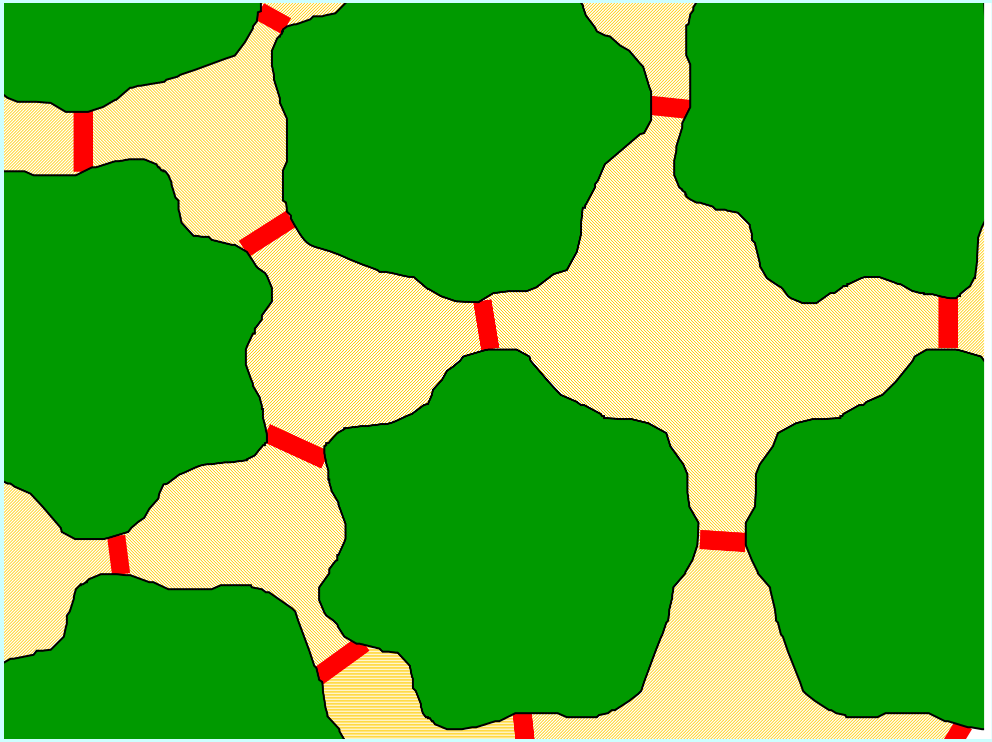
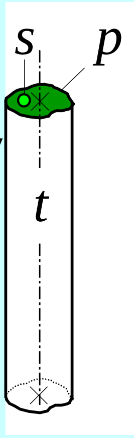
VLÁKNA A VLÁKENNÉ ÚTVARY 2

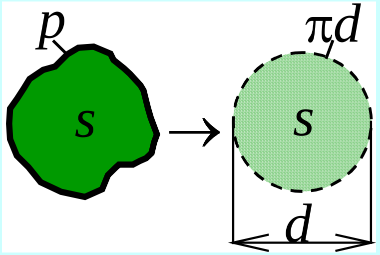
„MEZIVLÁKENNÉ PÓRY"



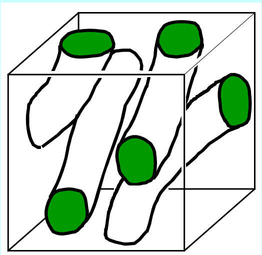
Výchozí veličiny a vztahy



t…jemnost vlákna, s…průřez vlákna, ρ…hustota vláken, d…ekvival. průměr vlákna, p…obvod průřezu vlákna, q…tvarový faktor průřezu, a…měrný povrch vláken, L…celková délka vláken, A…úhrnný povrch vláken, V…objem vláken, V_c…celkový objem TVÚ, μ…zaplnění. Odvodili jsme:



1. $t = s\rho, \quad s = \pi d^2/4, \quad d = \sqrt{4s/\pi} = \sqrt{4t/(\pi\rho)}$
2. $q = p/(\pi d) - 1 \geq 0, \quad p = \pi d(1+q)$
3. $A = pL = \pi d(1+q)L, \quad a = 4(1+q)/(\rho d)$
4. $\mu = V/V_c$, kde $V = Ls = L\pi d^2/4$



Dále zavedeme ještě **objemový povrch vláken**… γ

$$\gamma = \frac{\text{povrch vláken}}{\text{objem vláken}} = \frac{A}{V} = \frac{\pi d(1+q)L}{L\pi d^2/4}, \qquad \boxed{\gamma = \frac{4(1+q)}{d}}$$

nebo také $\gamma = \rho \underbrace{4(1+q)/(\rho d)}_{=a}$, $\boxed{\gamma = a\rho}$

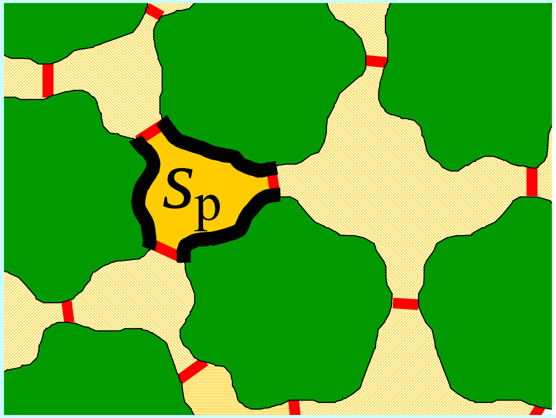
Póry a jejich charakteristiky

Objem prostoru (vzduchu) mezi vlákny… $V_p = V_c - V$

Porózita (relativní charakteristika tohoto prostoru)… $\psi = \dfrac{V_p}{V_c}$

$$\psi = \frac{V_p}{V_c} = \frac{V_c - V}{V_c} = 1 - \underbrace{\left(\frac{V}{V_c}\right)}_{=\mu}, \qquad \boxed{\psi = 1-\mu,}$$

Porózita charakterizuje objem mezivlákenných prostorů, ale neurčuje velikost „stěrbin“ mezi vlákny



Mezi vlákny proto „vhodně“ zavádíme **fiktivní** (pomyslné, imaginární) **hranice** (\), a tak rozdělujeme mezivlákenný prostor na tělesa připomínající „trubky“, „kapiláry “ či „vzduchová vlákna“; nazýváme je **póry**.

Každý (např. žlutý) pór:
- je v kontaktu s vlákny (černá reálná hranice), a také s okolními póry (červená fiktivní hranice),
- připomíná „vzduchové vlákno“ $\Rightarrow$ platí analogické rovnice, jako pro vlákna. (Veličiny „vzduchových vláken“ budou značeny indexem ‘p’ – „pór“.)

Průřez póru… $s_p = \pi d_p^2 / 4$, $d_p = \sqrt{4 s_p / \pi}$

kde d_p…**ekvivalentní průměr póru**

Obvod průřezu póru… p_p – je definován jako délka <u>jen REÁLNÉ HRANICE</u> ! (Fiktivní hranice ve skutečnosti neexistují.) Proto obvod průřezu póru p_p může být i menší než obvod stejnoplochého kruhu; $0 < p_\mathrm{p} \lesseqgtr \pi d_\mathrm{p}^2/4$

Tvarový faktor póru… $\boxed{q_\mathrm{p} = p_\mathrm{p}/(\pi d_\mathrm{p}) - 1}$, $q_\mathrm{p} > -1$

(Z definice p_p plyne, že tvarový faktor póru může být i záporný.) Odtud <u>obvod průřezu póru</u>… $\boxed{p_\mathrm{p} = \pi d_\mathrm{p}(1 + q_\mathrm{p})}$

Předpoklad (zjednodušující)*:* Všechny póry v TVU jsou stejné (průměrné), takže pro každý pór platí stejné rovnice.

Celková délka pórů v TVÚ… L_p

Celkový objem pórů v TVÚ … $V_\mathrm{p} = \overbrace{s_\mathrm{p}}^{=\pi d_\mathrm{p}^2/4} L_\mathrm{p}$, $\boxed{V_\mathrm{p} = \dfrac{\pi d_\mathrm{p}^2}{4} L_\mathrm{p}}$

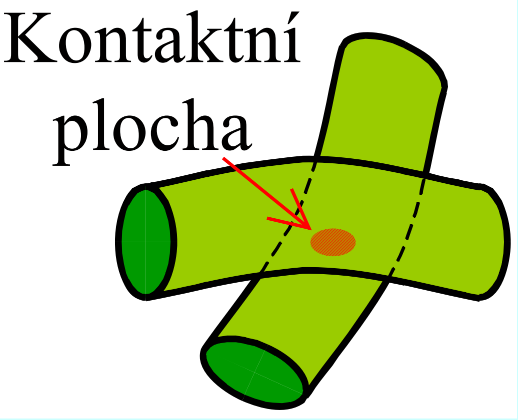
Celkový povrch pórů… $A_p = \overbrace{p_p}^{=\pi d_p(1+q_p)} L_p$, $\boxed{A_p = \pi d_p \left(1+q_p\right) L_p}$

Objemový povrch pórů…γ_p

$$\gamma_p = \overbrace{A_p}^{=\pi d_p(1+q_p)L_p} \Big/ \overbrace{V_p}^{=(\pi d_p^2/4)L_p} = \frac{\pi d_p \left(1+q_p\right) L_p}{\left(\pi d_p^2/4\right) L_p}, \quad \boxed{\gamma_p = \frac{4\left(1+q_p\right)}{d_p}}$$

Vztah mezi vlákny a póry

Úhrnný povrch vláken A (■) je obecně větší, než povrch pórů A_p. Styčné plochy vláken (■) patří do povrchu vláken, nepatří však do povrchu pórů. Jsou-li však malé, lze přijmout *předpoklad:* $\boxed{A_p = A}$



Užitím dříve odvozených vztahů nalezneme pro **objemový povrch pórů**

$$\gamma_p = \frac{\overbrace{A_p}^{=A}}{V_p} = \overbrace{\left(\frac{A}{V}\right)}^{=\gamma}\overbrace{\left(\frac{V}{V_c}\right)}^{=\mu}\overbrace{\left(\frac{V_c}{V_p}\right)}^{=1/\psi=1/(1-\mu)},$$

$$\boxed{\gamma_p = \gamma\frac{\mu}{1-\mu}}$$, nebo $$\gamma_p = \overbrace{\gamma}^{=4(1+q)/d}\frac{\mu}{1-\mu},\quad \boxed{\gamma_p = \frac{4(1+q)}{d}\frac{\mu}{1-\mu}}$$

Platí též $$\overbrace{\gamma_p}^{=4(1+q_p)/d_p} = \overbrace{\gamma}^{=4(1+q)/d}\frac{\mu}{(1-\mu)},\quad \frac{4(1+q_p)}{d_p} = \frac{4(1+q)}{d}\frac{\mu}{(1-\mu)},$$

$$\frac{d_p}{1+q_p} = \frac{d}{1+q}\frac{1-\mu}{\mu}$$ a odtud nalézáme

ekvivalentní průměr mezivlákenného póru

$$\boxed{d_p = \frac{1+q_p}{1+q}\frac{1-\mu}{\mu}d}$$

Ze vztahu pro celkový povrch pórů nalezneme

$$\underbrace{A_{\mathrm{p}}}_{=A=\pi d(1+q)L} = \pi \underbrace{d_{\mathrm{p}}}_{=\frac{1+q_{\mathrm{p}}}{1+q}\frac{1-\mu}{\mu}d} \left(1+q_{\mathrm{p}}\right) L_{\mathrm{p}}, \quad \pi d\left(1+q\right) L = \pi \frac{1+q_{\mathrm{p}}}{1+q}\frac{1-\mu}{\mu} d\left(1+q_{\mathrm{p}}\right) L_{\mathrm{p}},$$

Celková délka pórů v TVÚ…

$$\boxed{L_{\mathrm{p}} = \frac{\left(1+q\right)^2}{\left(1+q_{\mathrm{p}}\right)^2}\frac{\mu}{1-\mu} L}$$

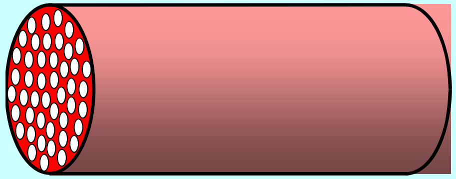
Problém použití vztahů:

Neznáme hodnotu tvarového faktoru pórů q_{p} ,

neboť 1) neznáme charakter uspořádání vláken v TVÚ a
2) neznáme fiktivní hranice pórů (i ve stejné struk-
tuře je můžeme volit různě).

Pozn.: Fiktivní hranice (****) můžeme zvolit nepřímo určením pravidla, které použijeme pro tvarový faktor póru.

Konvenční pór



Neznáme-li pravidlo pro tvarový faktor póru q_p, zavádíme alespoň <u>*konvenci*</u> $\boxed{q_p = 0}$.

(Takové póry odpovídají soustavě válcových trubek v kompaktní hmotě, ale jejich objem a povrch je <u>shodný s objemem a povrchem pórů</u> ve skutečné vlákenné struktuře.)

Pozn.: Veličiny konvenčního póru budou mít index *.

Platí tedy:

Ekvivalentní průměr konvenčního póru

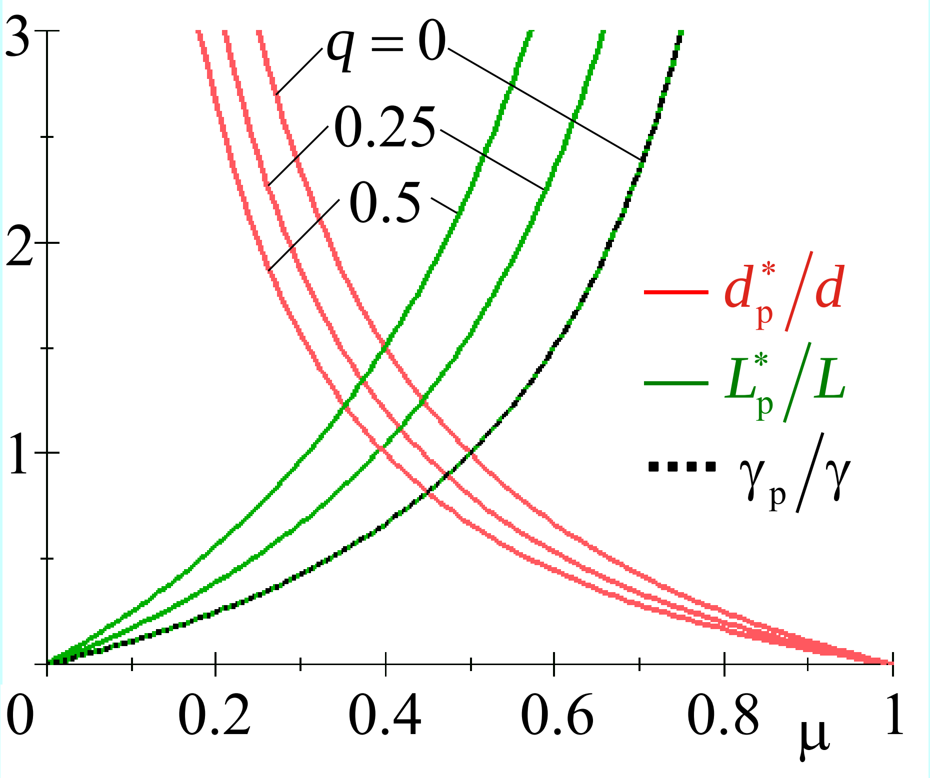
$$d_p^* = \frac{1+\overbrace{q_p}^{=0}}{1+q}\,\frac{1-\mu}{\mu}\,d, \qquad \boxed{d_p^* = \frac{1}{1+q}\,\frac{1-\mu}{\mu}\,d}$$

Celková délka konvenčních pórů

$$L_p^* = \frac{(1+q)^2}{\left(1+\underbrace{q_p}_{=0}\right)^2}\frac{\mu}{1-\mu}L,$$

$$L_p = (1+q)^2\frac{\mu}{1-\mu}L$$

Grafický průběh:



Pozn.: Objemový povrch pórů je nezávislý na tvarovém faktoru pórů. I pro konvenční pór stále platí

$$\gamma_p^* = \gamma_p = \gamma\frac{\mu}{1-\mu}$$

Póry s pravidlem pro tvarový faktor

Varianta I – KONSTANTNÍ TVAROVÝ FAKTOR PÓRU

Předpoklad: Tvarový faktor póru je nezávisle na zaplnění konstantní; q_{p}...konstanta, $\boxed{1+q_{\mathrm{p}}=k\text{...konstanta}}$

Ekvivalentní průměr póru

$$d_{\mathrm{p}}=\frac{\overbrace{1+q_{\mathrm{p}}}^{=k}}{1+q}\frac{1-\mu}{\mu}d, \qquad \boxed{d_{\mathrm{p}}=\frac{k}{1+q}\frac{1-\mu}{\mu}d,}$$

Celková délka pórů

$$L_{\mathrm{p}}=\frac{(1+q)^2}{\Big(\underbrace{1+q_{\mathrm{p}}}_{=k}\Big)^2}\frac{\mu}{1-\mu}L, \qquad \boxed{L_{\mathrm{p}}=\frac{(1+q)^2}{k^2}\frac{\mu}{1-\mu}L,}$$

...délka pórů roste se zaplněním

Pozn.: Konvenční pór je zvláštním případem, kdy $k=1$.

Varianta II – KONSTANTNÍ CELKOVÁ DÉLKA PÓRU

Předpoklad: Celková délka póru je nezávisle na zaplnění konstantní; L_{p}...konstanta

Platí $$L_{\mathrm{p}} = \frac{(1+q)^2}{(1+q_{\mathrm{p}})^2}\frac{\mu}{1-\mu}L, \qquad (1+q_{\mathrm{p}})^2\frac{1-\mu}{\mu} = (1+q)^2\frac{L}{L_{\mathrm{p}}},$$

Protože L_{p} je konstanta a nezávisle na zaplnění jsou L a q parametry vláken, je $(1+q)^2 L/L_{\mathrm{p}}$ konstantní. Proto také

$(1+q_{\mathrm{p}})^2\dfrac{1-\mu}{\mu}$ je konstantní a $\boxed{(1+q_{\mathrm{p}})\sqrt{\dfrac{1-\mu}{\mu}} = k \text{ ...konstanta}}$

Odtud pro **tvarový faktor pórů** platí $\boxed{1+q_{\mathrm{p}} = k\sqrt{\dfrac{\mu}{1-\mu}}}$ ...q_{p} roste se zaplněním

Ekvivalentní průměr póru

$$d_\mathrm{p} = \frac{1+q_\mathrm{p}}{1+q}\frac{1-\mu}{\mu}d = \frac{1}{1+q}\overbrace{\left(1+q_\mathrm{p}\right)\sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}}}^{=k}\sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}}d, \quad \boxed{d_\mathrm{p} = \frac{k}{1+q}\sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}}d}$$

Celková délka pórů

$$L_\mathrm{p} = \frac{\left(1+q\right)^2}{\left(\underbrace{1+q_\mathrm{p}}_{=k\sqrt{\mu/(1-\mu)}}\right)^2}\frac{\mu}{1-\mu}L = \frac{\left(1+q\right)^2}{k^2\frac{\mu}{1-\mu}}\frac{\mu}{1-\mu}L, \quad \boxed{L_\mathrm{p} = \frac{\left(1+q\right)^2}{k^2}L}$$

…konstanta (předpoklad)

<u>Komentář k variantám I a II:</u>

Ekvivalentní průměr póru podle var. I je $d_\mathrm{p} = \frac{k}{1+q}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{\mathbf{1}} d$, dle var. 2 $d_\mathrm{p} = \frac{k}{1+q}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{\mathbf{1/2}} d$. Podobnost obou vztahů nabízí možnost empirického zobecnění exponentu.

Varianta III– EMPIRICKY ZOBECNĚNÁ

Předpoklad: **Ekvivalentní průměr póru** je dán vztahem

$$\boxed{d_\mathrm{p} = \frac{k}{1+q}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^a d}$$, kde k,a...vhodné parametry

Obecně jsme odvodili $d_\mathrm{p} = \left[\left(1+q_\mathrm{p}\right)/\left(1+q\right)\right]\left[\left(1-\mu\right)/\mu\right]d$

takže musí platit $$d_\mathrm{p} = \overbrace{\frac{1+q_\mathrm{p}}{1+q}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^1 d}^{\text{obecně}} = \overbrace{\frac{k}{1+q}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^a d}^{\text{nyní}}$$

Odtud pro
tvarový faktor pórů platí $$\boxed{1+q_\mathrm{p} = k\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{a-1}}$$

Dále jsme obecně odvodili $L_\mathrm{p} = \left[\left(1+q\right)^2/\left(1+q_\mathrm{p}\right)^2\right]\left[\mu/\left(1-\mu\right)\right]L$

Nyní pro celkovou délku pórů platí

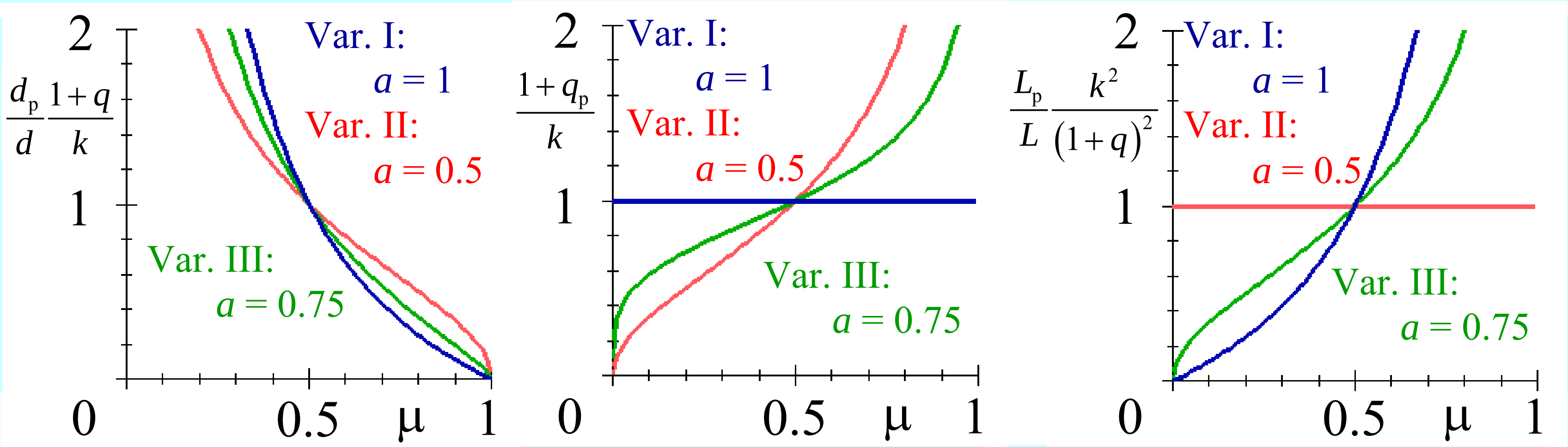
$$L_p = \frac{(1+q)^2}{\left(\underbrace{1+q_p}_{=k\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{a-1}}\right)^2} \frac{\mu}{1-\mu} L = \frac{(1+q)^2}{k^2\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{2a-2}} \frac{\mu}{1-\mu} L =$$

$$= \frac{(1+q)^2}{k^2}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{2a-2}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{1} L,$$

Celková délka pórů $\boxed{L_p = \frac{(1+q)^2}{k^2}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{2a-1} L}$ k, a...vhodné parametry

Pozn.: Proti variantám I a II, kde postačí stanovit (experimentálně) jen jeden parametr k, ve variantě III je nutné stanovit (experimentálně) dva parametry k a a.

Průběhy veličin var. I, II a III charakterizují grafy:



Pozn.: 1) Pro variantu III byla pro grafickou ilustraci zvolena hodnota parametru a=0,75.

2) Znovu připomeňme, že volba pravidla pro tvarový faktor póru je nepřímou metodou zavedení fiktivních hranic pórů, které je třeba volit různě pro studium různých fyzikálních jevů. Proto i experimentální určení parametru k (resp. parametrů k,a) musí být vázáno na studovaný jev.

Poznámky k možnému užití vztahů

Nechť známe: ekvivalentní průměr vlákna d, tvarový faktor vlákna q, celkovou délku vláken L a zaplnění TVÚ μ. Užitím předchozích rovnic lze nalézt: porózitu ψ, objemový povrch pórů γ_p (nezávisí na tvarovém faktoru pórů), konvenční průměr póru d_p^* a celkovou délku konvenčních pórů L_p^* .

Savost textilií (kapilární jevy)

Podle tradiční fyzikální teorie vzlíná kapalina kapilární elevací v tenké válcové kapiláře do výšky h. Ztotožníme-li povrch a objem válcových kapilár s povrchem a objemem mezivlákenných pórů, pak je **sací výška** h nepřímo úměrná konvenčnímu průměru pórů d_p^* . Je-li C konstantou úměrnosti, platí

$$h = \frac{C}{d_p^*}$$

Pozn.: Souhrnný materiálový parametr C je dán výrazem $C=4\sigma_{23}\cos\vartheta/(\rho_3 g)$ kde σ_{23} je povrchové napětí mezi stěnou kapiláry a kapalinou, ϑ je smáčecí úhel, ρ_3 je hustota kapaliny a g označuje gravitační zrychlení.

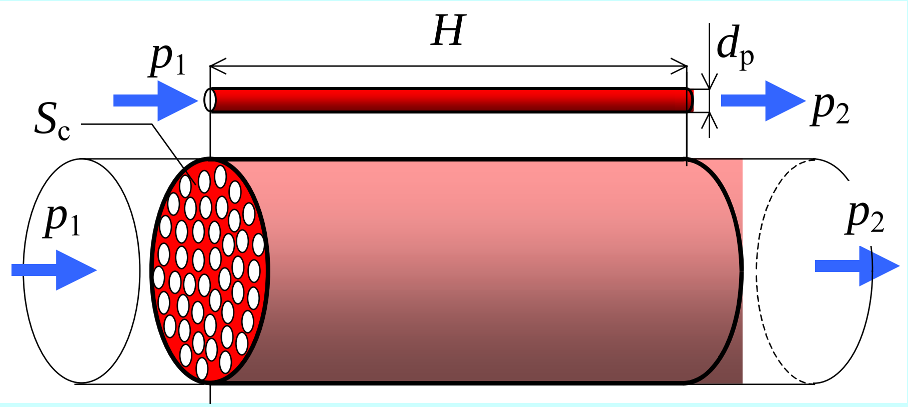
Protože tradiční fyzikální úvaha nezahrnuje specifika struktury TVÚ, lze doporučit obecnější vyjádření, kde místo konvenčního póru použijeme ekvivalentní průměr póru dle zobecněné varianty III, $h=C\Big/\overbrace{d_{\mathrm{p}}}^{=\frac{k}{1+q}\left[(1-\mu)/\mu\right]^a d}=\dfrac{C(1+q)}{k}\dfrac{1}{\left[(1-\mu)/\mu\right]^a}=$ $=\dfrac{C(1+q)}{kd}\left(\dfrac{\mu}{1-\mu}\right)^a$. Označíme-li souhrnný materiálový parametr $C_h=C(1+q)/(kd)$ nalezneme pro **sací výšku**

$$\boxed{h=C_h\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^a}$$

C_h, a...experimentální parametry

Tok tekutiny porózním vlákenným svazkem

Porózní materiál délky H, celkové průřezové plochy S_c je idealizován soustavou tenkých válcových pórů o průměru d_p. Průtok tekutiny je vyvozen tlakovým gradientem $\Delta p = p_1 - p_2$.



Fyzika tekutin odvozuje (užívajíc zákon Hagen-Poiseuille) **proteklý objem tekutiny za jednotku času**… Q

$$Q = \frac{S_c (1-\mu) d_p^2}{32\eta} \frac{\Delta p}{H}$$

kde η…dynamická viskosita tekutiny,
μ…zaplnění porézního materiálu

U TVÚ užijme vztah pro ekvivalentní průměr póru dle var. I, tj. $d_p = \left[k/(1+q)\right]\left[(1-\mu)/\mu\right]d$. Pro objemový povrch vláken jsme dříve nalezli (str. 3) $\gamma = 4(1+q)/d$. Odtud

$$d_p = \frac{k}{1+q}\frac{1-\mu}{\mu}d = k\frac{1-\mu}{\mu}\overbrace{\left(\frac{d}{1+q}\right)}^{=4/\gamma} = \frac{4k}{\gamma}\frac{1-\mu}{\mu},$$ a tedy

$$Q = \frac{S_c(1-\mu)\left(\overbrace{d_p}^{=(4k/\gamma)(1-\mu)/\mu}\right)^2}{32\eta}\frac{\Delta p}{H} = \frac{S_c\,(1-\mu)}{\underbrace{32}_{=2\cdot 16}\,\eta}\frac{16k^2}{\gamma^2}\frac{(1-\mu)^2}{\mu^2}\frac{\Delta p}{H},$$

$$\boxed{Q = \frac{k^2}{2\gamma^2\eta}\frac{S_c\Delta p}{H}\frac{(1-\mu)^3}{\mu^2}}$$

Tato rovnice je identická s rovnicí **Carman – Kozeny**, dobře známou z hydromechaniky.

Shrneme-li materiálové parametry do souhrnné konstanty $C_Q = k^2/\left(2\gamma^2\eta\right)$, lze Carman – Kozeneho rovnici psát ve tvaru

$$\boxed{Q = C_Q \frac{S_c \Delta p}{H} \frac{\left(1-\mu\right)^3}{\mu^2}}$$

, C_Q...souhrnný parametr vlákenného materiálu

Pozn.: Rovnice Carman – Kozeny je mj. východiskem pro určování jemnosti bavlněných vláken metodou „mic-ronaire“ („air flow“).

Obecnější řešení najdeme užitím zobecněného průměru póru dle var. III, tj. $d_\mathrm{p} = \left[k/\left(1+q\right)\right]\left[\left(1-\mu\right)/\mu\right]^a d$. Za užití $\gamma = 4\left(1+q\right)/d$ najdeme

$$d_\mathrm{p} = k\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^a \overbrace{\left(\frac{d}{1+q}\right)}^{=4/\gamma} = \frac{4k}{\gamma}\frac{\left(1-\mu\right)^a}{\mu^a},$$

Proteklý objem tekutiny za jednotku času je pak

$$Q=\frac{S_c(1-\mu)\left(\underbrace{d_p}_{=(4k/\gamma)(1-\mu)^a/\mu^a}\right)^2}{32\eta}\frac{\Delta p}{H}=\frac{S_c(1-\mu)}{\underbrace{32}_{=2\cdot 16}\eta}\frac{16k^2}{\gamma^2}\frac{(1-\mu)^{2a}}{\mu^{2a}}\frac{\Delta p}{H},$$

$$\boxed{Q=\frac{k^2}{2\gamma^2\eta}\frac{S_c\Delta p}{H}\frac{(1-\mu)^{2a+1}}{\mu^{a+1}}}$$

…**zobecnění rovnice Carman – Kozeny**

Užitím výrazu pro souhrnný parametr $C_Q=k^2/(2\gamma^2\eta)$ lze též psát

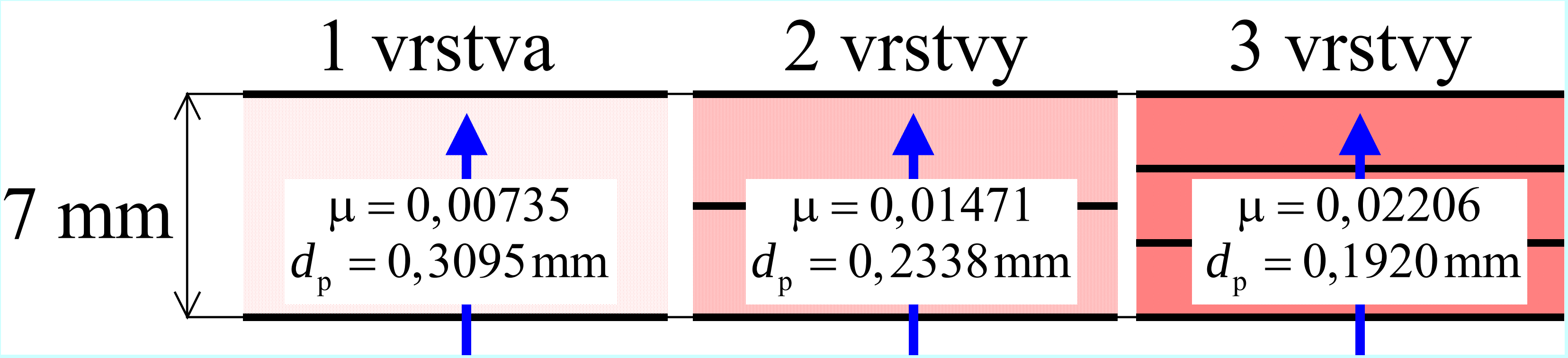
$$\boxed{Q=C_Q\frac{S_c\Delta p}{H}\frac{(1-\mu)^{2a+1}}{\mu^{a+1}}}$$

C_Q, a…souhrnné parametry vlákenného materiálu

Pozn.: Parametry C_Q , resp. C_Q a a, je třeba stanovit experimentálním studiem toku tekutiny daným materiálem.

Ilustrace praktických výsledků

Ekvivalentní průměr mezivlákenného póru (střední) lze měřit např. přístrojem *POROMETER* ("Porous Material Inc."). Průměr póru jsme měřili v 1, 2 a 3-vrstvém rounu (pavučině) o plošné hmotnosti $70\ \mathrm{g/m^2}$ z PES vláken $6{,}7\,\mathrm{dtex}$ ($d = 0{,}025\ \mathrm{mm}$). Vrstvy rouna byly stlačeny mezi deskami přístroje vždy na konstantní tloušťku $7\ \mathrm{mm}$. Hodnoty výsledného zaplnění a naměřené ekvivalentní průměry mezivlákenných pórů jsou uvedeny na schématu.



Oranžové body = experimentální výsledky

Plná čára – zobecněná var. III, hodnoty parametrů určeny regresně

Čárkovaná čára – var.II (konstantní délka pórů, tj. a = ½), parametr k určen regresně.

Resumé: Způsob měření se blíží modelu zachování délky pórů. (Obdoba filtrace aerosolu pevných částic.)