# Řešené příklady - 2. část

- **Integrace racionální funkce.**
- **Výpočet integrálů kombinováním metod.**

**Příklad 1.**

Spočtěte neurčitý integrál:

$$\int \frac{2x-5}{x^2+x-2}\, dx$$

*Postup:* Stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, dělit tedy nebudeme. Určíme kořeny polynom $Q(x)$ a rozložíme ho na součin kořenových činitelů. Q(x) má dva reálné kořeny, v rozkladu proto budou dva parciální zlomky prvního typu.

$$\int \frac{2x-5}{x^2+x-2}\, dx = \int \frac{2x-5}{(x+2)(x-1)}\, dx = \int \left( \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \right) dx$$

Nyní řešíme pomocnou rovnici:

$$\frac{2x-5}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

$$2x-5 = A(x-1) + B(x+2)$$

Čísla $A, B$ najdeme dosazovací metodou, kdy za $x$ dosadíme vhodné hodnoty:
$x = -2: \quad -9 = -3A \quad \Rightarrow \; A = 3$
$x = 1: \quad -3 = 3B \quad \Rightarrow \; B = -1$
Hodnoty $A, B$ dosadíme do parciálních zlomků a dva dílčí integrály spočteme substituční metodou:

$$\int \left( \frac{3}{x+2} + \frac{-1}{x-1} \right) dx = \left\| \begin{array}{ll} t = x+2 & s = x-1 \\ dt = dx & ds = dx \end{array} \right\| =$$

$$= 3 \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{1}{s}\, ds = 3 \ln|x+2| - \ln|x-1| + c$$

Integrál existuje např. na intervalu $(1, \infty)$.

**Příklad 2.**

Spočtěte neurčitý integrál:

$$\int \frac{5x^2+4x}{x^3+2x^2}\, dx$$

*Postup:* Stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Výraz v integrálu upravíme, pak si rozložíme polynom ve jmenovateli:

$$\int \frac{5x^2+4x}{x^3+2x^2}\, dx = \int \frac{5x+4}{x^2+2x}\, dx = \int \frac{5x+4}{x(x+2)}\, dx = \int \left( \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \right) dx$$

Q(x) má dva reálné kořeny, v rozkladu jsou dva parciální zlomky prvního typu. Dostáváme pro ně rovnici:

$$\frac{5x+4}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$$5x + 4 = A(x+2) + Bx$$

Čísla $A, B$ najdeme opět dosazovací metodou:
$x = 0: \quad 4 = 2A \quad \Rightarrow \; A = 2$
$x = -2: \quad -6 = -2B \quad \Rightarrow \; B = 3$
Hodnoty $A, B$ dosadíme do parciálních zlomků:

$$\int \left( \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2} \right) dx = \left\| \begin{array}{l} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right\| = 2 \ln |x| + 3 \int \frac{1}{t} \, dt =$$

$$= 2 \ln |x| + 3 \ln |x+2| + c$$

Integrál existuje např. na intervalu $(0, \infty)$.

**Příklad 3.**

Spočtěte neurčitý integrál:

$$\int \frac{5x-7}{x^2 - 4x + 4} \, dx$$

*Postup:* Opět není potřeba dělit. Polynom $Q(x)$ má jeden kořen, proto použijeme rozklad druhého typu:

$$\int \frac{5x-7}{x^2-4x+4} \, dx = \int \frac{5x-7}{(x-2)^2} \, dx = \int \left( \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \right) dx$$

Zvlášť řešíme:

$$\frac{5x-7}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$5x - 7 = A(x-2) + B$$

$$5x - 7 = Ax - 2A + B$$

Čísla $A, B$ najdeme porovnávací metodou - porovnáme koeficienty u stejných mocnin $x$ na levé i pravé straně rovnice:
st. $1: \quad 5 = A$
st. $0: \quad -7 = -2A + B \quad \Rightarrow \; B = 3$
Vypočtené hodnoty dosadíme do parciálních zlomků a řešíme substituční metodou:

$$\int \left( \frac{5}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} \right) dx = \left\| \begin{array}{l} t = x-2 \\ dt = dx \end{array} \right\| = \int \left( \frac{5}{t} + \frac{3}{t^2} \right) dt =$$

$$= 5 \ln |t| + 3 \frac{t^{-1}}{-1} + c = 5 \ln |x-2| - \frac{3}{x-2} + c$$

Integrál existuje na intervalu $(2, \infty)$ a také na intervalu $(-\infty, 2)$.

**Příklad 4.**

Spočtěte neurčitý integrál:

$$\int \frac{2x^3 + 10x^2 - 6x - 5}{x^2 + 3x} \, dx$$

*Postup:* Polynom v čitateli má vyšší stupeň než ve jmenovateli, proto nejprve dělíme:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + 10x^2 - 6x - 5) : (x^2 + 3x) = 2x + 4 + \frac{-18x-5}{x^2+3x} \\
\underline{-(2x^3 + 6x^2)} \\
\qquad 4x^2 - 6x \\
\quad \underline{-(4x^2 + 12x)} \\
\qquad\qquad -18x - 5
\end{array}
$$

Tedy:

$$\int \frac{2x^3 + 10x^2 - 6x - 5}{x^2 + 3x}\, dx = \int \left( 2x + 4 + \frac{-18x - 5}{x^2 + 3x} \right) dx = x^2 + 4x - \int \frac{18x + 5}{x^2 + 3x}\, dx$$

Poslední integrál spočítáme zvlášť:

$$\int \frac{18x + 5}{x^2 + 3x}\, dx = \int \frac{18x + 5}{x\,(x + 3)}\, dx = \int \left( \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} \right) dx$$

Nyní řešíme:

$$\frac{18x + 5}{x\,(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3}$$

$$18x + 5 = A\,(x + 3) + B\,x$$

Dosazovací metodou dostaneme:

$x = 0$ : $\quad 5 = 3\,A \quad \Rightarrow \; A = \frac{5}{3}$

$x = -3$ : $\quad -49 = -3\,B \quad \Rightarrow \; B = \frac{49}{3}$

Vypočtené hodnoty dosadíme do zlomků v integrálu a dořešíme. Celkový výsledek:

$$\int \frac{2x^3 + 10x^2 - 6x - 5}{x^2 + 3x}\, dx = x^2 + 4x - \frac{5}{3}\, \ln|x| - \frac{49}{3}\, \ln|x + 3| + c$$

Integrál existuje např. na intervalu $(-\infty, -3)$.

**Příklad 5.**

Spočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{x^4 - 1}{x - 1}\, dx.$$

*Postup:* Čitatel má větší stupeň než jmenovatel. Buď musíme dělit, nebo se zde můžeme dělení vyhnout použitím vzorců:

$$\int \frac{x^4 - 1}{x - 1}\, dx = \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x - 1} dx = \int \frac{(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)}{x - 1} dx =$$

$$= \int (x^2 + 1)(x + 1)\, dx = \int (x^3 + x^2 + x + 1)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$$

Integrál existuje např. na intervalu $(1, \infty)$.

**Příklad 6.**

Spočtěte neurčitý integrál:

$$\int \frac{3 - x}{x^2 + 4x + 5}\, dx.$$

*Postup:* Polynom Q nemá reálné kořeny ($D < 0$) a oborem integrace je $R$. Pro výpočet použijeme vhodnou úpravu na součet dvou zlomků pro substituční metodu:

$$\int \frac{-x+3}{x^2+4x+5}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx + \int \frac{3+2}{x^2+4x+5}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| + 5\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + 5\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + 5\,\mathrm{arctg}\,(x+2) + c.$$

**Příklad 7.**

Sestavte parciální zlomky k racionální funkci:

$$f(x) = \frac{4x^3-7x+2}{(x-2)^3(x+5)}.$$

*Postup:* Je to racionální lomená funkce ve tvaru $\frac{P(x)}{Q(x)}$, která má st $Q(x) = 4$. Protože je st $P(x) = 3$, dělení provádět nebudeme. Ze zápisu funkce vidíme, že $Q(x)$ má jen reálné kořeny, a to trojnásobný kořen $x_1 = 2$ a jednonásobný kořen $x_2 = -5$. Proto parciální zlomky budou celkem 4, a to:

$$\frac{4x^3-7x+2}{(x-2)^3(x+5)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x+5)}.$$

*Další integrály budeme řešit kombinací různých metod.*

**Příklad 8.**

Spočtěte neurčitý integrál:

$$\int \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx$$

*Postup:* Integrál vede na substituční metodu s funkcemi sinus a kosinus. Proto integrand upravíme použitím vzorce, pak volíme substituci $t = \sin x$ (člen $\cos x$ se bude hodit pro $dt$). Předpoklady substituční metody jsou splněné na $R$.

$$\int \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{3+(1-\sin^2 x)}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right\| = \int \frac{1}{4-t^2}\,dt$$

Nyní funkci rozložíme na parciální zlomky a použijeme dosazovací metodu:

$$\frac{1}{4-t^2} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{2-t}$$
$$1 = A(2-t) + B(2+t)$$

$t = 2: \quad 1 = 4B \quad \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$t = -2: \quad 1 = 4A \quad \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

Hodnoty $A, B$ dosadíme do parciálních zlomků:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{2+t}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2-t}\,dt = \frac{1}{4}\ln|2+t| - \frac{1}{4}\ln|2-t| + c =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2+\sin x| - \frac{1}{4}\ln|2-\sin x| + c = \frac{1}{4}\,\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x} + c$$

(pro druhý integrál je $s = 2 - t \Rightarrow \quad ds = -dt$, v obou logaritmech jsou vnitřky absolutních hodnot kladné). Integrál existuje na $R$.

**Příklad 9.**

Spočtěte neurčitý integrál:

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx$$

*Postup:* Integrál počítáme nejprve metodou per partes, pak použijeme substituční metodu.

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int 1\,.\operatorname{arctg} x \, dx = \left\| \begin{array}{ll} f = \operatorname{arctg} x & f' = \frac{1}{1+x^2} \\ g' = 1 & g = x \end{array} \right\| =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left\| \begin{array}{l} t = 1 + x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array} \right\| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\,\ln|t| + c = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2) + c$$

Integrál existuje na $R$.

**Příklad 10.**

Najděte primitivní funkci na $(0,\infty)$ k funkci $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

*Postup:* Počítáme neurčitý integrál, nejprve substituční metodou, potom použijeme per partes:

$$F(x) = \int e^{\sqrt{x}}\,dx = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2tdt = dx \end{array} \right\| = \int e^t\,2t\,dt =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} u = 2t & u' = 2 \\ v' = e^t & v = e^t \end{array} \right\| = 2t\,e^t - \int 2e^t\,dt = 2t\,e^t - 2e^t + c =$$

$$= 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c = 2\,e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$$