$

(Je-li $Z < Z_0$, je $\mu > \mu_0$.)

Stlačením se zaplnění strukturní jednotky zvětší a v důsledku toho se zvětší i počet kontaktních míst na vlákenném úseku. Délka segmentu se ve shodě s (603) zmenší z $\delta_0$ na $\delta$ a horizontální vzdálenost sousedních kontaktních míst se zmenší z $h_0$ na $h$ - obr. 50.

Počet segmentů ve výchozí strukturní jednotce je dle obr. 50a) $X_0/h_0$, délka celého vlákenného úseku je $(X_0/h_0)\,\delta_0$. Podobně z obr. 50b) nalezneme pro počet segmentů ve stlačené strukturní jednotce výraz $X_0/h$ a pro délku celého vlákenného úseku výraz $(X_0/h)\,\delta$. Podle předpokladu 5 se však délka vlákna stlačováním nemění, a proto platí vztah

$$\left(\frac{X_0}{h_0}\right)\delta_0 = \left(\frac{X_0}{h}\right)\delta \qquad \frac{h}{h_0} = \frac{\delta}{\delta_0} \qquad (607)$$

Pro segment vlákna ve stlačené strukturní jednotce platí podle předpokladu 2 vztah (602), tj. $\delta = h\, f(y/h)$ a pro segment vlákna ve výchozí strukturní jednotce platí analogicky vztah $\delta_0 = h_0\, f(y_0/h_0)$. Z poměru obou rovnic za užití (607) nalezneme

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{h\, f(y/h)}{h_0\, f(y_0/h_0)} = \frac{\delta}{\delta_0}\,\frac{f(y/h)}{f(y_0/h_0)} \qquad 1 = \frac{f(y/h)}{f(y_0/h_0)} \qquad f\left(\frac{y}{h}\right) = f\left(\frac{y_0}{h_0}\right) \qquad (608a)$$

Protože funkce $f$ je monotónní, je rovnice (608a) splněna jenom tehdy, platí-li

$$\frac{y}{h} = \frac{y_0}{h_0} \qquad \frac{y}{y_0} = \frac{h}{h_0} \qquad (608)$$

Ve stlačené strukturní jednotce je délka segmentu δ vyjádřena rovnicí (603), tj. rovnicí $\delta = k_\delta/\mu$. Analogicky pro délku segmentu $\delta_0$ ve výchozí strukturní jednotce platí rovnice $\delta_0 = k_\delta/\mu_0$. Užitím těchto vztahů a rovnic (607) a (608) nalezneme následující výrazy.

$$\frac{y}{y_0} = \frac{h}{h_0} = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{k_\delta/\mu}{k_\delta/\mu_0} = \frac{\mu_0}{\mu} \tag{609}$$

a odtud

$$y = y_0 \frac{\mu_0}{\mu} \tag{610}$$

$$h = h_0 \frac{\mu_0}{\mu} \tag{611}$$

Ve stlačené strukturní jednotce má segment vlákna (s průměrem vlákna $d$) objem

$$V_\delta = \delta \frac{\pi d^2}{4} \tag{612}$$

Objem celého úseku vlákna ve strukturní jednotce (výchozí i stlačené) je podle (604) $V = X_0 Y_0 Z_0 \mu_0$. **Počet segmentů vlákna ve stlačené strukturní jednotce** je pak $m_\delta = V/V_\delta$. Užitím výrazu pro $V$ a rovnic (612) a (603) nalezneme pro počet segmentů vztah

$$m_\delta = \frac{V}{V_\delta} = \frac{X_0 Y_0 Z_0 \mu_0}{\delta \dfrac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 X_0 Y_0 Z_0 \mu_0}{\pi d^2 \delta} = \frac{4 X_0 Y_0 Z_0 \mu_0}{\pi d^2} \frac{1}{\delta} = \frac{4 X_0 Y_0 Z_0 \mu_0}{\pi d^2} \frac{\mu}{k_\delta} \tag{613}$$

**Energie deformace.** Na obr. 49 síla $F$ vyvolala v úseku mezi podporami nekonečného nosníku, tj. v úseku o délce nosníku 2δ jistou deformační energii $E_{2\delta}$. Po přiložení síly se původně rovný nosník začal prohýbat. **Obecný průhyb** η se postupně zvětšoval z hodnoty 0 až na konečnou hodnotu $\eta = y$. Při obecném průhybu nosníku η působí ve shodě s (601) na nosník síla $F = k_F\, \eta/h^3$. V tomto okamžiku se zvětšením průhybu o dη zvětší **vyvolaná deformační energie** o $\mathrm{d}E_{2\delta} = F\,\mathrm{d}\eta$. Je-li konečná hodnota průhybu $\eta = y$, je celková vložená deformační energie dána rovnicí

$$E_{2\delta} = \int_{\eta=0}^{\eta=y} \mathrm{d}E_{2\delta} = \int_0^y F\,\mathrm{d}\eta = \int_0^y k_F \frac{\eta}{h^3}\mathrm{d}\eta = \frac{k_F}{h^3}\left(\frac{\eta^2}{2}\right)_0^y = \frac{k_F y^2}{2h^3} \tag{614}$$

V poloviční délce, tj. v délce δ - viz obr. 49 - je vyvolána deformační energie

$$E_\delta = \tfrac{1}{2} E_{2\delta} = \frac{1}{2}\frac{k_F y^2}{2h^3} = \frac{k_F y^2}{4h^3} \tag{615}$$

Podle předpokladu 2 je energie $E_\delta$ též **deformační energií v jednom segmentu vlákna** stlačené strukturní jednotky.

Celková **deformační energie ve stlačené strukturní jednotce** je dána součinem $E = E_\delta m_\delta$. Užitím (615) a (613) a úpravou s využitím (610) a (611) lze nalézt vztah

$$E = E_\delta m_\delta = \frac{k_F y^2}{4h^3} \frac{4 X_0 Y_0 Z_0 \mu_0 \mu}{\pi d^2 k_\delta} = k_F\, y^2 \frac{1}{h^3} \frac{X_0 Y_0 Z_0 \mu_0 \mu}{\pi d^2 k_\delta}$$

$$E = k_F \left( y_0 \frac{\mu_0}{\mu} \right)^2 \left( \frac{\mu}{h_0 \mu_0} \right)^3 \frac{X_0 Y_0 Z_0 \mu_0 \mu}{\pi d^2 k_\delta} = k_F \frac{y_0^2 \mu_0^2}{\mu^2} \frac{\mu^3}{h_0^3 \mu_0^3} \frac{X_0 Y_0 Z_0 \mu_0 \mu}{\pi d^2 k_\delta} =$$

$$= \frac{k_F y_0^2 X_0 Y_0 Z_0}{h_0^3 \pi d^2 k_\delta} \mu^2 \tag{616}$$

**Deformační energii** $E_{\delta,0}$ **výchozí strukturní jednotky** nalezneme dosazením $\mu = \mu_0$ do (616).

$$E_0 = \frac{k_F y_0^2 X_0 Y_0 Z_0}{h_0^3 \pi d^2 k_\delta} \mu_0^2 \tag{617}$$

**Přírůstek deformační energie** $\Delta E$, při němž strukturní jednotka na obr. 50 přejde z výchozího do stlačeného stavu, je dán rozdílem $\Delta E = E - E_0$. Po dosazení (616) a (617) nalezneme

$$\Delta E = E - E_0 = \frac{k_F y_0^2 X_0 Y_0 Z_0}{h_0^3 \pi d^2 k_\delta} \mu^2 - \frac{k_F y_0^2 X_0 Y_0 Z_0}{h_0^3 \pi d^2 k_\delta} \mu_0^2 = \frac{k_F y_0^2 X_0 Y_0 Z_0}{h_0^3 \pi d^2 k_\delta} \left( \mu^2 - \mu_0^2 \right) \tag{618}$$

**Vykonaná práce.** Stlačení strukturní jednotky na obr. 50 se uskutečnilo přiložením tlaku na vyšrafovanou plochu. Postupným zvyšováním tlaku se "výška" strukturní jednotky zmenšovala z výchozí hodnoty $Z_0$ až na konečnou hodnotu $Z$. Současně se zaplnění strukturní jednotky zvyšovalo z výchozí hodnoty $\mu_0$ na konečnou hodnotu $\mu$. Mezi výchozím a konečným stlačeným stavem strukturní jednotky, znázorněnými na obr. 50, prošla strukturní jednotka řadou **mezistavů**. V obecném mezistavu označme právě působící tlak symbolem $p^*$ ($p^* \in \langle 0, p \rangle$), okamžitou "výšku" strukturní jednotky symbolem $Z^*$ ($Z^* \in \langle Z_0, Z \rangle$) a okamžité zaplnění $\mu^*$ ($\mu^* \in \langle \mu_0, \mu \rangle$).

Při pohybu z výchozího do konečného stavu prošla horní vyšrafovaná plocha po **dráze**

$$\lambda = Z_0 - Z \tag{619}$$

a v obecném mezistavu prošla horní vyšrafovaná plocha po dráze

$$\lambda^* = Z_0 - Z^* \tag{620}$$

Přidáme-li v obecném mezistavu k působícímu tlaku $p^*$ elementární přírůstek d$p^*$, dráha horní vyšrafované plochy se zvětší o elementární přírůstek d$\lambda^*$ a vykoná se **elementární práce** $\mathrm{d}A = p^* X_0 Y_0 \mathrm{d}\lambda^*$. (Při jednoosé deformaci se velikost horní vyšrafované plochy $X_0 Y_0$ nemění, takže okamžitá působící **síla** je dána součinem $p^* X_0 Y_0$.) **Práce nutná na stlačení strukturní jednotky z výchozího do konečného stavu** je pak

$$A = \int_{\lambda^*=0}^{\lambda^*=\lambda} \mathrm{d}A = \int_0^\lambda p^* X_0 Y_0 \mathrm{d}\lambda^* = X_0 Y_0 \int_0^\lambda p^* \mathrm{d}\lambda^* \tag{621a}$$

Užijeme-li jako integrální substituci vztah (620) a značení dle (619), nalezneme výraz

$$A = X_0 Y_0 \int_0^\lambda p^* \mathrm{d}\lambda^* = -X_0 Y_0 \int_{Z_0}^{Z} p^* \mathrm{d}Z^* \tag{621}$$

$$\lambda^* = Z_0 - Z^*,\ \mathrm{d}\lambda^* / \mathrm{d}Z^* = -1,\ \mathrm{d}\lambda^* = -\mathrm{d}Z^*$$

Pro obecný mezistav strukturní jednotky platí rovnice (606) ve tvaru

$$Z^* = Z_0 \frac{\mu_0}{\mu^*} \tag{622}$$

Výraz je vhodnou substitucí v integrálu (621). Užitím (622) a (606) v (621) vznikne rovnice

$$A=-X_0Y_0\int_{Z_0}^{Z}p^*\mathrm{d}Z^*=-X_0Y_0\int_{\mu_0}^{\mu}p^*\left[-Z_0\frac{\mu_0}{\mu^{*2}}\mathrm{d}\mu^*\right]=X_0Y_0Z_0\mu_0\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{p^*}{\mu^{*2}}\mathrm{d}\mu^* \tag{623}$$

$$Z^*=Z_0\frac{\mu_0}{\mu^*},\quad \mathrm{d}Z^*=-Z_0\frac{\mu_0}{\mu^{*2}}\mathrm{d}\mu^*$$

**Tlak** $p^*$ v integrálu rov. (623) je **funkcí zaplnění** $\mu^*$, tj. zaplnění, jež má strukturní jednotka v daném mezistavu. V konečném stavu (při zaplnění $\mu^*=\mu$) nabývá tlak hodnoty $p^*=p$. Platí tedy

$$p^*=p^*\left(\mu^*\right)\qquad p=p^*\left(\mu\right) \tag{624}$$

**Závislost tlaku na zaplnění.** V mechanice je definován **konzervativní systém**, v němž přírůstek deformační energie je **roven** vykonané práci. Tradiční odvození rovnic pro pravidelně zatížený nekonečný nosník vychází z Hookeova zákona, který implicitně zahrnuje i předpoklad konzervativního systému. Ve formě užívaných rovnic (601) a (602) s blíže nespecifikovaným parametrem $k_\delta$ a funkcí $f$ - viz předpoklad 2 - však postačí i následující "volnější" *předpoklad:* **Vykonaná práce je úměrná přírůstku deformační energie**. Užitím (623), (618) a (624) pak nalezneme rovnice

$$A=C\Delta E$$

$$X_0Y_0Z_0\mu_0\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{p^*\left(\mu^*\right)}{\mu^{*2}}\mathrm{d}\mu^*=C\frac{k_Fy_0^2X_0Y_0Z_0}{h_0^3\pi d^2k_\delta}\left(\mu^2-\mu_0^2\right)$$

$$\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{p^*\left(\mu^*\right)}{\mu^{*2}}\mathrm{d}\mu^*=\frac{Ck_Fy_0^2}{h_0^3\pi d^2k_\delta\mu_0}\left(\mu^2-\mu_0^2\right)\ C\ge 1\ldots\text{konstanta úměrnosti} \tag{625}$$

Derivováním rovnice (625) podle proměnné $\mu$ při značení dle (624) vznikne výraz pro výpočet tlaku $p$. (Připomeňme, že obecně platí $\mathrm{d}\left\{\int_k^y f(x)\,\mathrm{d}x\right\}\Big/\mathrm{d}y=f(y)$.)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left\{\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{p^*\left(\mu^*\right)}{\mu^{*2}}\mathrm{d}\mu^*\right\}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left\{\frac{Ck_Fy_0^2}{h_0^3\pi d^2k_\delta\mu_0}\left(\mu^2-\mu_0^2\right)\right\}$$

$$\frac{p^*(\mu)}{\mu^2}=\frac{Ck_Fy_0^2}{h_0^3\pi d^2k_\delta\mu_0}2\mu\qquad \frac{p}{\mu^2}=\frac{2Ck_Fy_0^2}{h_0^3\pi d^2k_\delta\mu_0}\mu\qquad p=\frac{2Ck_Fy_0^2}{h_0^3\pi d^2k_\delta\mu_0}\mu^3 \tag{626}$$

Zlomek v předchozím vztahu je **souhrnným parametrem vlákenného materiálu**; označíme jej symbolem $k_p$.

$$k_p=\frac{2Ck_Fy_0^2}{h_0^3\pi d^2k_\delta\mu_0} \tag{627}$$

**Závislost tlaku na zaplnění** lze pak vyjádřit formálně jednoduchým vztahem

$$p=k_p\mu^3\qquad k_p\ldots\text{souhrnný parametr vlákenného materiálu} \tag{628}$$

Poslední výraz byl odvozen pro strukturní jednotku. Předpokládáme však, že z takových jednotek je vytvořen celý vlákenný útvar, a proto i **platnost rovnice** (628) **lze rozšířit na celý vlákenný útvar**.

Pro výchozí strukturu ($\mu = \mu_0$) vypočteme sice nepatrnou, ale přece jen kladnou hodnotu tlaku $k_p\mu_0^3 > 0$. (I ve výchozí strukturní jednotce je vlákno ohybově deformováno - viz obr. 50, takže síly v kontaktech nemohou být nulové.) Reálně je však ve výchozím stavu vlákenného útvaru $\mu = \mu_0 > 0$ a přitom $p = 0$. Příčiny tohoto jevu nebyly do modelu stlačování zahrnuty. (Např. výchozí vlákna nejsou přímková, velmi malé síly jsou eliminovány třením mezi vlákny aj.) C.M. VAN WYK [6] proto navrhnul následující **empirickou korekci** vztahu (628).

$$p = k_p\left(\mu^3 - \mu_0^3\right) \qquad k_p \ldots \text{souhrný parametr vlákenného materiálu} \tag{629}$$

Nabízí se také možnost **alternativní empirické korekce** vztahu (628) ve formě rovnice

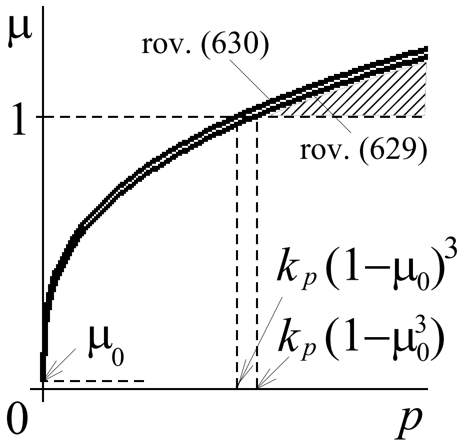
$$p = k_p\left(\mu - \mu_0\right)^3 \qquad k_p \ldots \text{souhrnný parametr vlákenného materiálu} \tag{630}$$

Vztah (629) či (630) poskytuje pro $\mu \gg \mu_0$ (hodnota $\mu_0$ je řádově kolem 0,01) prakticky stejné hodnoty jako rovnice (628). Při $\mu \to \mu_0$ se však tlak $p \to 0$, což je v souladu se skutečností.

*Poznámka:* Vztah (629) či (630) byl mnoha autory prakticky ověřen pro menší zaplnění (přibližně $\mu_0 \ll \mu < 0{,}3$) a to pro řadu různých materiálů.

## 5.3 Zobecněná závislost tlaku na zaplnění

**Nestlačitelné granule a idea zobecnění.** S rostoucím tlakem a zaplněním (přibližně nad $\mu = 0{,}3$) se výpočty dle vztahu (629) či (630) začínají významně odchylovat od skutečnosti. Z průběhu funkce (629) či (630) na obr. 51 je dokonce zřejmé, že tlakům $p > k_p\left(1-\mu_0^3\right)$ či $p > k_p\left(1-\mu_0\right)^3$ příslušejí hodnoty zaplnění $\mu > 1$ (viz vyšrafovaná oblast), což je reálně zcela nemožné. Podstatu problému lze snadněji odhalit, vyjádříme-li v rovnici (629) či (630) zaplnění $\mu = V/V_c$ a výchozí zaplnění $\mu_0 = V/V_{c,0}$, kde $V$ je objem vláken, $V_c$ je celkový objem vlákenného útvaru a $V_{c,0}$ je celkový objem vlákenného útvaru ve výchozím, nezatíženém stavu. Tak nalezneme z (629) rovnici



obr. 51

$$p = k_p\mu^3 - k_p\mu_0^3 = k_p\frac{V^3}{V_c^3} - k_p\frac{V^3}{V_{c,0}^3} \tag{629a}$$

nebo z (630) rovnici

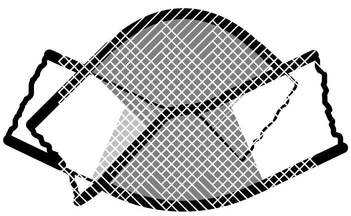
$$p = k_p\left(\mu - \mu_0\right)^3 = \left(\sqrt[3]{k_p}\frac{V}{V_c} - \sqrt[3]{k_p}\frac{V}{V_{c,0}}\right)^3 \tag{630a}$$

Na pravé straně těchto rovnic je jedinou proměnnou celkový objem vlákenného útvaru $V_c$ (při stlačování se $k_p$, $V$, $\mu_0$ ani $V_{c,0}$ nemění), a proto, roste-li $p$ nade všechny meze, celkový objem $V_c$ se blíží bez omezení k 0. Jinak řečeno, celkový objem $V_c$ lze bez omezení stlačovat. (V kap. 5.1 a 5.2 se totiž nepředpokládá, že by si vlákna nějakým způsobem vzájemně "překážela".)

Ve skutečnosti **stlačovat objem vlákenného útvaru bez omezení nelze**. (Např. již samotná vlákna mají prakticky nestlačitelný objem.) V reálném procesu stlačování si **vlákna svými objemy navzájem "překážejí"** a jejich přibližování se tak stává proti výchozím předpokladům obtížnější. Jako pravděpodobné se jeví zejména následující představy:

*1)* V těsné blízkosti jednoho kontaktu nemůže vzniknout další kontakt, protože vlákna by se musela v tomto prostoru vzájemně **prostupovat** - viz též poznámka k textu před (585).

*2)* Na obr. 49 působí okolí na idealizované vlákno pouze v bodech (působiště sil, podpory); ohybově deformovatelná je proto celá délka δ (každého) segmentu. Skutečné kontaktní místo má však jistou **délku** a v celé této délce je vlákno přitlačeno k druhému vláknu jistou spojitě rozloženou silou (spíše než bodově působící silou), "dosedá" na něj, je v této části "nepohyblivé", ohybově dále nedeformovatelné. Skutečná délka části segmentu, jíž lze dále deformovat, je proto **hodnotou** δ **zmenšenou o délku kontaktního místa**.



obr. 52

Obě představy vycházejí ze "zvláštního" způsobu uspořádání a chování materiálu v kontaktu a v jeho bezprostředním okolí - viz obr. 52. Zvýrazněné části na sebe dosedajících vláken a k nim příslušející nezbytný, tj. nevytlačitelný objem vzduchu v jejich těsném okolí (zejména ve "štěrbinách" mezi nimi) tvoří **nestlačitelné těleso** - jakousi konkreci, "pecku" či **granuli**.

Symbolem $W_c$ označujme **objem všech granulí** ve vlákenném útvaru o celkovém objemu $V_c$; $V_c \geq W_c$. Zatímco **objem granulí** $W_c$ **je nestlačitelný**, zbývající **objem** $V_c - W_c$ **je deformabilní** - lze jej dále stlačovat. Podobně výchozí, nestlačený stav vlákenného útvaru má **celkový výchozí objem** $V_{c,0}$, je v něm **výchozí objem granulí** $W_{c,0}$ a **výchozí deformabilní objem** je $V_{c,0} - W_{c,0}$. Nabízí se proto přijmout následující *zobecňující hypotézu:* **Odvození, které vedlo k rovnici** (629a) **či** (630a) **platí nikoliv pro celkové objemy, ale pouze pro jejich deformabilní části**. Zobecněná rovnice (629a) má pak tvar

$$p = k_p \frac{V^3}{\left(V_c - W_c\right)^3} - k_p \frac{V^3}{\left(V_{c,0} - W_{c,0}\right)^3} \tag{631}$$

a alternativní zobecněná rovnice (630a) má tvar

$$p = \left[ \sqrt[3]{k_p}\, \frac{V}{V_c - W_c} - \sqrt[3]{k_p}\, \frac{V}{V_{c,0} - W_{c,0}} \right]^3 \tag{632}$$

Pro aplikaci těchto rovnic je nutné vyjádřit objem granulí $W_c$ a výchozí objem granulí $W_{c,0}$.

**Objem granulí ve vlákenném útvaru.** Ve vlákenném útvaru je **celkový počet** $N_g$ **granulí**, (průměrný) **objem jedné granule je** $W_{c,g}$. Celkový objem granulí ve vlákenném útvaru $W_c$ lze zapsat vztahem

$$W_c = N_g W_{c,g} \tag{633}$$

Granule je okolím každého kontaktu, takže **celkový počet granulí** $N_g$ **je stejný jako celkový počet kontaktů** $n$.

Z definice hustoty kontaktů $\upsilon$ dle (594) a rov. (596) se nalezne vztah

$$N_{\mathrm{g}} = n = \upsilon V_{\mathrm{c}} = k_{\upsilon}\mu^{2}V_{\mathrm{c}} \tag{634}$$

Objem (průměrný) jedné granule $W_{\mathrm{c,g}}$ je složen z (průměrného) **objemu vlákenného materiálu** $W_{\mathrm{g}}$ **v granuli** (přibližně zvýrazněná část na obr. 52) a z nezbytného, "nevytlačitelného" vzduchu v okolí (ve "štěrbinách" mezi vlákny a pod.). Označíme-li **zaplnění granule** $\mu_{\mathrm{g}}$, platí

$$\mu_{\mathrm{g}} = \frac{W_{\mathrm{g}}}{W_{\mathrm{c,g}}} \qquad W_{\mathrm{c,g}} = \frac{W_{\mathrm{g}}}{\mu_{\mathrm{g}}} \tag{635}$$

Objem vlákenného materiálu v jedné granuli $W_{\mathrm{g}}$ závisí na míře stlačení celého útvaru. V málo stlačeném vlákenném útvaru vytváří "lehký" styk dvou vláken nepatrné styčné plochy, síly v kontaktu jsou malé, malý je "ztuhlý", tj. nedeformovatelný prostor granule a malý je pak i objem vlákenného materiálu v takové granuli. Naproti tomu ve velmi stlačeném vlákenném útvaru jsou síly v kontaktu veliké, vlákna jsou do sebe "zakousnuta", mají velké styčné plochy, "ztuhlý" tj. nedeformovatelný prostor granule je poměrně velký a objem vlákenného materiálu v granuli je pak také poměrně velký.

Charakterizujeme-li míru (jednoosého) stlačení vlákenného útvaru jeho zaplněním $\mu$, můžeme podle předchozích úvah formulovat následující *hypotézu:* **Objem vlákenného materiálu v jedné** (průměrné) **granuli** $W_{\mathrm{g}}$ **je monotónně rostoucí funkcí zaplnění** $\mu$ **vlákenného útvaru**, z něhož granule pocházejí; $W_{\mathrm{g}} = f(\mu)$.

Exaktní odvození funkce $f$ dosud není známo. Často však bývá postačující zavést empirický *předpoklad*, že **funkci** $f$ **lze vyjádřit obecnou parabolou**.

$$W_{\mathrm{g}} = f(\mu) = K\mu^{a} \quad K > 0, a > 0 \ldots \text{materiálové parametry} \tag{636}$$

Užitím (634) a (635) s (636) ve vztahu (633) nalezneme pro objem všech granulí ve vlákenném útvaru výraz

$$W_{\mathrm{c}} = N_{\mathrm{g}} W_{\mathrm{c,g}} = k_{\upsilon}\mu^{2}V_{\mathrm{c}}\frac{W_{\mathrm{g}}}{\mu_{\mathrm{g}}} = k_{\upsilon}\mu^{2}V_{\mathrm{c}}\frac{K\mu^{a}}{\mu_{\mathrm{g}}} = K\frac{k_{\upsilon}\mu^{2+a}V_{\mathrm{c}}}{\mu_{\mathrm{g}}} \tag{637}$$

Stav, v němž je vlákenný útvar **stlačen největším teoreticky možným způsobem** nazveme **mezním stavem**. V mezním stavu platí:

*1)* Vlákenný útvar má **nejmenší možný celkový objem** $V_{\mathrm{c,\,min}}$.

*2)* Vlákenný útvar má největší možné, tj. **mezní zaplnění** $\mu_{\mathrm{m}}$. Protože objem vláken $V$ je konstantní - kap.5.2, předpoklad 5 - lze mezní zaplnění vyjádřit poměrem $\mu_{\mathrm{m}} = V/V_{\mathrm{c,\,min}}$.

*3)* V mezním stavu **granule zaplňují celý objem vlákenného útvaru**; $W_{\mathrm{c}} = V_{\mathrm{c,\,min}}$. (V opačném případě by v mezním stavu existoval ještě nějaký deformabilní objem $V_{\mathrm{c,\,min}} - W_{\mathrm{c}} > 0$, který by bylo možné dále stlačovat; pak by ovšem daný stav nebyl mezním.)

*4)* Protože útvar má mezní zaplnění - bod *2)* - a je tvořen výhradně jen granulemi - bod *3)* - je **zaplnění granule** rovněž **mezní**; $\mu_{\mathrm{g}} = \mu_{\mathrm{m}}$.

Dosadíme-li hodnoty pro mezní stav do rovnice (637) získáme výraz pro parametr $K$.

$$V_{\mathrm{c,\,min}} = K\frac{k_{\upsilon}\mu_{\mathrm{m}}^{2+a}V_{\mathrm{c,\,min}}}{\mu_{\mathrm{m}}} \qquad 1 = Kk_{\upsilon}\mu_{\mathrm{m}}^{1+a} \qquad K = \frac{1}{k_{\upsilon}\mu_{\mathrm{m}}^{1+a}} \tag{638}$$

Dosazením (638) do (637) upravíme vztah pro objem granulí do tvaru

$$W_{\mathrm{c}}=K\frac{k_{\upsilon}\mu^{2+a}V_{\mathrm{c}}}{\mu_{\mathrm{g}}}=\frac{1}{k_{\upsilon}\mu_{\mathrm{m}}^{1+a}}\frac{k_{\upsilon}\mu^{2+a}V_{\mathrm{c}}}{\mu_{\mathrm{g}}}=V_{\mathrm{c}}\frac{\mu^{2+a}}{\mu_{\mathrm{m}}^{1+a}\mu_{\mathrm{g}}} \tag{639a}$$

V mezním stavu je v celém vlákenném útvaru obsažen jen nezbytný, nevytlačitelný objem vzduchu. Objem vzduchu v granuli - byť táž je součástí útvaru i málo stlačeného - je chápán rovněž jako nezbytný, nevytlačitelný objem (viz text u obr. 52). Velmi pravděpodobný je proto následující *předpoklad:* **Zaplnění granule $\mu_{\mathrm{g}}$ v libovolně stlačeném vlákenném útvaru je mezním zaplněním** $\mu_{\mathrm{m}}$; $\mu_{\mathrm{g}}=\mu_{\mathrm{m}}$. Z (639a) nyní nalezneme pro **objem všech granulí** rovnici

$$W_{\mathrm{c}}=V_{\mathrm{c}}\frac{\mu^{2+a}}{\mu_{\mathrm{m}}^{1+a}\mu_{\mathrm{g}}}=V_{\mathrm{c}}\frac{\mu^{2+a}}{\mu_{\mathrm{m}}^{1+a}\mu_{\mathrm{m}}}=V_{\mathrm{c}}\left(\frac{\mu}{\mu_{\mathrm{m}}}\right)^{2+a} \tag{639}$$

Ve výchozím, nestlačeném stavu vlákenného útvaru je $V_{\mathrm{c}}=V_{\mathrm{c},0}$, $\mu=\mu_0$ a pro **výchozí objem granulí** platí analogicky

$$W_{\mathrm{c},0}=V_{\mathrm{c},0}\left(\frac{\mu_0}{\mu_{\mathrm{m}}}\right)^{2+a} \tag{640}$$

## Zobecněná závislost tlaku na zaplnění.

Dosazením výrazů (639) a (640) do zobecněné rovnice (631), užitím vztahů pro zaplnění ($\mu=V/V_{\mathrm{c}}$, $\mu_0=V/V_{\mathrm{c},0}$) a úpravou vznikne **zobecněná závislost tlaku $p$ na zaplnění $\mu$ při jednoosé deformaci** ve tvaru rovnice

$$p=k_p\frac{V^3}{\left(V_{\mathrm{c}}-W_{\mathrm{c}}\right)^3}-k_p\frac{V^3}{\left(V_{\mathrm{c},0}-W_{\mathrm{c},0}\right)^3}=k_p\frac{V^3}{\left[V_{\mathrm{c}}-V_{\mathrm{c}}\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^3}-k_p\frac{V^3}{\left[V_{\mathrm{c},0}-V_{\mathrm{c},0}\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^3}=$$

$$=k_p\frac{\left(V/V_{\mathrm{c}}\right)^3}{\left[1-\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^3}-k_p\frac{\left(V/V_{\mathrm{c},0}\right)^3}{\left[1-\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^3}$$

$$p=k_p\frac{\mu^3}{\left[1-\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^3}-k_p\frac{\mu_0^3}{\left[1-\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^3} \tag{641}$$

Formální zápis rovnice (641) lze zjednodušit, zavedeme-li obecnou funkci

$$\xi(x)=k_p\frac{x^3}{\left[1-\left(x/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^3}\quad x\in\left(0,\ \mu_{\mathrm{m}}\right)\ldots\text{ argument funkce} \tag{642}$$

Zobecněná závislost tlaku $p$ na zaplnění $\mu$ je pak vyjádřena rovnicí

$$p=\xi(\mu)-\xi(\mu_0) \tag{643}$$

Podobně dosazením výrazů (639) a (640) do zobecněné rovnice (632), užitím vztahů pro zaplnění ($\mu=V/V_{\mathrm{c}}$, $\mu_0=V/V_{\mathrm{c},0}$) a úpravou vznikne **alternativní zobecněná závislost tlaku $p$ na zaplnění $\mu$ při jednoosé deformaci** ve tvaru rovnice

$$p=\left[\sqrt[3]{k_p}\frac{V}{V_{\mathrm{c}}-V_{\mathrm{c}}\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}}-\sqrt[3]{k_p}\frac{V}{V_{\mathrm{c},0}-V_{\mathrm{c},0}\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}}\right]^3$$

$$p=\left[\sqrt[3]{k_p}\,\frac{V/V_c}{1-\left(\mu/\mu_m\right)^{2+a}}-\sqrt[3]{k_p}\,\frac{V/V_{c,0}}{1-\left(\mu_0/\mu_m\right)^{2+a}}\right]^3$$

$$p=\left[\sqrt[3]{k_p}\,\frac{\mu}{1-\left(\mu/\mu_m\right)^{2+a}}-\sqrt[3]{k_p}\,\frac{\mu_0}{1-\left(\mu_0/\mu_m\right)^{2+a}}\right]^3 \qquad (644)$$

Formální zápis rovnice (644) lze zjednodušit, zavedeme-li obecnou funkci

$$\psi(x)=\sqrt[3]{k_p}\,\frac{x}{1-\left(x/\mu_m\right)^{2+a}}=\sqrt[3]{\xi(x)}x\in(0,\ \mu_m)\ldots\text{argument funkce} \qquad (645)$$

Zobecněná závislost tlaku $p$ na zaplnění $\mu$ je pak vyjádřena rovnicí

$$p=\left[\psi(\mu)-\psi(\mu_0)\right]^3 \qquad (646)$$

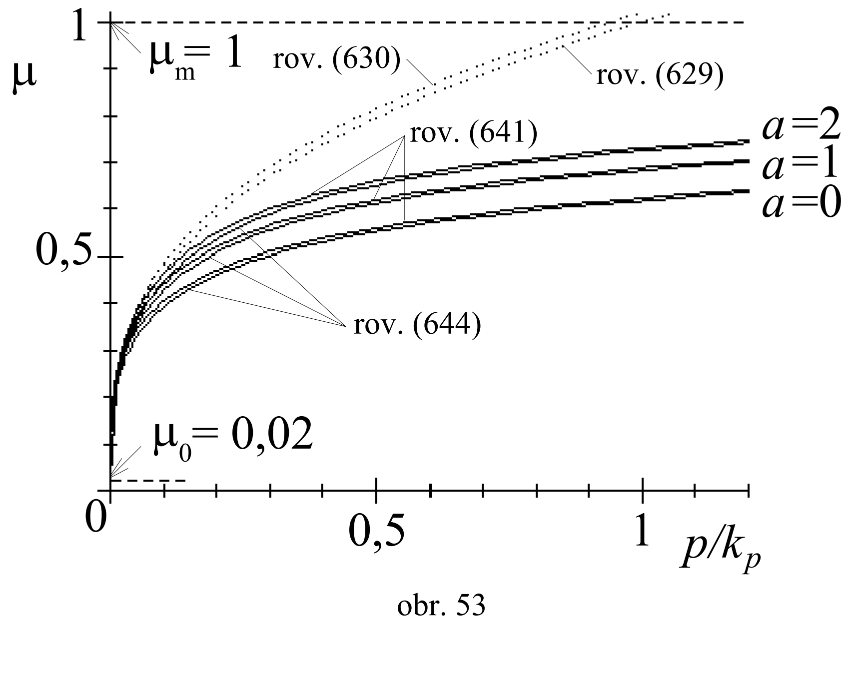
V rovnici (641) či (642) a (643) stejně jako v alternativní rovnici (644) či (645) a (646) se vyskytují dva parametry z předchozích kapitol ($k_p$ a $\mu_0$) a dva nové parametry ($a$ a $\mu_m$). Hodnoty parametrů je třeba stanovit experimentálně.

**Mezní zaplnění** $\mu_m$ je nejvyšší možnou hodnotou zaplnění. Je jistě menší než 1, ale hodnotě 1 je velmi blízké. (Teoreticky je v části A, kap. 3.2 odvozena rovnicí (30) hodnota limitního zaplnění $\mu_{lim}=\pi/\left(2\sqrt{3}\right)\cong 0,907$. Skutečná vlákna se však při velkých silách ještě příčně poněkud deformují, "zakousnou" se do sebe; skutečné mezní zaplnění je proto ještě vyšší. Často lze prakticky použít přibližnou hodnotu $\mu_m \cong 1$.)

**Výchozí zaplnění** $\mu_0$ je zaplněním nestlačené struktury. Jeho hodnota se pohybuje v setinách, nejčastěji $\mu_0 = 0,01$ až 0,03.

**Materiálový parametr** $a$, zavedený rovnicí (636), má podle experimentálních zkušeností pro mnohé materiály hodnotu blízkou jedné, $a \cong 1$.

**Materiálový parametr** $k_p$ má rozměr tlaku a podle experimentálních zkušeností se jeho hodnota v závislosti na použitém materiálu pohybuje nejčastěji v rozmezí $k_p = 10\,\text{MPa}$ až $60\,\text{MPa}$.




obr. 53

Vztahy (641), (644), a též (629) a (630) ilustrují křivky na obr. 53, vypočtené při $\mu_0 = 0,02$, $\mu_m = 1$. Je z nich zřejmé, že rozdíly mezi funkcemi (641) a (644) jsou nepatrné. Pro malá zaplnění je průběh rov. (641) či (644) prakticky stejný jako průběh rov. (629) či (630). (Pro malá $\mu$ je $1-\left(\mu/\mu_m\right)^{2+a}\cong 1$, $\mu_0<\mu$, a proto rovněž platí $1-\left(\mu_0/\mu_m\right)^{2+a}\cong 1$.)

**Explicitní vyjádření zaplnění při $a = 1$.** Pro mnohé materiály lze uvažovat, že parametr $a = 1$. V tomto případě lze rovnici (641) upravit do tvaru

$$p = k_p \frac{\mu^3}{\left[1-(\mu/\mu_\mathrm{m})^3\right]^3} - k_p \frac{\mu_0^3}{\left[1-(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3\right]^3}$$

$$\frac{p}{k_p \mu_\mathrm{m}^3} + \frac{(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3}{\left[1-(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3\right]^3} = \frac{(\mu/\mu_\mathrm{m})^3}{\left[1-(\mu/\mu_\mathrm{m})^3\right]^3}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{(\mu/\mu_\mathrm{m})^3}{\left[1-(\mu/\mu_\mathrm{m})^3\right]^3} \tag{647}$$

kde

$$y = 1\Bigg/\left\{\frac{p}{k_p \mu_\mathrm{m}^3} + \frac{(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3}{\left[1-(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3\right]^3}\right\} = k_p \mu_\mathrm{m}^3 \Bigg/ \left\{p + \frac{k_p \mu_0^3}{\left[1-(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3\right]^3}\right\} \tag{648}$$

Řešení rov. (647) vede ke kubické rovnici s jedním reálným kořenem. Z něj lze pro **explicitní vyjádření zaplnění** $\mu$ odvodit vztah

$$\mu = \mu_\mathrm{m}\left\{1 + \left[\sqrt{\left(\frac{y}{3}\right)^3 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} - \frac{y}{2}\right]^{1/3} - \left[\sqrt{\left(\frac{y}{3}\right)^3 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} + \frac{y}{2}\right]^{1/3}\right\}^{1/3} \tag{649}$$

(Tlak $p$ je obsažen ve výrazu (648) pro $y$.)

Podobně lze nalézt explicitní vyjádření zaplnění i z alternativní rovnice (644). Dosazením předpokládané hodnoty $a = 1$ a úpravou nalézáme postupně tvary

$$p = \left[\sqrt[3]{k_p}\,\frac{\mu}{1-(\mu/\mu_\mathrm{m})^3} - \sqrt[3]{k_p}\,\frac{\mu_0}{1-(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3}\right]^3$$

$$\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{k_p}\,\frac{\mu_0}{1-(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3} = \sqrt[3]{k_p}\,\frac{\mu}{1-(\mu/\mu_\mathrm{m})^3}$$

$$\left[\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{k_p}\,\frac{\mu_0}{1-(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3}\right]^3 = k_p \frac{\mu^3}{\left[1-(\mu/\mu_\mathrm{m})^3\right]^3}$$

$$\frac{\left[\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{k_p}\,\frac{\mu_0}{1-(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3}\right]^3}{k_p \mu_\mathrm{m}^3} = \frac{(\mu/\mu_\mathrm{m})^3}{\left[1-(\mu/\mu_\mathrm{m})^3\right]^3}$$

$$\frac{1}{y^*} = \frac{(\mu/\mu_\mathrm{m})^3}{\left[1-(\mu/\mu_\mathrm{m})^3\right]^3} \tag{650}$$

kde

$$y^* = k_p \mu_\mathrm{m}^3 \Bigg/ \left[\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{k_p}\,\frac{\mu_0}{1-(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^3}\right]^3 \tag{651}$$

Jak je zřejmé, je rov. (650) analogická s rov. (647). **Alternativní vztah pro explicitní vyjádření zaplnění** $\mu$ je též vyjádřen rovnicí (649), v níž je místo $y$ užito $y^*$ dle (651). (Tlak $p$ je obsažen ve výrazu (651) pro $y^*$.)

*Poznámka:* Explicitní analytické vyjádření $\mu$ pro obecnou hodnotu parametru $a$ neexistuje.

**Aproximační vztahy.** Pro některé účely je rovnice (641) - zapsaná též tvarem (643) - formálně příliš složitá. Pokud lze *předpokládat*, že **zaplnění** $\mu$ (uvažovaných) **vlákenných útvarů se příliš neliší od známé hodnoty** $\mu^*$, lze funkci $\xi(\mu)$ ve vztahu (643) nahradit jednodušším aproximačním výrazem typu

$$\xi_{\text{aprox}}(\mu)=k_p c\mu^b \qquad k_p \ldots \text{materiálový parametr, } b,c\ldots \text{parametry aproximace} \tag{652}$$

jehož derivace je

$$\frac{\mathrm{d}\xi_{\text{aprox}}(\mu)}{\mathrm{d}\mu}=k_p cb\mu^{b-1} \tag{653}$$

Derivace $\mathrm{d}\xi(x)/\mathrm{d}x$ původní funkce (642) je

$$\frac{\mathrm{d}\xi(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{k_p\frac{x^3}{\left[1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^3}\right\}=k_p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}}\right]^3=$$

$$=k_p 3\left[\frac{x}{1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}}\right]^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}}\right]=k_p 3\frac{x^2}{\left[1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mu_{\mathrm{m}}\frac{x/\mu_{\mathrm{m}}}{1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}}\right]=$$

$$=3k_p\mu_{\mathrm{m}}\frac{x^2}{\left[1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^2}\,\frac{\frac{1}{\mu_{\mathrm{m}}}\left[1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]-\frac{x}{\mu_{\mathrm{m}}}\left[-(2+a)(x/\mu_{\mathrm{m}})^{1+a}\frac{1}{\mu_{\mathrm{m}}}\right]}{\left[1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^2}=$$

$$=3k_p x^2\frac{1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}+(2+a)(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}}{\left[1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^4}=3k_p x^2\frac{1+(1+a)(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}}{\left[1-(x/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^4} \tag{654}$$

Hodnoty parametrů $b$ a $c$ vyjádříme z požadavků, aby **právě při zaplnění** $\mu=\mu^*$ platilo: *1)* hodnota $\xi(\mu^*)$ vypočtená ze vztahu (642) je rovna hodnotě $\xi_{\text{aprox}}(\mu^*)$ vypočtené z rov. (652), *2)* hodnota derivace $\left[\mathrm{d}\xi(x)/\mathrm{d}x\right]_{x=\mu^*}$ dle (654) je rovna hodnotě $\left[\mathrm{d}\xi_{\text{aprox}}(x)/\mathrm{d}x\right]_{x=\mu^*}$ dle (653).

$$\xi(\mu^*)=\xi_{\text{aprox}}(\mu^*)$$

$$k_p\frac{{\mu^*}^3}{\left[1-(\mu^*/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^3}=k_p c(\mu^*)^b \tag{655}$$

$$\left[\mathrm{d}\xi(x)/\mathrm{d}x\right]_{x=\mu^*}=\left[\mathrm{d}\xi_{\text{aprox}}(x)/\mathrm{d}x\right]_{x=\mu^*}$$

$$3k_p{\mu^*}^2\frac{1+(1+a)(\mu^*/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}}{\left[1-(\mu^*/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^4}=k_p cb(\mu^*)^{b-1} \tag{656}$$

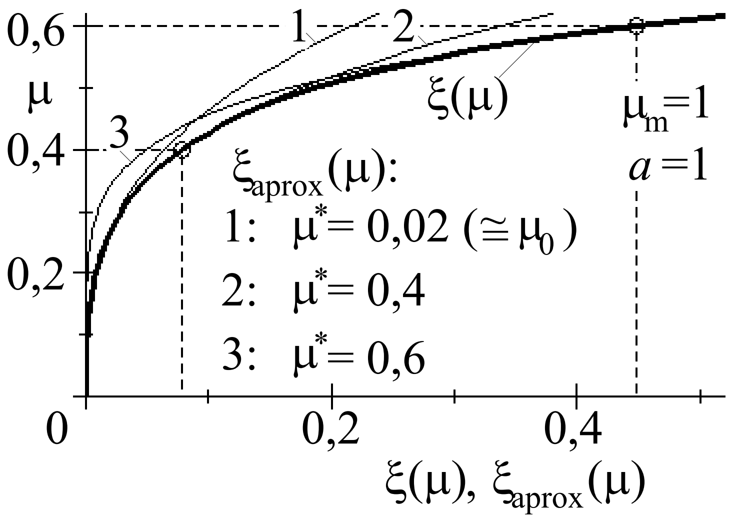
Dělením rovnice (656) rovnicí (655) a úpravou vznikne výraz pro **výpočet parametru** *b*.

$$\frac{3k_p \mu^{*2} \dfrac{1+(1+a)\left(\mu^*/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}}{\left[1-\left(\mu^*/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^4}}{k_p \dfrac{\mu^{*3}}{\left[1-\left(\mu^*/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^3}} = \frac{k_p\, cb\left(\mu^*\right)^{b-1}}{k_p\, c\left(\mu^*\right)^b}$$

$$b = 3\frac{1+(1+a)\left(\mu^*/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}}{1-\left(\mu^*/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}} \qquad (657)$$

Pro parametr *c* pak z (655) platí vztah

$$c = \frac{1}{\left[1-\left(\mu^*/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^3 \left(\mu^*\right)^{b-3}} \qquad (658)$$




obr. 54

Průběhy funkcí dokumentuje příklad na obr. 54, vypočtený s hodnotami parametrů $\mu_{\mathrm{m}} = 1$ a $a = 1$. Silnou čarou je vyjádřena funkce $\xi(\mu)$, plynoucí z (642). Slabé čáry znázorňují funkce $\xi_{\mathrm{aprox}}(\mu)$ při $\mu^* = 0{,}02$, dále 0,4 a 0,6. Graf ilustruje dobré "přimknutí" křivek $\xi_{\mathrm{aprox}}(\mu)$ k původní funkci $\xi(\mu)$ v okolí příslušných zaplnění $\mu^*$.

S využitím předchozích vztahů lze **funkci** (641) **nahradit v okolí zaplnění** $\mu = \mu^*$ **aproximační funkcí**, jež užitím (652) a (642) nabývá tvar

$$p \cong p_{\mathrm{aprox}} = \xi_{\mathrm{aprox}}(\mu) - \xi(\mu_0) = k_p\, c\mu^b - \xi(\mu_0) \qquad (659)$$

kde parametr *b* je dán výrazem (657), parametr *c* výrazem (658) a parametr $\xi(\mu_0)$ rovnicí (642), tj. $\xi(\mu_0) = k_p \mu_0^3 \Big/ \left[1-\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}\right]^3$.

Podobně jako (641) lze také **funkci** (644) **nahradit alternativní rovnicí v okolí zaplnění** $\mu = \mu^*$. Užitím zápisu ve tvaru (646) se (645) a výrazu (652) nalezneme vztah

$$p = \left[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)\right]^3 = \left[\sqrt[3]{\xi(\mu)} - \sqrt[3]{\xi(\mu_0)}\right]^3 \cong$$

$$\cong p_{\mathrm{aprox}} = \left[\sqrt[3]{\xi_{\mathrm{aprox}}(\mu)} - \sqrt[3]{\xi(\mu_0)}\right]^3 = \left[\sqrt[3]{k_p\, c}\; \mu^{b/3} - \sqrt[3]{\xi(\mu_0)}\right]^3 \qquad (660)$$

(Parametry *b, c,* $\xi(\mu_0)$ se stanoví stejně jako u rovnice (659).)

*Poznámka:* Ve zvláštním případě $\mu^* = \mu_0$ je $b = 3\left[1 + (1+a)(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^{2+a}\right] \Big/ \left[1 - (\mu_0/\mu_\mathrm{m})^{2+a}\right]$, dále $c = 1 \Big/ \left\{\left[1 - (\mu_0/\mu_\mathrm{m})^{2+a}\right]^3 (\mu^*)^{b-3}\right\}$ a stále platí $\xi(\mu_0) = k_p \mu_0^3 \Big/ \left[1 - (\mu_0/\mu_\mathrm{m})^{2+a}\right]^3$. Protože však $\mu_0$ je velmi malé, lze přibližně uvažovat $1 - (\mu_0/\mu_\mathrm{m})^{2+a} \cong 1 + (1+a)(\mu_0/\mu_\mathrm{m})^{2+a} \cong 1$.

Pak $b \cong 3$, $c \cong 1$, $\xi(\mu_0) = k_p \mu_0^3$, rovnice (659) má tvar

$$p \cong p_\mathrm{aprox} = k_p \mu^3 - k_p \mu_0^3 = k_p\left[\mu^3 - \mu_0^3\right]$$

a rovnice (660) má tvar

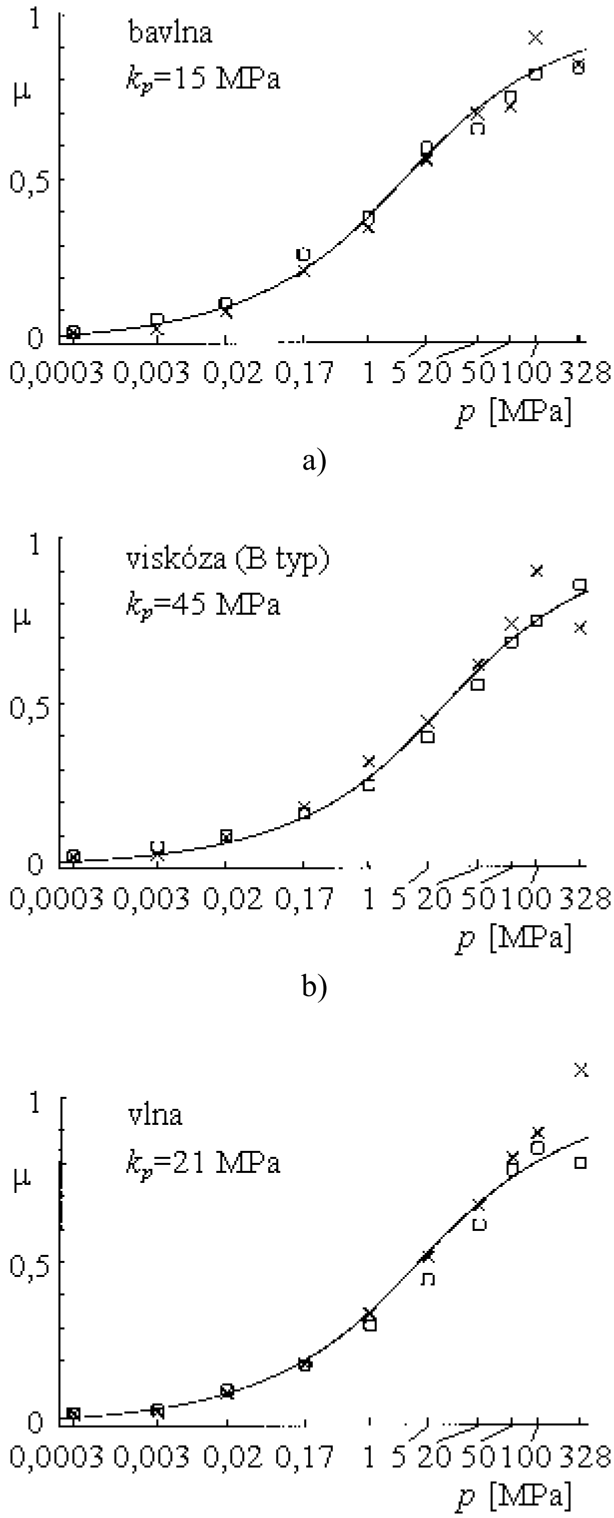
$$p \cong p_\mathrm{aprox} = \left[\sqrt[3]{k_p}\,\mu - \sqrt[3]{k_p \mu_0^3}\right]^3 = $$
$$= k_p\left[\mu - \mu_0\right]^3.$$

Nalezené výrazy jsou totožné s "nezobecněnými" rovnicemi (629) a (630),

**Příklady.** P. D. BALJASOV [7] stlačoval vlákenný materiál do nedeformovatelné krabičky ("boxu") a zjišťoval závislost mezi působícím tlakem a vzniklou deformací. Výsledky jeho experimentů charakterizují semilogaritmické grafy na obr. 55. Naměřené hodnoty jsou značeny symbolem □ pro vlákenný materiál s přibližně paralelním uspořádáním vláken a symbolem × pro vlákenný materiál s přibližně izotropním uspořádáním vláken. Plná křivka zobrazuje průběh funkce (641) s parametry $\mu_\mathrm{m} = 1$ $\mu_0 = 0{,}02, a = 1$ a různými hodnotami $k_p$ dle materiálu. (Průběh alternativní funkce (644) by byl prakticky stejný.)

Z grafů je zřejmé, že existuje poměrně dobrá shoda teoreticky odvozeného vztahu s experimentálně naměřenými výsledky, a to až do dosti vysokých hodnot zaplnění.

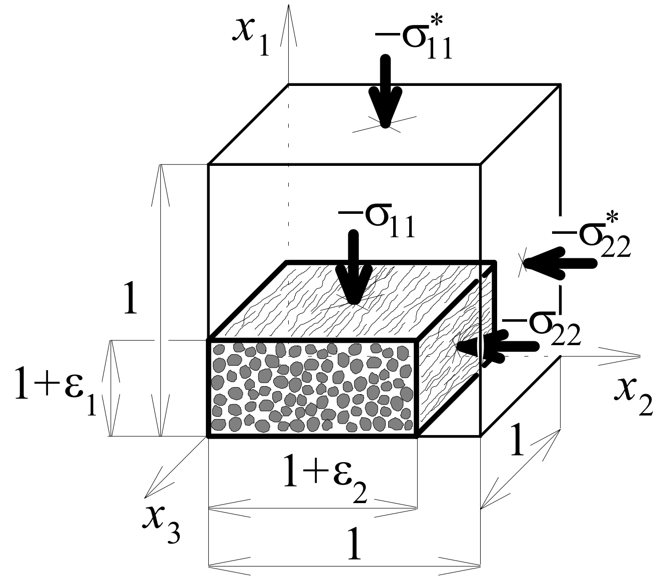
*Poznámka:* Při největších hodnotách zaplnění se výrazně deformuje vlastní hmota vláken, což model nezahrnuje. Proto je zde shoda menší a rozptyl hodnot větší.



obr. 55

## 5.4 Dvoudimenzionální deformace transverzálně izotropního vlákenného materiálu

**Napjatost a deformace.** Uvažujme svazek přibližně paralelních vláken, umístěný do souřadnicového systému $x_1, x_2, x_3$ dle obr. 56, kde **osy souřadnic určují hlavní směry napjatosti**.



obr. 56

Vlákna preferují směr osy $x_3$. U tohoto uspořádání lze *předpokládat*, že se bude chovat jako **transverzálně izotropní kontinuum** s izotropií v rovině kolmé k ose $x_3$. Rovnice popisující takový systém pak platí i po záměně indexů "1" a "2" u veličin, vztažených ke směrům $x_1$ a $x_2$. Proto užívejme **obecné indexy** $i$ a $j$, přičemž lze volit $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$.

Ve **výchozím (nezatíženém) stavu** naplňují vlákna krychli o straně 1. Normálové síly $-\sigma_{ii}^*$, znázorněné na obr. 56, působí na výchozí jednotku plochy směrem **dovnitř** tělesa. (Kladná hodnota vyjadřuje **tlak**.) Normálové síly označované $\sigma_{ii}^*$ jsou naopak chápány ve směru od tělesa **ven**. (Kladná hodnota vyjadřuje **tah**.) Protože normálové síly působí ve výchozím stavu na jednotkové plochy, jsou $\sigma_{ii}^*$ současně **Lagrangeovými**[1)] **(fiktivními) napětími**, tj. napětími vztahovanými k výchozímu (nezdeformovanému) tělesu. Po deformaci ve směru os $x_1$ a $x_2$ se jednotkové rozměry změní dle obr. 56 na hodnoty $1+\varepsilon_1$ a $1+\varepsilon_2$; jen rozměr ve směru $x_3$ je trvale 1. (Toho lze dosáhnout umístěním tělesa mezi 2 tuhé desky, kolmé k $x_3$ a vzdálené 1. U svazku přibližně paralelních vláken se však tento rozměr příliš neodchýlí od hodnoty 1 ani při uspořádání bez těchto desek.)

Po zdeformování působí tlakové síly $-\sigma_{ii}^*$ (tj. tahové síly $\sigma_{ii}^*$) na skutečné plochy $1\cdot\left(1+\varepsilon_j\right)$. Pro **Cauchyho (skutečná) napětí** $\sigma_{ii}$**,** vztažená na plochy ve **zdeformovaném tělesu**, platí vztah

$$\sigma_{ii} = \frac{\sigma_{ii}^*}{1\left(1+\varepsilon_j\right)} = \frac{\sigma_{ii}^*}{1+\varepsilon_j} \tag{661}$$

Stále *předpokládáme*, že **při stlačování se objem vláken nemění**. Výchozí krychle na obr. 56 tedy obsahuje objem vláken $V$, **zaplnění ve výchozím stavu** je

$$\mu_0 = \frac{V}{1\cdot 1\cdot 1} = V \tag{662}$$

a stlačený vlákenný materiál má zaplnění

$$\mu = \frac{V}{1\left(1+\varepsilon_i\right)\left(1+\varepsilon_j\right)} = \frac{\mu_0}{\left(1+\varepsilon_i\right)\left(1+\varepsilon_j\right)} \tag{663}$$

---

1) Název je odvozen od Lagrangeova pojetí pohybu částic kontinua.

Místo poměrných prodloužení $\varepsilon_i$ bude výhodné **charakterizovat deformace veličinami**

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{1+\varepsilon_i} \tag{664}$$

*Poznámka:* Zatímco veličiny $\mu_0$ a $\mu$ mají význam zaplnění, **veličiny** $\mu_i$ **či** $\mu_j$ **obecně zaplněními nejsou**.

Z rovnic (663) a (664) nalezneme vztah vyjadřující vazbu zavedených veličin k zaplněním.

$$\mu_i\,\mu_j = \frac{\mu_0}{1+\varepsilon_i}\,\frac{\mu_0}{1+\varepsilon_j} = \frac{\mu_0}{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_j)}\mu_0 = \mu\,\mu_0 \tag{665}$$

Užitím (663) až (665) nalezneme též derivace

$$\frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}\varepsilon_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon_i}\left[\frac{\mu_0}{1+\varepsilon_i}\right] = \frac{-\mu_0}{(1+\varepsilon_i)^2} = \frac{-\mu_0^2}{(1+\varepsilon_i)^2}\,\frac{1}{\mu_0} = \frac{-\mu_i^2}{\mu_0} \tag{666}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_i} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}\left[\frac{\mu_0}{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_j)}\right] = \frac{-\mu_0}{(1+\varepsilon_i)^2(1+\varepsilon_j)} = \frac{-\mu_0}{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_j)}\,\frac{\mu_0}{1+\varepsilon_i}\,\frac{1}{\mu_0} = \frac{-\mu\mu_i}{\mu_0} \tag{667}$$

**Modelové předpoklady.** Popisovaný model dvoudimenzionální deformace vychází z následujících pěti předpokladů.

*1)* V mechanice je používán pojem **konzervativní systém**, což je systém v němž deformační energie $E$ závisí jen na konečné deformaci (tj. nezávisí na "cestě" přechodu tělesa z výchozího do konečného, deformovaného stavu) a v němž je každý přírůstek $\mathrm{d}A$ vložené práce "uložen" ve formě přírůstku deformační energie $\mathrm{d}E$.

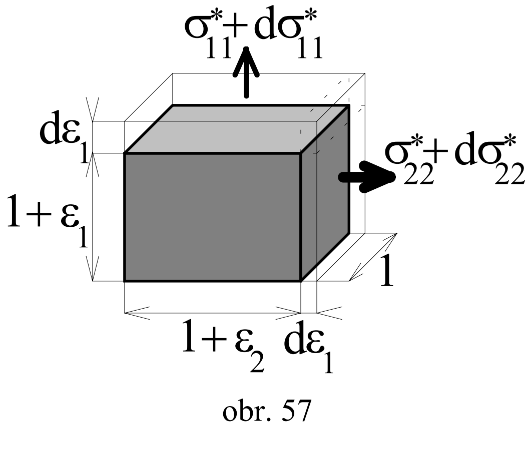
Reálné vlákenné útvary konzervativní nejsou. Pro omezený okruh způsobů namáhání dle schématu na obr. 56 však *předpokládejme*, že platí:

*a)* (měrná) **deformační energie** $E$ **je funkcí jen poměrných prodloužení** $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, takže lze psát $E = E(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ a

*b)* elementární **přírůstek vložené práce je úměrný** elementárnímu **přírůstku deformační energie**; tedy $\mathrm{d}A = C\,\mathrm{d}E$, kde $C \geq 1$ je konstantou úměrnosti. (Část vložené práce může být spotřebována na tření mezi vlákny a pod. Ve srovnání s konzervativním systémem, kde $C = 1$, je předpoklad poněkud "volnější".) Elementární **přírůstek deformační energie** je totálním diferenciálem funkce $E = E(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Platí

$$\mathrm{d}E = \frac{\partial E}{\partial\varepsilon_1}\mathrm{d}\varepsilon_1 + \frac{\partial E}{\partial\varepsilon_2}\mathrm{d}\varepsilon_2 \tag{668}$$

Elementární **přírůstek vložené práce** vyjádříme ze schématu na obr. 57. Nechť působením Lagrangeových (fiktivních) napětí $\sigma_{11}^*$ a $\sigma_{22}^*$ se výchozí jednotková krychle přetvořila do tvaru šedého kvádru s rozměry $1+\varepsilon_1$, $1+\varepsilon_2$, 1. Zvětšíme-li napětí $\sigma_{11}^*$ a $\sigma_{22}^*$ o elementární přírůstky $\mathrm{d}\sigma_{11}^*$ a $\mathrm{d}\sigma_{22}^*$, zvětší se hrany kvádru o znázorněné elementární přírůstky $\mathrm{d}\varepsilon_1$ a $\mathrm{d}\varepsilon_2$.



obr. 57

Elementární přírůstek vložené práce lze pak vyjádřit vztahem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \left(\sigma_{11}^* + \mathrm{d}\sigma_{11}^*\right)\mathrm{d}\varepsilon_1 + \left(\sigma_{22}^* + \mathrm{d}\sigma_{22}^*\right)\mathrm{d}\varepsilon_2 = \\ &= \sigma_{11}^*\,\mathrm{d}\varepsilon_1 + \mathrm{d}\sigma_{11}^*\mathrm{d}\varepsilon_1 + \sigma_{22}^*\,\mathrm{d}\varepsilon_2 + \mathrm{d}\sigma_{22}^*\mathrm{d}\varepsilon_2 = \\ &= \sigma_{11}^*\,\mathrm{d}\varepsilon_1 + \sigma_{22}^*\,\mathrm{d}\varepsilon_2 \end{aligned} \tag{669}$$

(Při úpravě jsme zanedbali diferenciály vyšších řádů.) Ze zavedeného předpokladu nalezneme užitím (668) a (669)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= C\,\mathrm{d}E \\ \sigma_{11}^*\,\mathrm{d}\varepsilon_1 + \sigma_{22}^*\,\mathrm{d}\varepsilon_2 &= C\left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_1}\mathrm{d}\varepsilon_1 + \frac{\partial E}{\partial \varepsilon_2}\mathrm{d}\varepsilon_2\right) \\ \sigma_{11}^*\,\mathrm{d}\varepsilon_1 + \sigma_{22}^*\,\mathrm{d}\varepsilon_2 &= C\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_1}\mathrm{d}\varepsilon_1 + C\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_2}\mathrm{d}\varepsilon_2 \end{aligned} \tag{670a}$$

Protože rovnice má platit pro všechny dvojice hodnot $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, musí být $\sigma_{11}^* = C\,\partial E/\partial \varepsilon_1$ a $\sigma_{22}^* = C\,\partial E/\partial \varepsilon_2$; obecně

$$\sigma_{ii}^* = C\,\partial E/\partial \varepsilon_i \tag{670}$$

*2)* V úvodu kapitoly byl zaveden předpoklad, že vlákenný materiál je **transverzálně izotropní**. Vztah pro deformační energii musí být proto symetrický vzhledem k indexům 1, 2.

$$E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = E(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \tag{671}$$

*3)* **Jednodimenzionální deformace** ve směru osy $x_i$, popsaná v předchozích statích, je zvláštním případem obecnějšího namáhání. Porovnáním obr. 48 s obr. 56 a užitím (661) až (665), nalezneme

$$\varepsilon_j = 0, \qquad \mu_j = \mu_0, \qquad \mu_i = \mu, \qquad \sigma_{ii} = \sigma_{ii}^* = -p \tag{672}$$

kde pro tlak $p$ stále platí dříve odvozená rovnice (641), nebo alternativně rovnice (644).

*4)* J. W. S. HEARLE a H. M. A. E. EL-BEHERY [8] zkoumali **poměr Cauchyho (skutečných) napětí** $\sigma_{jj}/\sigma_{ii}$ **při jednodimenzionální deformaci** ve směru osy $x_i$. (Měřili též tlak působící na boční stěnu nedeformovatelné krabičky.) Experimenty ukázaly, že kromě velmi malých tlaků platí přibližně

$$\left(\frac{\sigma_{jj}}{\sigma_{ii}}\right)_{\varepsilon_j=0} \cong \text{konstanta} \tag{673}$$

*5)* Pro vlastní řešení je ještě nutné zavést vhodnou **hypotézu o deformační energii**. Patrně nejjednodušší je *předpokládat* **platnost lineárního vztahu**

$$E = \alpha\,F(\mu_i) + \alpha\,F(\mu_j) + \beta\,F(\mu) \tag{674}$$

(Součtový charakter poněkud připomíná deformační energii dle Hookeova zákona.) Jediná **vhodná funkce** $F$ se zde vyskytuje se třemi různými argumenty ($\mu_i, \mu_j, \mu$). **Parametry** $\alpha$ a $\beta$ vyjadřují vzájemné "ovlivňování" směrů $i$ a $j$. Můžeme pro ně bez újmy na obecnosti zavést vztah

$$\alpha + \beta = 1 \tag{675}$$

Zaveďme též označení pro **derivaci funkce** $F(x)$ ($x$ je obecně argument) symbolem

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \tag{676}$$

**Lagrangeova napětí.** Hypotéza o deformační energii, formulovaná rovnicí (674), evidentně splňuje požadavky bodů *1)* a *2)*. Lagrangeova napětí, vyjádřená v bodě *1)* rovnicí (670), lze za užití vztahu (674) a následným dosazením (666) a (667) vyjádřit tvarem

$$\sigma_{ii}^* = C\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_i} = C\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i}\left[\alpha F(\mu_i) + \alpha F(\mu_j) + \beta F(\mu)\right] =$$

$$= C\left[\alpha f(\mu_i)\frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}\varepsilon_i} + \beta f(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon_i}\right] = C\left[\alpha f(\mu_i)\frac{-\mu_i^2}{\mu_0} + \beta f(\mu)\frac{-\mu\mu_i}{\mu_0}\right] \tag{677}$$

a záměnou indexů nalezneme též

$$\sigma_{jj}^* = C\left[\alpha f(\mu_j)\frac{\mathrm{d}\mu_j}{\mathrm{d}\varepsilon_j} + \beta f(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon_j}\right] = C\left[\alpha f(\mu_j)\frac{-\mu_j^2}{\mu_0} + \beta f(\mu)\frac{-\mu\mu_j}{\mu_0}\right] \tag{678}$$

Při jednodimenzionální deformaci ve směru osy $x_i$ platí užitím (672) a (675) v (677)

$$\left(\sigma_{ii}\right)_{\varepsilon_j=0} = \left(\sigma_{ii}^*\right)_{\varepsilon_j=0} = C\left[\alpha f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0} + \beta f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0}\right] = C f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0} \tag{679}$$

Výchozí nedeformovaný svazek vláken je zvláštním případem jednodimenzionální deformace, při kterém je zaplnění $\mu = \mu_0$ a napětí $\left(\sigma_{ii}^*\right)_{\varepsilon_j=0} = 0$. Užitím těchto hodnot v (679) nalézáme rovnici $0 = C f(\mu_0)\left(-\mu_0^2/\mu_0\right) = C f(\mu_0)(-\mu_0)$. Protože však $C \geq 1$ a $\mu_0 > 0$, musí platit

$$f(\mu_0) = 0 \tag{680}$$

Užitím (661), (664), (672) a (680) v (678) nalezneme vztah

$$\left(\sigma_{jj}\right)_{\varepsilon_j=0} = \frac{\left(\sigma_{jj}^*\right)_{\varepsilon_j=0}}{1+\varepsilon_i} = \frac{1}{1+\varepsilon_i}C\left[\alpha f(\mu_0)\frac{-\mu_0^2}{\mu_0} + \beta f(\mu)\frac{-\mu\mu_0}{\mu_0}\right] =$$

$$= \frac{\mu}{\mu_0}C\beta f(\mu)\frac{-\mu\mu_0}{\mu_0} = C\beta f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0} \tag{681}$$

Z rovnic (679) a (681) lze vyjádřit poměr

$$\left(\frac{\sigma_{jj}}{\sigma_{ii}}\right)_{\varepsilon_j=0} = \frac{C\beta f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0}}{C f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0}} = \beta \ldots \text{konstanta} \tag{682}$$

Podmínka (673) z bodu *4)* je tedy splněna. Rov. (682) též vysvětluje **význam parametru** $\beta$.

Logický význam má i parametr $\alpha$. Při jednodimenzionální deformaci platí totiž

$$\left(\frac{\sigma_{ii}-\sigma_{jj}}{\sigma_{ii}}\right)_{\varepsilon_j=0} = \frac{C f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0} - C\beta f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0}}{C f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0}} = 1-\beta = \alpha \tag{683a}$$

Z Mohrovy kružnice však plyne $\left[\left(\sigma_{ii}-\sigma_{jj}\right)/2\right]_{\varepsilon_j=0} = \left[\tau_{ij\max}\right]_{\varepsilon_j=0}$, kde $\left[\tau_{ij\max}\right]_{\varepsilon_j=0}$ je **maximálním smykovým napětím** při jednodimenzionální deformaci. Rovnici (683a) lze tedy přepsat do tvaru

$$\left(\frac{\sigma_{ii}-\sigma_{jj}}{\sigma_{ii}}\right)_{\varepsilon_j=0} = 2\left(\frac{\tau_{ij\max}}{\sigma_{ii}}\right)_{\varepsilon_j=0} = \alpha \tag{683}$$

z něhož je **význam parametru** $\alpha$ zřejmý.

Zbývající požadavek formulovaný bodem *3)* lze splnit vhodnou volbou funkce *f*. V prvém případě uvažujme, že **jednodimenzionální deformaci popisuje rovnice** (641), resp. (643) s (642). Z rovnic (643), (672) a (679) vyplývá

$$\left(\sigma_{ii}\right)_{\varepsilon_j=0} = C\, f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0} = -p = -\xi(\mu)+\xi(\mu_0)$$

$$f(\mu) = \frac{\mu_0}{C\mu^2}\left[\xi(\mu)-\xi(\mu_0)\right] \tag{684a}$$

Funkce *f* obecného argumentu *x* má tedy tvar

$$f(x) = \frac{\mu_0}{Cx^2}\left[\xi(x)-\xi(\mu_0)\right] \tag{684}$$

Užitím takto zavedené funkce *f* ve výrazu (677) nalezneme pro **Lagrangeovo (fiktivní) napětí** $\sigma^*_{ii}$ rovnici

$$\sigma^*_{ii} = C\left\{\alpha\frac{\mu_0}{C\mu_i^2}\left[\xi(\mu_i)-\xi(\mu_0)\right]\frac{-\mu_i^2}{\mu_0} + \beta\frac{\mu_0}{C\mu^2}\left[\xi(\mu)-\xi(\mu_0)\right]\frac{-\mu\mu_i}{\mu_0}\right\} =$$

$$= -\alpha\left[\xi(\mu_i)-\xi(\mu_0)\right] - \beta\frac{\mu_i}{\mu}\left[\xi(\mu)-\xi(\mu_0)\right] = -\alpha\,\xi(\mu_i) - \beta\,\xi(\mu)\frac{\mu_i}{\mu} + \left(\alpha+\beta\frac{\mu_i}{\mu}\right)\xi(\mu_0) \tag{685}$$

(Pro Lagrangeovo napětí $\sigma^*_{jj}$ platí týž vztah po záměně indexů *i* a *j*.)

V druhém, alternativním případě je **jednodimenzionální deformace popsána rovnicí** (644), resp. (646) s (645). Z rovnic (646) a (679) pak vyplývá

$$\left(\sigma_{ii}\right)_{\varepsilon_j=0} = C\, f(\mu)\frac{-\mu^2}{\mu_0} = -p = -\left[\psi(\mu)-\psi(\mu_0)\right]^3$$

$$f(\mu) = \frac{\mu_0}{C\mu^2}\left[\psi(\mu)-\psi(\mu_0)\right]^3 \tag{686a}$$

Funkce *f* obecného argumentu *x* má nyní tvar

$$f(x) = \frac{\mu_0}{Cx^2}\left[\psi(x)-\psi(\mu_0)\right]^3 \tag{686}$$

Užitím takto zavedené alternativní funkce *f* ve výrazu (677) nalezneme pro **Lagrangeovo (fiktivní) napětí** $\sigma^*_{ii}$ alternativní vztah

$$\sigma^*_{ii} = C\left\{\alpha\frac{\mu_0}{C\mu_i^2}\left[\psi(\mu_i)-\psi(\mu_0)\right]^3\frac{-\mu_i^2}{\mu_0} + \beta\frac{\mu_0}{C\mu^2}\left[\psi(\mu)-\psi(\mu_0)\right]^3\frac{-\mu\mu_i}{\mu_0}\right\} =$$

$$= -\alpha\left[\psi(\mu_i)-\psi(\mu_0)\right]^3 - \beta\frac{\mu_i}{\mu}\left[\psi(\mu)-\psi(\mu_0)\right]^3 \tag{687}$$

(Pro Lagrangeovo napětí $\sigma^*_{jj}$ platí týž vztah po záměně indexů *i* a *j*.)

## Cauchyho napětí.

Pro Cauchyho (skutečná) napětí získáme z rovnic (661), (664) a (665) vztah

$$\sigma_{ii} = \frac{\sigma^*_{ii}}{1+\varepsilon_j} = \frac{\sigma^*_{ii}}{\mu_0}\frac{\mu_0}{1+\varepsilon_j} = \sigma^*_{ii}\frac{\mu_j}{\mu_0} \tag{688}$$

*Poznámka:* Z rov. (665) vyplývá $\mu_j/\mu_0 = \mu/\mu_i$, takže platí také $\sigma_{ii} = \sigma^*_{ii}\,\mu/\mu_i$.

Užijeme-li v rov. (688) výraz pro Lagrangeovo napětí dle (685), nalezneme za užití (665) pro **Cauchyho (skutečné) napětí** vztah

$$\sigma_{ii} = \left[ -\alpha\,\xi(\mu_i) - \beta\,\xi(\mu)\frac{\mu_i}{\mu} + \left(\alpha + \beta\frac{\mu_i}{\mu}\right)\xi(\mu_0)\right]\frac{\mu_j}{\mu_0} =$$

$$= -\alpha\,\xi(\mu_i)\frac{\mu_j}{\mu_0} - \beta\,\xi(\mu)\frac{\mu_i}{\mu}\frac{\mu_j}{\mu_0} + \left(\alpha + \beta\frac{\mu_i}{\mu}\right)\xi(\mu_0)\frac{\mu_j}{\mu_0} =$$

$$= -\alpha\,\xi(\mu_i)\frac{\mu}{\mu_i} - \beta\,\xi(\mu)\frac{\mu_i}{\mu}\frac{\mu}{\mu_i} + \left(\alpha\frac{\mu_j}{\mu_0} + \beta\frac{\mu_i}{\mu}\frac{\mu}{\mu_i}\right)\xi(\mu_0) =$$

$$= -\alpha\,\xi(\mu_i)\frac{\mu}{\mu_i} - \beta\,\xi(\mu) + \left(\alpha\frac{\mu_j}{\mu_0} + \beta\right)\xi(\mu_0) \qquad (689)$$

(Pro Cauchyho napětí $\sigma_{jj}$ platí týž vztah po záměně indexů $i$ a $j$.)

V alternativním případě užijeme v rov. (688) Lagrangeovo napětí ve tvaru (687) a za užití (665) nalezneme alternativní vyjádření pro **Cauchyho (skutečné) napětí**.

$$\sigma_{ii} = \sigma^*_{ii}\frac{\mu_j}{\mu_0} = \left\{ -\alpha\left[\psi(\mu_i) - \psi(\mu_0)\right]^3 - \beta\frac{\mu_i}{\mu}\left[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)\right]^3 \right\}\frac{\mu_j}{\mu_0} =$$

$$= -\alpha\left[\psi(\mu_i) - \psi(\mu_0)\right]^3\frac{\mu_j}{\mu_0} - \beta\frac{\mu_i}{\mu}\left[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)\right]^3\frac{\mu_j}{\mu_0} =$$

$$= -\alpha\left[\psi(\mu_i) - \psi(\mu_0)\right]^3\frac{\mu}{\mu_i} - \beta\frac{\mu_i}{\mu}\left[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)\right]^3\frac{\mu}{\mu_i} =$$

$$= -\alpha\left[\psi(\mu_i) - \psi(\mu_0)\right]^3\frac{\mu}{\mu_i} - \beta\left[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)\right]^3 \qquad (690)$$

(Pro Cauchyho napětí $\sigma_{jj}$ platí týž vztah po záměně indexů $i$ a $j$.)

**Rovnoměrné namáhání.** Mnohdy se vyskytují případy rovnoměrného namáhání, kdy $\sigma_{ii} = \sigma_{jj} = \sigma$. Pak je také $\mu_i = \mu_j$ a vzhledem k (665) platí

$$\mu_i = \mu_j = \sqrt{\mu\,\mu_0} \qquad (691)$$

Vyjdeme-li z rovnice (689) nalezneme pro Cauchyho (skutečné) napětí při rovnoměrném namáhání rovnici

$$\sigma = -\alpha\,\xi\left(\sqrt{\mu\,\mu_0}\right)\frac{\mu}{\sqrt{\mu\,\mu_0}} - \beta\,\xi(\mu) + \left(\alpha\frac{\sqrt{\mu\,\mu_0}}{\mu_0} + \beta\right)\xi(\mu_0) =$$

$$= -\alpha\,\xi\left(\sqrt{\mu\,\mu_0}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} - \beta\,\xi(\mu) + \left(\alpha\sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} + \beta\right)\xi(\mu_0) \qquad (692)$$

Vyjdeme-li z alternativní rovnice (690), nalezneme alternativní vyjádření

$$\sigma = -\alpha\left[\psi\left(\sqrt{\mu\,\mu_0}\right) - \psi(\mu_0)\right]^3\frac{\mu}{\sqrt{\mu\,\mu_0}} - \beta\left[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)\right]^3 =$$

$$= -\alpha\left[\psi\left(\sqrt{\mu\,\mu_0}\right) - \psi(\mu_0)\right]^3\sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} - \beta\left[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)\right]^3 \qquad (693)$$

**Úprava vztahů.** Dosazením funkce $\xi$ dle (642) do (689) nalezneme pro **Cauchyho napětí** rovnici

$$\sigma_{ii} = -\alpha\,\xi(\mu_i)\frac{\mu}{\mu_i} - \beta\,\xi(\mu) + \left(\alpha\frac{\mu_j}{\mu_0} + \beta\right)\xi(\mu_0) = -\alpha\,k_p\frac{\mu_i^3}{\left[1-(\mu_i/\mu_m)^{2+a}\right]^3}\frac{\mu}{\mu_i} -$$

$$-\beta\,k_p\frac{\mu^3}{\left[1-(\mu/\mu_m)^{2+a}\right]^3} + \left(\alpha\frac{\mu_j}{\mu_0} + \beta\right)k_p\frac{\mu_0^3}{\left[1-(\mu_0/\mu_m)^{2+a}\right]^3} =$$

$$= -k_p\mu_m^3\left\{\alpha\frac{\mu_i^2\mu/\mu_m^3}{\left[1-(\mu_i/\mu_m)^{2+a}\right]^3} + \beta\frac{\mu^3/\mu_m^3}{\left[1-(\mu/\mu_m)^{2+a}\right]^3} - \left(\alpha\frac{\mu_j}{\mu_0} + \beta\right)\frac{\mu_0^3/\mu_m^3}{\left[1-(\mu_0/\mu_m)^{2+a}\right]^3}\right\} \quad (694)$$

Z rovnice (665) vyplývají vztahy

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu_i^2\mu}{\mu_m^3} &= \frac{\mu^2\mu_0^2}{\mu_j^2}\frac{\mu}{\mu_m^3} = (\mu/\mu_m)^3(\mu_0/\mu_j)^2 \\ \frac{\mu_i}{\mu_m} &= \frac{\mu\,\mu_0}{\mu_j}\frac{1}{\mu_m} = (\mu/\mu_m)(\mu_0/\mu_j) \end{aligned}\right\} \quad (695)$$

a po jejich dosazení do (694) vznikne výraz

$$\sigma_{ii} = -k_p\mu_m^3\left\{\alpha\frac{(\mu/\mu_m)^3(\mu_0/\mu_j)^2}{\left[1-(\mu/\mu_m)^{2+a}(\mu_0/\mu_j)^{2+a}\right]^3} + \beta\frac{(\mu/\mu_m)^3}{\left[1-(\mu/\mu_m)^{2+a}\right]^3} -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\alpha}{\mu_0/\mu_j} + \beta\right)\frac{(\mu_0/\mu_m)^3}{\left[1-(\mu_0/\mu_m)^{2+a}\right]^3}\right\} \quad (696)$$

Podobně dosazením funkce $\psi$ dle (645) do alternativního výrazu (690) nalezneme alternativní **Cauchyho napětí** ve tvaru

$$\sigma_{ii} = -\alpha\left[\psi(\mu_i) - \psi(\mu_0)\right]^3\frac{\mu}{\mu_i} - \beta\left[\psi(\mu) - \psi(\mu_0)\right]^3 =$$

$$= -\alpha\left[\sqrt[3]{k_p}\frac{\mu_i}{1-(\mu_i/\mu_m)^{2+a}} - \sqrt[3]{k_p}\frac{\mu_0}{1-(\mu_0/\mu_m)^{2+a}}\right]^3\frac{\mu}{\mu_i} -$$

$$-\beta\left[\sqrt[3]{k_p}\frac{\mu}{1-(\mu/\mu_m)^{2+a}} - \sqrt[3]{k_p}\frac{\mu_0}{1-(\mu_0/\mu_m)^{2+a}}\right]^3 =$$

$$= -k_p\mu_m^3\left\{\alpha\left[\frac{\mu_i/\mu_m}{1-(\mu_i/\mu_m)^{2+a}} - \frac{\mu_0/\mu_m}{1-(\mu_0/\mu_m)^{2+a}}\right]^3\frac{\mu}{\mu_i} +\right.$$

$$\left.+\beta\left[\frac{\mu/\mu_m}{1-(\mu/\mu_m)^{2+a}} - \frac{\mu_0/\mu_m}{1-(\mu_0/\mu_m)^{2+a}}\right]^3\right\} \quad (697)$$

Dosazením (665) ve tvaru $\mu/\mu_i = \mu_j/\mu_0$ a druhé rovnice ze vztahu (695) do (697) vznikne výraz

$$\sigma_{ii} = -k_p\mu_{\mathrm{m}}^3\left\{\alpha\left[\frac{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})(\mu_0/\mu_j)}{1-(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}(\mu_0/\mu_j)^{2+a}} - \frac{\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}}{1-(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}}\right]^3\frac{1}{\mu_0/\mu_j} + \right.$$
$$\left. + \beta\left[\frac{\mu/\mu_{\mathrm{m}}}{1-(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}} - \frac{\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}}{1-(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}}\right]^3\right\} \tag{698}$$

*Poznámky:* *1)* Výraz (696) či alternativní výraz (698) lze chápat jako funkci proměnné $\mu/\mu_{\mathrm{m}}$, jejímiž parametry jsou vedle $k_p, \mu_{\mathrm{m}}, \alpha$ a $\beta = 1-\alpha$ též poměry $\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}$ a $\mu_0/\mu_j = 1+\varepsilon_j$ (viz rovnice (664) ).

*2)* Vztah pro $\sigma_{jj}$ vznikne z (696) či alternativně z (698) záměnou indexů *i* a *j*.

Pro **Cauchyho napětí** $\sigma_{ii} = \sigma_{jj} = \sigma$ **při rovnoměrném namáhání** platí vztah (691), jehož užitím lze nalézt též výrazy

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mu_0}{\mu_j} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu\mu_0}} = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\mu}} = \frac{\sqrt{\mu_0}\sqrt{\mu_{\mathrm{m}}}}{\sqrt{\mu_{\mathrm{m}}}\sqrt{\mu}} = \frac{(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{1/2}}{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{1/2}}\\
&(\mu/\mu_{\mathrm{m}})(\mu_0/\mu_j) = (\mu/\mu_{\mathrm{m}})\frac{(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{1/2}}{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{1/2}} = (\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{1/2}(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{1/2}\\
&(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^3(\mu_0/\mu_j)^2 = (\mu/\mu_{\mathrm{m}})^3\frac{(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})}{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})} = (\mu/\mu_{\mathrm{m}})^2(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})
\end{aligned}\right\} \tag{699}$$

Z rovnice (696) užitím (699) vznikne vztah

$$\sigma = -k_p\mu_{\mathrm{m}}^3\left\{\alpha\frac{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^3\dfrac{(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})}{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})}}{\left[1-(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{\frac{2+a}{2}}(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{\frac{2+a}{2}}\right]^3} + \beta\frac{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^3}{\left[1-(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^3} - \right.$$
$$\left. - \left(\alpha\frac{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{1/2}}{(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{1/2}} + \beta\right)\frac{(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^3}{\left[1-(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^3}\right\} =$$
$$= -k_p\mu_{\mathrm{m}}^3\left\{\alpha\frac{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^2(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})}{\left[1-(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{\frac{2+a}{2}}(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{\frac{2+a}{2}}\right]^3} + \beta\frac{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^3}{\left[1-(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^3} - \right.$$
$$\left. - \left(\alpha\frac{(\mu/\mu_{\mathrm{m}})^{1/2}}{(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{1/2}} + \beta\right)\frac{(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^3}{\left[1-(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}})^{2+a}\right]^3}\right\} \tag{700}$$

a z rovnice (698) užitím (699) vznikne alternativní vztah

$$\sigma = -k_p \mu_{\mathrm{m}}^3 \left\{ \alpha \left[ \frac{\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right) \dfrac{\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{1/2}}{\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{1/2}}}{1-\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{\frac{2+a}{2}} \left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{\frac{2+a}{2}}} - \frac{\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}}{1-\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}} \right]^3 \frac{\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{1/2}}{\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{1/2}} + \right.$$

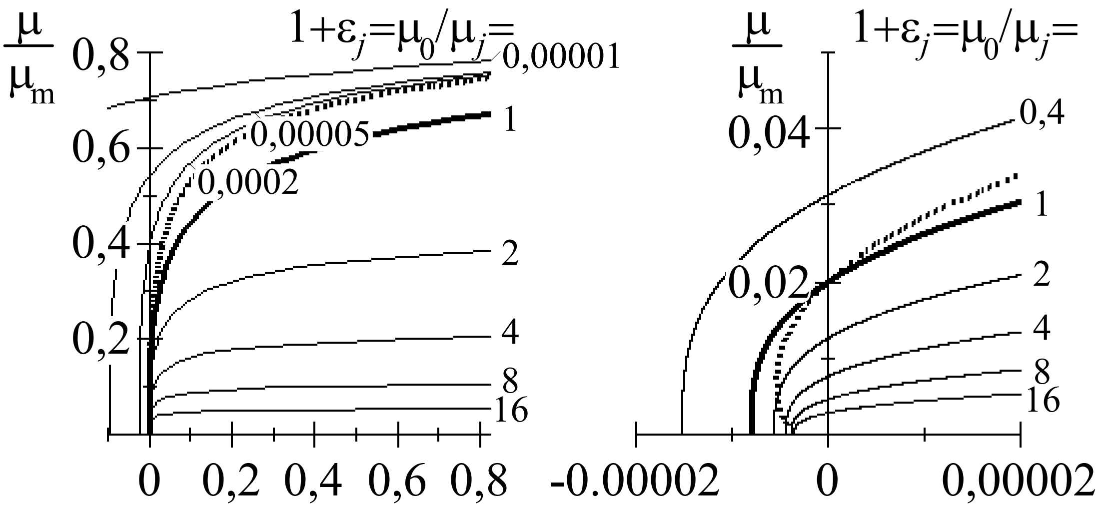
$$\left. + \beta \left[ \frac{\mu/\mu_{\mathrm{m}}}{1-\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}} - \frac{\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}}{1-\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}} \right]^3 \right\} =$$

$$= -k_p \mu_{\mathrm{m}}^3 \left\{ \alpha \left[ \frac{\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{1/2} \left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{1/2}}{1-\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{\frac{2+a}{2}} \left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{\frac{2+a}{2}}} - \frac{\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}}{1-\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}} \right]^3 \frac{\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{1/2}}{\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \beta \left[ \frac{\mu/\mu_{\mathrm{m}}}{1-\left(\mu/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}} - \frac{\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}}{1-\left(\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}\right)^{2+a}} \right]^3 \right\} \tag{701}$$

*Poznámka:* Výraz (700) či alternativní výraz (701) lze chápat jako funkci proměnné $\mu/\mu_{\mathrm{m}}$, jejímž parametrem je vedle $k_p$, $\mu_{\mathrm{m}}$, $\alpha$ a $\beta = 1-\alpha$ též poměr $\mu_0/\mu_{\mathrm{m}}$.

**Grafy** na obr. 58 a obr. 59 byly vypočteny pro hodnoty $\mu_0/\mu_{\mathrm{m}} = 0{,}02$ a $a = 1$. Na obr. 58 jsou zobrazeny křivky dle (696) a (700). Obr. 58a) vystihuje průběhy funkcí v širší oblasti, obr. 58b) charakterizuje detail průběhu kolem nulového napětí $\sigma_{ii}$ (přechod tlak - tah).



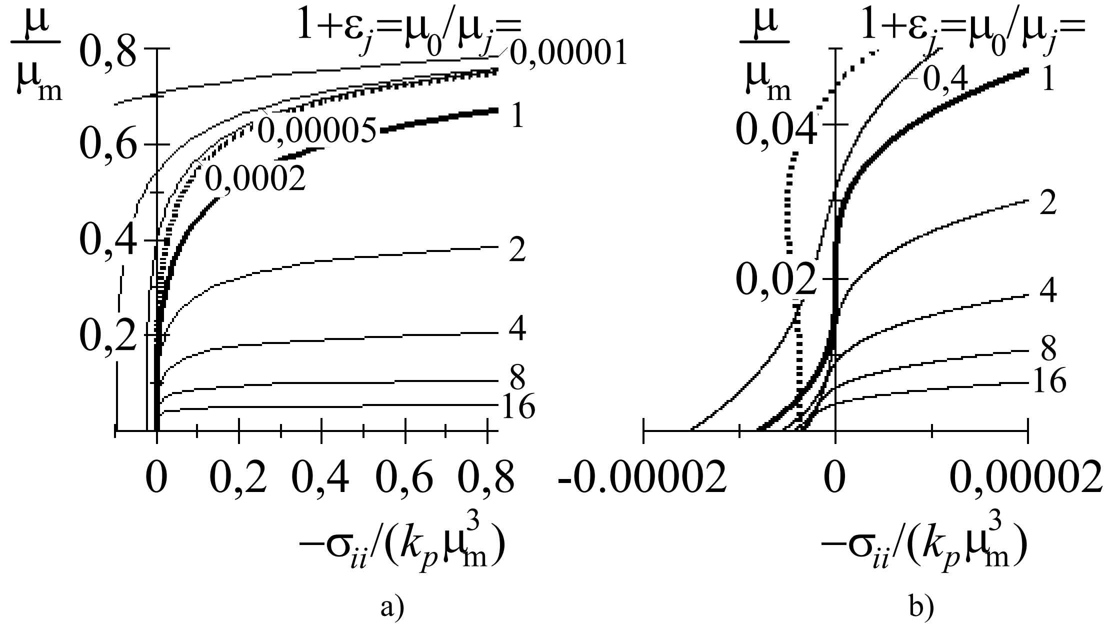

a) b)

—— rov. (696); - - - - - rov. (700) pro rovnoměrné namáhání $\sigma_{ii} = \sigma_{jj} = \sigma$

▬▬ rov. (696) při $\mu_0/\mu_j = 1+\varepsilon_j = 1$, tj. $\varepsilon_j = 0$ - totožná s rov. (641).

obr. 58

Na obr. 59 jsou zobrazeny křivky dle (697) a (701). Stejně jako v předchozím případě vystihuje obr. 59a) průběhy funkcí v širší oblasti a obr. 59b) detail průběhu kolem nulového napětí $\sigma_{ii}$ (přechod tlak - tah).




—— rov. (697); - - - - - rov. (701) pro rovnoměrné namáhání $\sigma_{ii} = \sigma_{jj} = \sigma$

━━ rov. (697) při $\mu_0/\mu_j = 1+\varepsilon_j = 1$, tj. $\varepsilon_j = 0$ - totožná s rov. (644).

obr. 59

Průběhy křivek v tlakové oblasti na obr. 58a) a obr. 59a) jsou prakticky totožné. Je z nich zřejmé, že čím větší je poměrné prodloužení $\varepsilon_j$, tím je pro dosažení stejného zaplnění $\mu$ nutno vynaložit větší tlak $-\sigma_{ii}$.

Křivky na obr. 58b) a obr. 59b) jsou však zřetelně odlišné. V obou případech je nulového zaplnění dosaženo konečnou hodnotou (tahového) napětí $\sigma_{ii}$. Průběh napětí při rovnoměrném namáhání (- - - - -) se v oblasti tahového namáhání "obrací", takže **při jedné hodnotě** (tahového) **napětí $\sigma_{ii}$ má vlákenný útvar dvě různé hodnoty zaplnění** $\mu$; to je ovšem **logicky nepřijatelné**. Platnost odvozených vztahů je tedy nutno **omezit** pouze na oblast $\sigma_{ii} \leq 0$ a $\sigma_{jj} \leq 0$.

*Poznámka:* Průběhy křivek v oblasti $\sigma_{ii} > 0$ jsou důsledkem dvou variant empirických korekcí, jež byly zavedeny v kap. 5.2 a vedly ke vztahům (629) a (630).

## Citovaná literatura


[1] Hladík, V. a kol. : Textilní vlákna. Praha 1970.

[2] Malinowska, K., *Prace Inst. Wlok.,* **29**, Lodż 1979.

[3] Ptáček, A. : Struktura rouna. *Kand. disert. práce*, VŠST Liberec, 1970.

[4] Peirce, F.T., *Textil. Res. J.*, **17**, 1926, s. T342.

[5] Militký, J. - Kovačič, V., *Textil. Res. J.*, **66**, 1996, s. 225.

[6] Wyk, C. M. van, *J. Textil. Inst.*, **37**, 1946, s. 118.

[7] Baljasov, P.D. : Sžatie těkstilnych volokon v mase i těchologia těkstilnovo proizvodstva. Moskva 1975.