PŘÍLOHA 1

Některé základní pojmy a souvislosti teorie pravděpodobnosti

V této příloze připomeneme význam některých nejzákladnějších veličin a vztahů, které platí v teorii pravděpodobnosti. Zvolený způsob výkladu je možná trochu zjednodušený, zato však dovolí vytvořit si názornou představu a jejím prostřednictvím porozumět logickému smyslu užívaných veličin a prováděných operací.

Náhodná veličina. Uvažujme reálnou **náhodnou veličinu** x, která nabývá hodnot v rozmezí od $x_{\min}$ do $x_{\max}$. Říkáme, že **oborem hodnot náhodné veličiny** x je interval $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$. Takovou veličinou může být např. délka, úhel, pevnost a pod. Abychom poznali vlastnosti veličiny x, provádíme její **opakovaná měření**. Počet provedených měření označme N. Naměřené hodnoty x_j, $j = 1, 2, \cdots, N$ jsou různé, protože veličina x je náhodná.

V reálných podmínkách je počet měření N omezen časem, kapacitou laboratoře apod. V našich teoretických úvahách si však budeme *představovat*, že **počet měření je obrovský a lze jej bez omezení zvětšovat**; to vše v reálném (krátkém) čase.

Z posloupnosti naměřených hodnot x_j lze vyjadřovat (výběrové[1]) statistické charakteristiky, např. **střední hodnotu**

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j \tag{P1.1}$$

nebo **rozptyl**

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(x_j - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(x_j^2 - 2x_j\overline{x} + \overline{x}^2\right) = \tag{P1.2}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - 2\overline{x} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j + \overline{x}^2 \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} 1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - 2\overline{x}\overline{x} + \overline{x}^2 \frac{1}{N} N =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

kde

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \tag{P1.3}$$

je **střední hodnota kvadrátu** veličiny x. Pro (výběrovou) **směrodatnou odchylku** potom platí

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{P1.4}$$

Podobně lze vyjadřovat další centrální a obecné momenty aj.

---

[1] Provedeme-li konečný počet měření, nazýváme takový soubor **výběrem**.

Rozložení náhodné veličiny. Z posloupnosti hodnot x_j není bezprostředně zřejmé jejich **rozložení**, tj. není zřejmé ve kterých oblastech hodnot se naměřené údaje vyskytují četněji a ve kterých méně často. Pro studium rozložení rozdělujeme naměřené hodnoty do **tříd**. Obor hodnot $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$ se rozdělí na M tříd - třídních intervalů, obvykle tak, že mají stejnou **šířku třídy** δx.

$$\delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{M} \qquad \text{(P1.5)}$$

Jednotlivé třídy a k nim příslušné veličiny označujme **pořadovými čísly tříd** i, $i = 1, 2, \cdots, M$. Pořadová čísla, dolní a horní meze třídních intervalů jsou v prvých třech sloupcích tabulky P1-1. Ve čtvrtém sloupci jsou uvedeny tzv. **třídní hodnoty** x_i, dané středy třídních intervalů.

Tab. P1-1 *Tabulka rozdělení naměřených hodnot do tříd*

Třídy (třídní intervaly)				Naměřeno a vypočteno		
pořadové číslo třídy i	od (dolní mez)	do (horní mez)	třídní hodnota x_i	třídní četnost n_i	relativní četnost g_i	výška sloupce f_i
1	2	3	4	5	6	7
1	$x_{\min}$	$(x_{\min} + \delta x)$	$x_{\min} + \frac{1}{2}\delta x$	n_1	$g_1 = n_1/N$	$f_1 = g_1/\delta x$
2	$(x_{\min} + \delta x)$	$(x_{\min} + 2\delta x)$	$x_{\min} + \frac{3}{2}\delta x$	n_2	$g_2 = n_2/N$	$f_2 = g_2/\delta x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
M	$(x_{\max} - \delta x)$	$x_{\max}$	$x_{\max} - \frac{1}{2}\delta x$	n_M	$g_M = n_M/N$	$f_M = g_M/\delta x$
			Celkem:	$N = \sum_{i=1}^{M} n_i$	$1 = \sum_{i=1}^{M} g_i$	

Všechny naměřené hodnoty nyní zařadíme do jednotlivých tříd a stanovíme počet hodnot v jednotlivých třídách - tzv. **třídní četnosti** n_i. Jsou uvedeny v pátém sloupci tabulky. Přirozeně platí

$$\sum_{i=1}^{M} n_i = N \qquad \text{(P1.6)}$$

neboť do tříd jsme zařadili všechny naměřené hodnoty.

Třídní četnosti již poskytují jakýsi obraz o rozložení naměřených hodnot. (V některých třídách se měřené hodnoty vyskytují více než v jiných.) Velikosti hodnot n_i však závisí také na celkovém počtu měření N a na šířce tříd δx. (Při větším počtu měření a při větší šířce tříd rostou hodnoty třídních četností.)

Vliv počtu měření na hodnoty třídní četnosti vymezíme zavedením **relativních četností**

$$g_i = \frac{n_i}{N} \qquad \text{(P1.7)}$$

Uvažujeme, že počet měření N je obrovský. Jestliže takový počet měření N např. zdvojnásobíme, můžeme očekávat, že se také všechny hodnoty třídních četností n_i „skoro přesně" zdvojnásobí. Relativní četnost se však dle (P1.7) „skoro vůbec" nezmění. Přirozeně platí

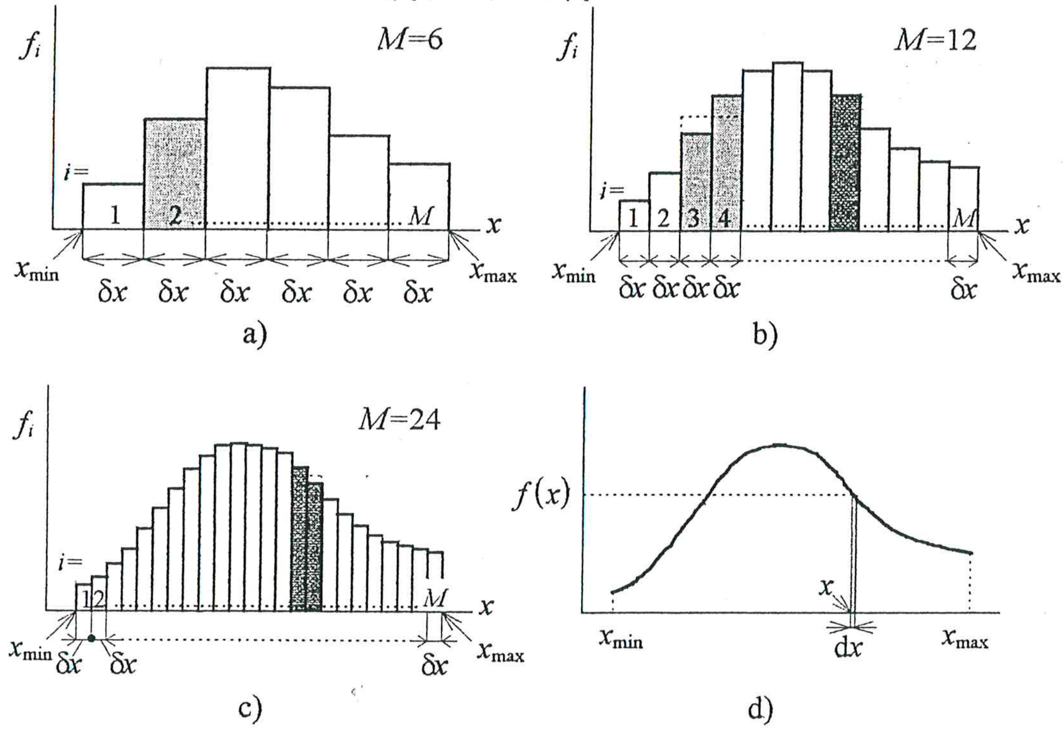
$$\sum_{i=1}^{M} g_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{M} n_i = \frac{1}{N} N = 1 \qquad \text{(P1.8)}$$

Relativní četnosti jsou stále ještě závislé na šířce tříd δx. Tuto závislost odstraníme, zavedeme-li veličiny

$$f_i = \frac{g_i}{\delta x} \qquad \left(g_i = f_i\,\delta x \right) \tag{P1.9}$$

uvedené v sedmém sloupci tab. P1-1. Hledané rozložení nyní charakterizujeme **histogramem**, jehož **výšky sloupců** jsou f_i.

Schematicky je takový histogram znázorněn na obr. P1-1a). Na abscise je obor hodnot náhodné proměnné, tj. interval $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$, rozdělen do M tříd (v příkladu $M = 6$). Šířka třídy δx je určena vztahem (P1.5). Vynesené sloupce mají výšku f_i. Podle (P1.9) je zřejmé, že každá **plocha sloupce histogramu $f_i\,\delta x$ je relativní četností g_i ve třídě**. (Např. světle šedá plocha je relativní četností g_2 ve druhé třídě.) Dále je podle (P1.8) zřejmé, že **souhrnná plocha všech sloupců histogramu $\sum_{i=1}^{M} (f_i\,\delta x) = \sum_{i=1}^{M} g_i$ je rovna 1**.



obr. P1-1 *Histogramy relativních četností a hustota pravděpodobnosti rozložení*

Na obr. P1-1b) jsou naměřené hodnoty rozděleny do **dvojnásobného počtu tříd** M (tj. $M = 12$), které mají podle (P1.5) poloviční šířku δx. Hodnoty, které původně patřily do jedné světle šedé třídy na obr. P1-1a) nyní patří do dvou světle šedých tříd na obr. P1-1b). (Světle šedá plocha sloupce 2. třídy na obr. P1-1a) se rozdělila na dvě světle šedé plochy 3. a 4. třídy v obr. P1-1b).) Rovněž v tomto histogramu má plocha sloupce význam relativní četnosti ve třídě a souhrnná plocha sloupců je rovna 1. Proto také kontury obou histogramů leží ve stejném místě nad abscisou a mají zhruba podobný tvar. Kontura histogramu na obr. P1-1b) má ovšem jemnější „schody“.

Jestliže znovu zdvojnásobíme počet tříd ($M = 24$), vznikne analogicky histogram na obr. P1-1c). Tmavošedá třída na obr. P1-1b) se „rozpadne" do dvou tmavošedých tříd na obr. P1-1c) a pod. Kontura histogramu na obr. P1-1c) má „schody" ještě jemnější.

I dalším zvětšováním počtu tříd by se šířka třídy zmenšovala, kontury histogramu by měly stále zhruba podobný „tvar", přičemž „schody" této kontury by byly stále jemnější, plocha každého sloupce by stále znamenala relativní četnost ve třídě a souhrnná plocha sloupců by byla trvale rovna 1. To vše by ovšem platilo, jen pokud by každý nově zvolený (větší) počet tříd M byl velmi malý ve srovnání s počtem měření, $M \ll N$. (Kdybychom např. zvolili počet tříd o hodně větší než počet měření, třídní četnosti by většinou byly buď 0, nebo nějaká malá čísla. Tvar histogramu by se potom výrazně změnil a připomínal by jakési náhodné „hrábě".)

Navrhněme proto modifikaci našeho postupu. Vždy, **ještě předtím, než zdvojnásobíme počet tříd, zvětšíme na dvojnásobek počet měření**. Hodnoty třídních četností n_i se tím „skoro přesně" zdvojnásobí (už výchozí počet měření byl obrovský) a relativní četnosti ve třídách se „skoro vůbec" nezmění - viz úvaha za rovnicí (P.1.7). Tak zajistíme, aby i po zdvojnásobení počtu tříd pořád platilo $M \ll N$.

Nyní se nabízí otázka kam bychom dospěli, kdybychom dvojici činnosti - a) zdvojnásobení počtu měření a b) následné zdvojnásobení počtu tříd - opakovali až „do nekonečna". Exaktní odpověď na tuto otázku a matematický důkaz správnosti výsledků by vyžadovaly zavést řadu pojmů a operací z teorie pravděpodobnosti (např. vhodné definice konvergencí v pravděpodobnostním smyslu aj.); v tomto směru je nutno čtenáře odkázat na speciální literaturu. Zde se jen **intuitivním způsobem** pokusíme nalézt představu o logickém smyslu některých výrazů, které „v limitě" uvažovaného postupu vznikají.

1. Šířky tříd budou v postupně vznikajících histogramech stále menší, až se stanou „nekonečně malé". Takovou nekonečně malou třídu pojmenujeme **elementární třída** a její šířku označíme místo konečně velké hodnoty δx symbolem diferenciálu, tj. symbolem $\mathrm{d}x$.
2. Kontury postupně vznikajících histogramů si podrží stále zhruba stejný „tvar", ale „schody" této kontury se budou zmenšovat (zjemňovat) až se stanou „nekonečně malé", a tedy „neviditelné". Kontura histogramu se změní ve spojitou funkci, které říkáme **hustota pravděpodobnosti**. Místo dříve užívané posloupnosti výšek sloupců f_i vyjádříme hustotu pravděpodobnosti symbolem $f(x)$ - viz obr. P1-1d).
3. Protože elementárních tříd je nekonečně mnoho, není již možné identifikovat je pořadovými čísly i. Elementární třídě, jejíž dolní mez je x a horní mez je $x + \mathrm{d}x$ budeme prostě říkat „elementární třída v místě x".
4. „Plocha sloupce histogramu" příslušející elementární třídě je místo dřívější hodnoty $f_i\,\delta x$ vyjádřena nyní součinem $f(x)\,\mathrm{d}x$ - viz obr. P1-1d). V paralele k (P1.9) lze říci, že **výraz** $f(x)\,\mathrm{d}x$ **má význam relativní četnosti v elementární třídě** v místě x (ovšem při „nekonečně" velkém počtu měření).

5. V paralele k (P1.7) a (P1.8) **plocha pod křivkou funkce hustoty pravděpodobnosti je rovna 1**. (Místo sčítání $\sum_{i=1}^{M}$ konečného počtu ploch musíme ovšem užít integraci[2] $\int_{x_{min}}^{x_{max}}$.)

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)\,dx = 1 \tag{P1.10}$$

Poznámka: Pro jednoduchost intuitivních představ jsme uvažovali, že oborem hodnot náhodné proměnné x je konečně velký interval $\langle x_{min}, x_{max} \rangle$. Lze však dokázat, že výsledky našich představ jsou použitelné i když $x_{min} = -\infty$ a nebo $x_{max} = \infty$.

Statistické charakteristiky. Při konečném počtu tříd M lze vyjádřit různé (výběrové) statistické charakteristiky náhodné veličiny x z hodnot, které jsou zaznamenány např. v tabulce typu tab. P1-1. V každé třídě je znám počet naměřených hodnot n_i, ale konkrétní naměřené hodnoty uváděny nejsou. Víme však, že v dané třídě se žádná naměřená hodnota nelišila od třídní hodnoty x_i o více než $\delta x/2$. Zjednodušeně si proto představujeme, že naměřené údaje ve třídě měly stejnou všechny hodnotu - totiž třídní hodnotu x_i. Pro **střední hodnotu** potom v analogii k rovnici (P1.1) najdeme vztah $\bar{x} = \sum_{i=1}^{M} (n_i x_i)/N$ a

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M}(x_i n_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M}(x_i\, N g_i) = \sum_{i=1}^{M}(x_i g_i) \tag{P1.11}$$

Podobně najdeme v analogii k rovnici (P1.3) vztah pro **střední hodnotu kvadrátu** náhodné proměnné x. Užitím (P1.8) a (P1.9) nalezneme

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M}(x_i^2 n_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M}(x_i^2 N g_i) = \sum_{i=1}^{M}(x_i^2 g_i) \tag{P1.12}$$

V předchozích výrazech jsme místo naměřených hodnot užili třídní hodnoty x_i. Skutečná měření se mohla odlišovat od třídní hodnoty až o $\delta x/2$. Vypočtené charakteristiky jsou proto zatíženy jistou chybou, která se zmenšuje s klesající šířkou třídního intervalu δx.

Nabízí se otázka, jaké vztahy by platily po přechodu od histogramů s konečným počtem tříd k hustotě pravděpodobnosti. Podle našeho intuitivního způsobu uvažování bychom mohli využít předchozí dva vztahy a provést v nich následující změny:

1. Použít (místo relativní četnosti $g_i = f_i\,\delta x$ v i-té třídě) „relativní četnost" $f(x)\,dx$, příslušející „elementární třídě v místě x". (Současně se odstraní i dříve uvažovaná chyba výpočtu, neboť elementární třída má šířku třídy nekonečně malou.)
2. Použít (místo třídní hodnoty x_i v i-té třídě) hodnotu x jako třídní hodnotu „elementární třídy v místě x". (V elementární třídě splývají dolní mez, horní mez i třídní hodnota.)
3. Místo sčítání $\sum_{i=1}^{M}$ použít integraci $\int_{x_{min}}^{x_{max}}$.

Z rovnic (P1.11) a (P1.12) potom vzniknou vztahy známé z matematické statistiky.

$$\bar{x} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x\, f(x)\,dx \tag{P1.13}$$ [3]

[2] V historii matematiky se jako znak sčítání nekonečného počtu nekonečně malých veličin původně užívalo písmeno S z latinského „suma" = **součet**. Později bylo písmeno S „protaženo" a vznikl symbol integrálu ∫.

$$\overline{x^2} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(P1.14)}^3$$

(Pro **rozptyl** ve všech případech platí nezměněný vztah (P1.2) a **pro směrodatnou odchylku** nezměněný vztah (P1.4).)

Pravděpodobnost. Hledejme pravděpodobnost, že náhodně vybraná hodnota ze souboru dříve provedených měření leží v dané třídě. Podle klasické definice je pravděpodobnost poměrem počtu případů, kdy nastal sledovaný jev ku počtu všech případů. Jestliže jsme provedli N měření a z tohoto množství n_i měření příslušelo do i-té třídy ($i = 1,2,\cdots,M$), potom pravděpodobnost, že náhodně vybraná (minulá) hodnota patří do i-té třídy je $P_i = n_i/N$. Užitím (P1.7) lze uvažovanou pravděpodobnost vyjádřit také tvarem

$$P_i = \frac{n_i}{N} = g_i \qquad (P_i = f_i\,\delta x) \qquad \text{(P1.15)}$$

V daném případě **pravděpodobnost a relativní četnost mají stejnou hodnotu**, tj. pravděpodobnost „je" relativní četností a naopak.

Uvažujeme, že jsme provedli obrovský počet N měření. Budeme-li v budoucnu provádět nějaká další měření, je „téměř jisté", že charakter jejich rozložení bude „prakticky stejný", jako charakter rozložení měření minulých. Pravděpodobnost, že hodnota budoucího měření bude patřit do i-té třídy bude „téměř jistě" „skoro stejná", jako dříve stanovená hodnota P_i. (P_i je nejlepším odhadem pravděpodobnosti budoucího jevu.)

Pojmy relativní četnost a pravděpodobnost se obvykle užívají v odlišných souvislostech. „Relativní četnost" používáme, chceme-li pojmenovat veličinu, kterou jsme získali poté, co jsme vyhodnotili minulá měření; **relativní četnost vzniká „ex post"**. Naproti tomu pojem „pravděpodobnost" (nebo odhad pravděpodobnosti) je sice určen z minulých studií, ale je východiskem našich úvah o budoucnosti; **pravděpodobnost je užívána „ex ante"**. Obvykle postupujeme tak, že nejprve nalezneme relativní četnost zkoumaného jevu a potom ji ve významu (odhadu) pravděpodobnosti užijeme pro další úvahy.

Stejné představy, jaké jsme si vytvořili o pojmu relativní četnosti a pravděpodobnosti ve třídě s konečnou šířkou, můžeme použít i pro „elementární třídy". Význam veličiny $f(x)\,\mathrm{d}x$ tak můžeme chápat nejen ve významu jakési „relativní četnosti v elementární třídě" (jak jsme uvedli již dříve), ale současně také jako **pravděpodobnost výskytu**[4] (budoucí naměřené hodnoty) **v elementární třídě**.

---

[3] Pro tzv. základní soubor (nekonečně velký) a pro výběr (konečně velký soubor) se v matematické statistice používají tradičně jiné symboly. U základního souboru se střední hodnota obvykle značí symbolem $E(x)$ či μ, střední hodnota kvadrátu $E(x^2)$. U výběru se střední hodnota nazývá „průměr" a označuje $\bar{x}$ střední hodnota kvadrátu $\overline{x^2}$. Ve zdejším vysvětlení, pojatém intuitivně, toto odlišení nezavádíme.

[4] Častým omylem začátečníků je považovat za pravděpodobnost v elementární třídě $f(x)$, místo správného $f(x)\,\mathrm{d}x$.