Řešené příklady z FYI

FS – 2007/2008

1.2. *Fyzikální veličiny*

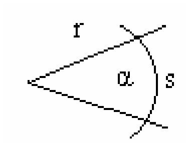
Příklad 1.2.1.

Vyjádřete úhel 1^{o} v radiánech (rad) a naopak.

Řešení:

Rovinný úhel α v radiánech je definován vztahem

$$\alpha = \frac{s}{r},$$



kde s je délka příslušného oblouku a r je poloměr příslušné kružnice.
Pro plný úhel platí:

$$\alpha = 360^\circ \quad ,$$

čemuž odpovídá

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{2\pi \cdot r}{r} = 2\pi \quad \text{rad} \ .$$

Pak

$$360^\circ = 2\pi \quad \text{rad},$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745\,\text{rad},$$

$$1\,\text{rad} = \frac{180}{\pi} = 57{,}29^\circ .$$

Příklad 1.2.2.

Přepočtěte rychlost v = 5 km/h na rychlost v $m.s^{-1}$ a rychlost 88 stop/s na rychlost v mi/h a $m.s^{-1}$, víte-li, že 1 mi = 1 míle = 5280 stop = 1609 m.

Řešení:

Vyjdeme z definičního vztahu pro rychlost a dosadíme převodní vztahy mezi příslušnými jednotkami:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{5\ \text{km}}{1\ \text{h}} = \frac{5 \cdot 10^3\ \text{m}}{3{,}6 \cdot 10^3\ \text{s}} = 1{,}39 \quad \text{m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

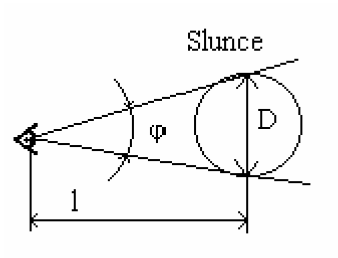
$$v = \frac{s}{t} = \frac{88 \text{ stop}}{1 \text{ s}} = \frac{88 \cdot \frac{1}{5280} \text{ mi}}{\frac{1}{3600} h} = 60 \;\; \text{mi} \cdot \text{h}^{-1}.$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{60 \text{ mi}}{1 \text{ h}} = \frac{60 \cdot 1609 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 26{,}8 \;\; \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

<u>Příklad 1.2.3.</u>

Zorný úhel, pod kterým vidíme Slunce je φ = 8,7.10^{-3} rad. Vypočtěte průměr Slunce D v metrech, jestliže víme, že je od nás vzdálené 9,3.10^{7} mi (1 mi = 1 míle = 5280 stop = 1609 m).

<u>Řešení:</u>



Slunce je od Země vzdáleno

$$l = 9{,}3 \cdot 10^{7} \text{ mi} = 9{,}3 \cdot 10^{7} \cdot 1609 \;\; \text{m}.$$

Vzhledem k tomu, že úhel φ je velmi malý, můžeme délku oblouku s položit přibližně rovnu průměru slunce D:

$$s = D \;\; .$$

Pak s použitím definice rovinného úhlu získáme:

$$D = l \cdot \varphi = 9{,}3 \cdot 10^{7} \cdot 1{,}609 \cdot 10^{3} \cdot 8{,}7 \cdot 10^{3} \cong 1{,}3 \cdot 10^{9} \;\; \text{m}.$$

<u>Příklad 1.2.4.</u>

Na základě rozměrové analýzy určete, který z následujících vztahů mezi vlnovou délkou λ, frekvencí f a fázovou rychlostí vlnění c je správný:

(1) $f=\lambda/c$

(2) $c=f/\lambda$

(3) $\lambda=c/f$.

<u>Řešení:</u>

Jednotky uvedených fyzikálních veličin jsou:

$$[f] = \text{s}^{-1}, \; [\lambda] = \text{m}, \; [c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dosadíme tyto jednotky postupně do vztahů (1), (2) a (3) a porovnáme levé a pravé strany:
(1)

$$f = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \mathrm{s}^{-1} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = \mathrm{s} \quad \textbf{ne}\ .$$

(2)

$$c = \frac{f}{\lambda} \Rightarrow \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = \frac{\mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{m}} = \mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1} \ \textbf{ne}.$$

(3)

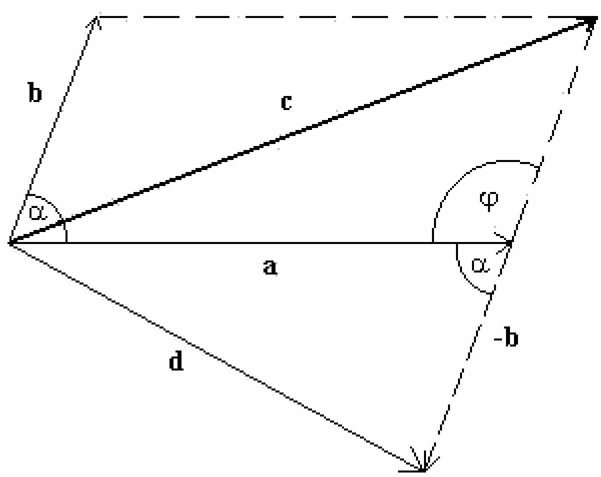
$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \mathrm{m} = \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{s}^{-1}} = \mathrm{m} \quad \textbf{ano}.$$

1.3. *Základy vektorového počtu*

<u>Příklad 1.3.1.</u>

Dva vektory **a** a **b** mají velikost a = 3 N a b = 2 N a svírají úhel $\alpha = 60^{o}$. Stanovte výrazy: $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$, $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, **a.b** a **a**x***b*.** Řešení nalezněte jednak graficky a jednak pomocí definičních vztahů.

<u>Řešení:</u>
Postup při grafickém řešení součtu a rozdílu vektorů **a** a **b** je zřejmý z obrázku:



Součet vektorů **a** a **b**:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\,,$$

Velikost výsledného vektoru **c** stanovíme s použitím kosinové věty:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi)} \quad ,$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(120^\circ\right)} = \sqrt{3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-0{,}5)} = 4{,}36 \quad \text{N.}$$

Rozdíl vektorů **a** a **b**:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}\,,$$

kde velikost výsledného vektoru **d** nalezneme opět s použitím kosinové věty:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)} = \sqrt{3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0{,}5} = 2{,}65 \quad \text{N.}$$

Skalární součin je definován vztahem:

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos(\alpha) = 3 \cdot 2 \cdot \cos\left(60^\circ\right) = 3 \quad \text{N}^2\,.$$

Vektorový součin vektorů **a** a **b** zapisujeme:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad ,$$

kde velikost výsledného vektoru *f* je definována vztahem:

$$f = ab\sin(\alpha) = 3 \cdot 2 \cdot 0{,}866 = 5{,}2 \quad \text{N}^2.$$

Příklad 1.3.2.

Pro vektory **a** = -2**i** + 4**j**, **b** = -4**j** + 3**k** stanovte **a** + **b** , **a - b**, **a.b** a **a**x**b**.

Řešení:

(1) Součet dvou vektorů

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (-4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}\,.$$

(2) Rozdíl dvou vektorů

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - (-4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\,.$$

(3) Skalární součin dvou vektorů

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (-4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 8\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} - 6\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} - 16\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + 12\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -16 \;,$$

neboť

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0,\;\; \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0,\;\; \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1,\;\; \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad ,$$

případně ve složkách

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (-2) \cdot (0) + (4) \cdot (-4) + (0) \cdot (3) = -16 \;.$$

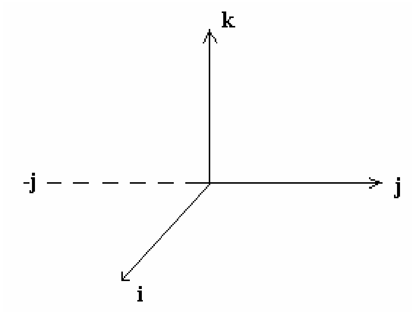
(4) Vektorový součin dvou vektorů

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \times (-4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 8(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - 6(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) - 16(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + 12(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) =$$
$$= 8\mathbf{k} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{i} = 12\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \quad ,$$

neboť

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\,,\;\; \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j},\;\; \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\;\; \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0} \quad ,$$

viz obrázek



případně ve složkách

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2 & 4 & 0\\ 0 & -4 & 3\end{vmatrix}=\mathbf{i}(3\cdot4-0\cdot-4)-\mathbf{j}(-2\cdot3-0\cdot0)+\mathbf{k}(-2\cdot-4-4\cdot0)=12\mathbf{i}+6\mathbf{j}+8\mathbf{k}\,.$$

2.1. *Kinematika hmotného bodu*

Příklad 2.1.1.

Hmotný bod se pohybuje po trajektorii dané v SI číselnými rovnicemi $x(t) = 2t^2 - 1$, $y(t) = t^2 + 1$, $z(t) = t^2$. Určete jeho rychlost v a zrychlení a v okamžiku t_1=3 s a dráhu s, kterou hmotný bod urazil za čas $\Delta t = t_1 - t_0$, kde t_0 = 0 s. Nakreslete průběhy veličin $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$, $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$, $a(t)$ a $s(t)$.

Řešení:

Složky rychlosti a zrychlení jsou rovny

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t\,,\;\; v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t\,,\;\; v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=2t\,,$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=4\,,\;\; a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=2\,,\;\; a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=2\,.$$

Velikost rychlosti nalezneme ze vztahu:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{16t^2+4t^2+4t^2}=\sqrt{24t^2}=2\sqrt{6}t. \qquad (1)$$

V čase t_1=3 s má rychlost velikost

$$v_1=2\sqrt{6}t_1=6\sqrt{6}\quad \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Velikost zrychlení nalezneme ze vztahu:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{16+4+4} == 2\sqrt{6} \ \ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

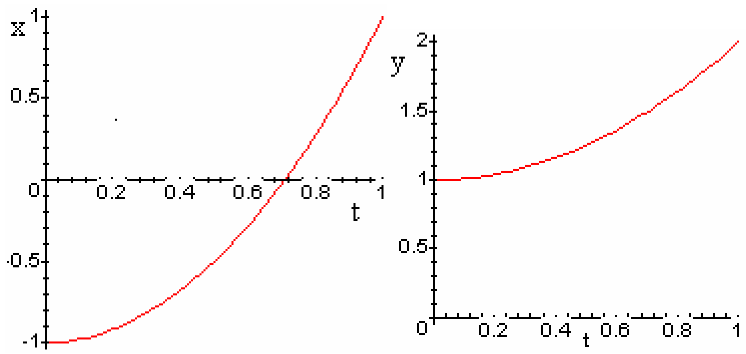
Zrychlení nezávisí na čase, takže $a_1 = a$.
Dráha je rovna (za velikost rychlosti dosadíme ze vztahu (1)):

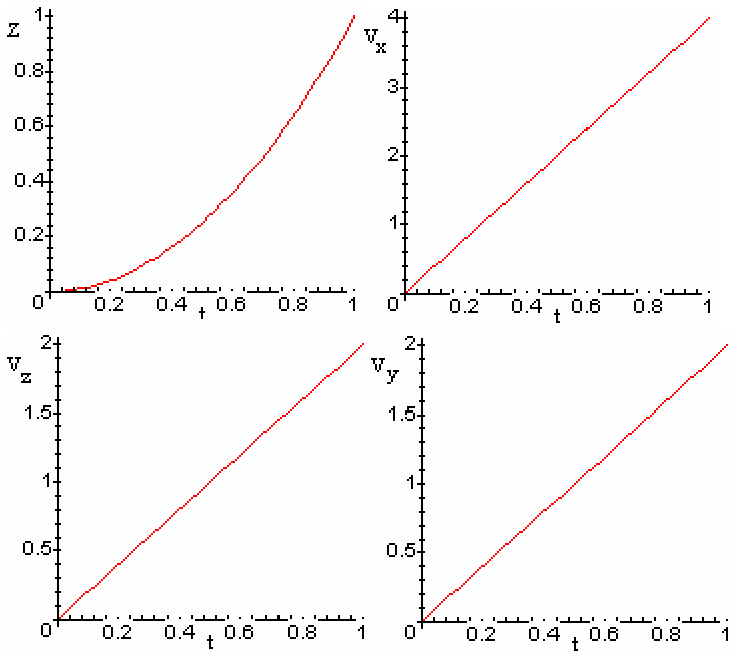
$$s = \int_0^t v \mathrm{d}t = \int_0^t 2\sqrt{6}t \mathrm{d}t = \sqrt{6}t^2.$$

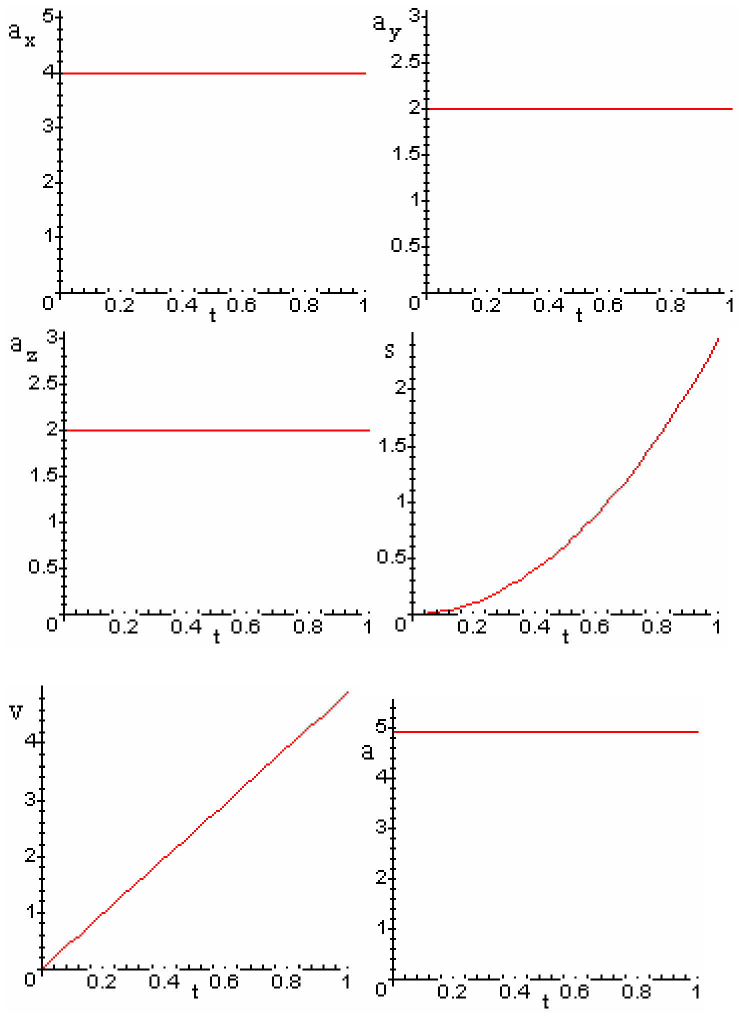
Za čas $\Delta t = t_1 - t_0 = 3$ s hmotný bod urazil dráhu

$$s_1 = \sqrt{6}t_1^2 = \sqrt{6} \cdot 3^2 = 9\sqrt{6} \ \ \mathrm{m}.$$

Průběhy $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$, $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$, $a(t)$ a $s(t)$ jsou na následujících obrázcích:







Příklad 2.1.2.

Část závodní dráhy se skládá ze dvou přímočarých úseků (č. 1 a 3), mezi nimiž je zatáčka o poloměru R = 100 m (úsek č. 2). Průběh závislosti velikosti rychlosti automobilu na čase $v = v(t)$ v jednotlivých úsecích je dán v SI číselnými rovnicemi:

úsek č. 1: $v = 50 - 2t$, $0 \le t < 10$

úsek č. 2: $v = 30 + (t - 10)^2$, $10 \le t < 15$

úsek č. 3: $v = 55 + 2(t - 15)$, $15 \le t < 5$

Určete a znázorněte graficky:

a) průběh rychlosti $v = v(t)$ (stanovte, kdy automobil na dráze brzdí a kdy akceleruje),

b) průběh zrychlení tečného $a_t = a_t(t)$ a normálového $a_n = a_n(t)$,

c) závislost ujeté dráhy na čase $s = s(t)$,

d) tvar dráhy.

Řešení:

a) Průběh rychlosti $v = v(t)$

úsek č.1 :

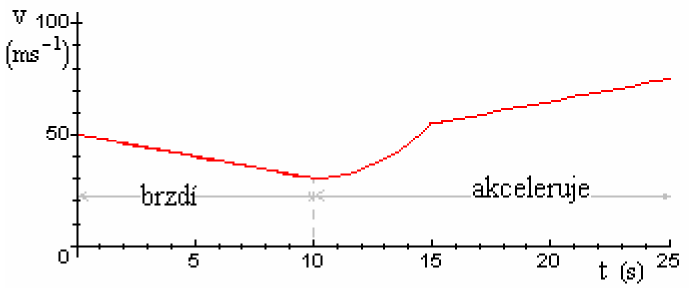
$$v(0) = 50 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \qquad v(10) = 30 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

úsek č.2:

$$v(10) = 30 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \qquad v(15) = 55 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

úsek č.3:

$$v(15) = 55 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \qquad\qquad v(25) = 75 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \; .$$



b) Průběh zrychlení tečného $a_t = a_t(t)$ a normálového $a_n = a_n(t)$

úsek č.1 :

$$a_n = 0 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

úsek č.2:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(30 + (t-10)^2\right)^2}{100} \; ,$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2(t-10) \; ,$$

$$a_n(10) = 9 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}},$$

$$a_\tau(10) = 0 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}},$$

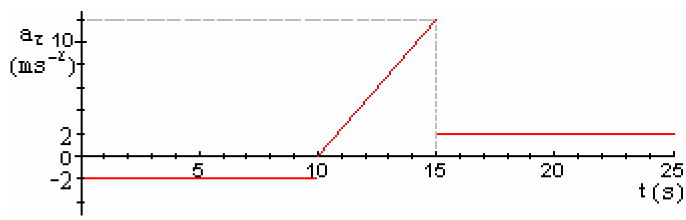
$$a_n(15) = 30{,}25 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}},$$

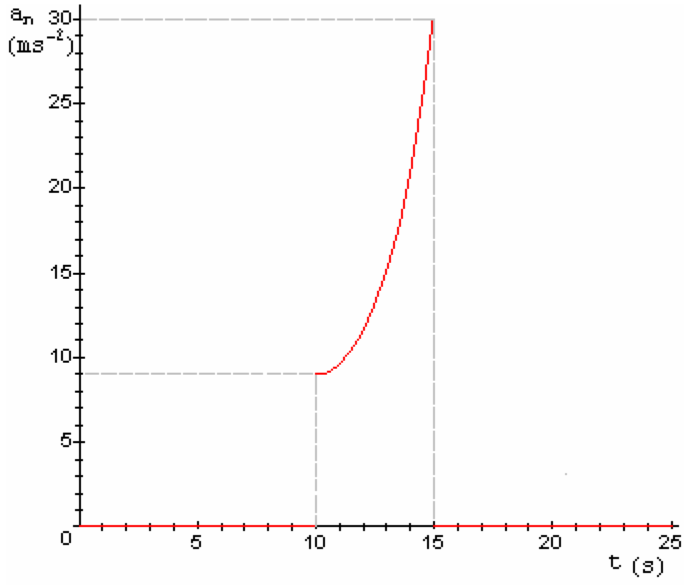
$$a_\tau(15) = 10 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

úsek č.3:

$$a_n = 0 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}},$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$





c) Závislost ujeté dráhy na čase $s = s(t)$

úsek č.1 : $t \in \langle 0{,}10 \rangle$

$$\Delta s_1(t) = \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t (50 - 2\tau)\,\mathrm{d}\tau = 50t - t^2,$$

$$\Delta s_1(0) = 0 \quad \mathrm{m}, \quad \Delta s_1(10) = 400 \quad \mathrm{m}$$

úsek č.2: $t \in \langle 10{,}15 \rangle$

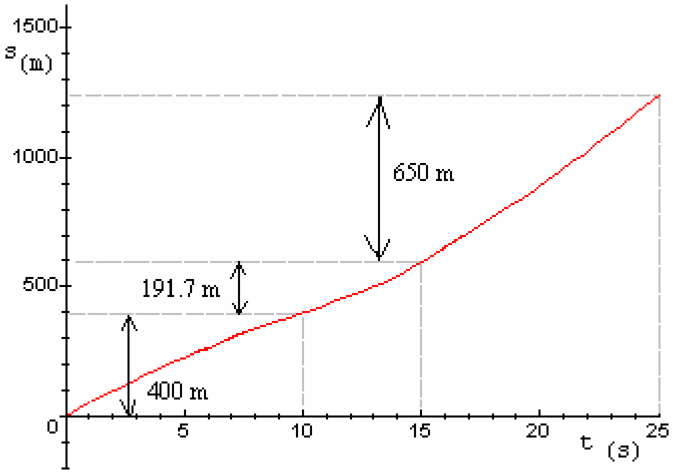
$$\Delta s_2(t) = \int_{10}^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{10}^t \left(30 + (\tau - 10)^2\right)\mathrm{d}\tau = 30(t-10) + \frac{1}{3}(t-10)^3,$$

$$\Delta s_2(10) = 0 \ \mathrm{m}, \quad \Delta s_2(15) = 191{,}7 \ \mathrm{m}$$

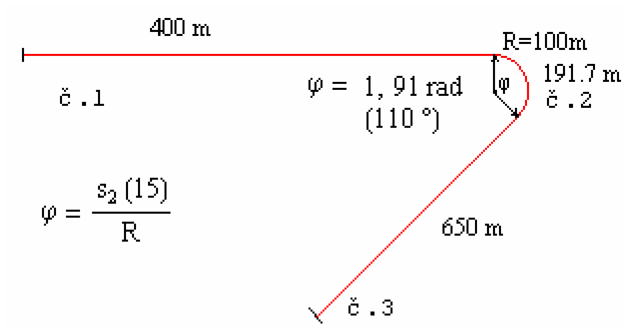
úsek č.3: $t \in \langle 15{,}25 \rangle$

$$\Delta s_3(t) = \int_{15}^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{15}^t \left(55 + 2(\tau - 15)^2\right)\mathrm{d}\tau = 55(t-15) + (t-15)^2,$$

$$\Delta s_3(15) = 0 \ \mathrm{m}, \quad \Delta s_3(25) = 650 \ \mathrm{m}.$$



d) Tvar dráhy



Příklad 2.1.3.

Vlak jedoucí rychlostí 72 km/h lze po uvedení brzd do činnosti zastavit za 2 min. Stanovte, v jaké vzdálenosti před nádražím je nutné uvést brzdy do činnosti. Předpokládejte, že během brždění se vlak pohybuje rovnoměrně zpomaleně. Namalujte průběhy veličin $a_\tau(t)$, $v(t)$ a $s(t)$.

Řešení:

Zadané hodnoty a hledaná veličina:

$$v_0 = 72 \text{ km/hod}, \; t_1 = 2\,\text{min} = 120 \text{ s}, \; a_\tau = \text{konst.}, \; s_1 = ?$$

Tečné zrychlení je definováno vztahem

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Řešením této rovnice získáme:

$$\int_{v_0}^{t} \mathrm{d}v = \int_0^t a_\tau \, \mathrm{d}t = a_\tau \int_0^t \mathrm{d}t \qquad ,$$

$$v = a_\tau t + v_0 \quad . \qquad (1)$$

Velikost rychlosti je definována vztahem:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} .$$

Řešením této rovnice získáme:

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \int_0^t (a_\tau t + v_0)\mathrm{d}t \quad ,$$

$$s = \frac{1}{2} a_\tau t^2 + v_0 t \quad . \qquad (2)$$

V čase $t = t_1$ je $v = 0$. Pak z rovnice (1) získáme:

$$0 = a_\tau t_1 + v_0$$

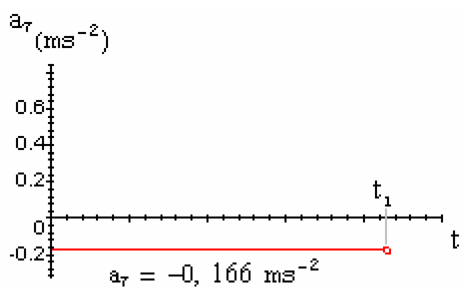
a

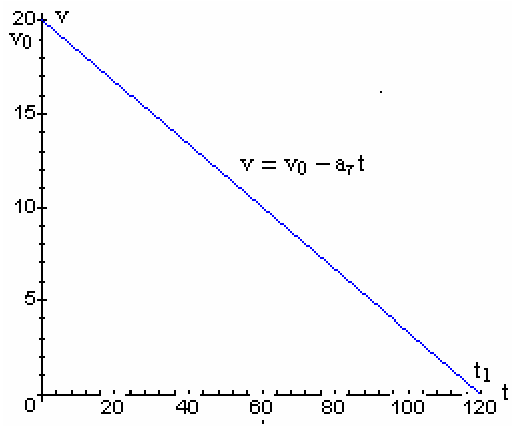
$$a_t = -\frac{v_0}{t_1} = -\frac{20}{120} = -\frac{1}{6} \ \mathrm{m \cdot s^{-2}} .$$

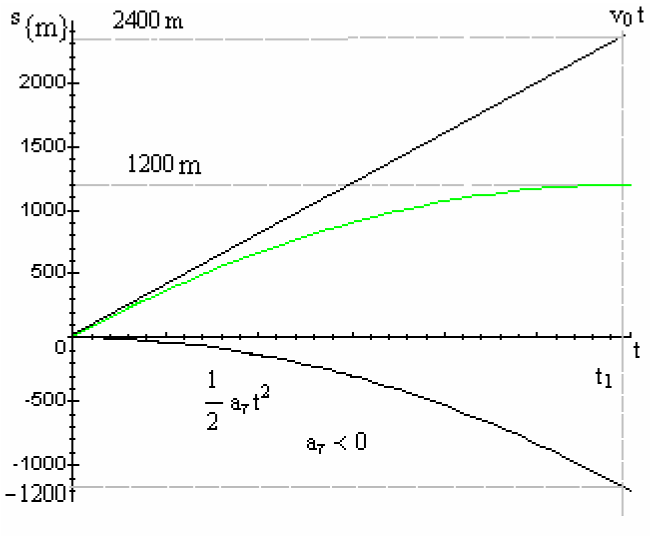
Dosazením do rovnice (2) získáme:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_\tau t_1^{\ 2} + v_0 t_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 120^2 + 20 \cdot 120 = 1200 \ \ \mathrm{m} .$$

Průběhy tečného zrychlení, rychlosti a dráhy jsou na následujících obrázcích:







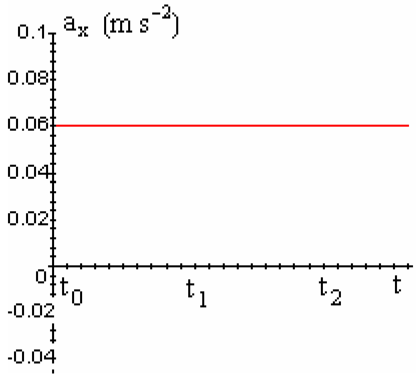
Příklad 2.1.4.

Táhlo stroje se pohybuje tak, že jeho koncový bod koná přímočarý pohyb s konstantním zrychlením 6 cm.s^{-2}. V čase t_0=0 s se koncový bod nalézá v místě x_0=50 cm. V okamžiku t_1 = 4 s je jeho rychlost nulová. Určete závislost rychlosti a dráhy na čase. Dále stanovte polohu koncového bodu v čase t_2 = 10 s a střední rychlost v době mezi t_1 a t_2.

Řešení:

Ze zadáni vyplývá, že koncový bod táhla vykonává přímočarý pohyb ve směru osy x s konstantním zrychlením. Proto platí

$$a = |a_\tau| = a_\tau = |a_x| = a_x = 6 \cdot 10^{-2} \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$



Podle definice je složka zrychlení a_x rovna:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Složku rychlosti v_x nalezneme z této rovnice separací proměnných a integrací:

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_0^t a_x \mathrm{d}t \quad .$$

$$v_x = a_x t + v_{x0} \quad .$$

Podle zadání je v čase $t_1 = 4$ s složka rychlosti $v_x = 0$ s. Po dosazení získáme rovnici

$$0 = a_x t_1 + v_{x0} \quad ,$$

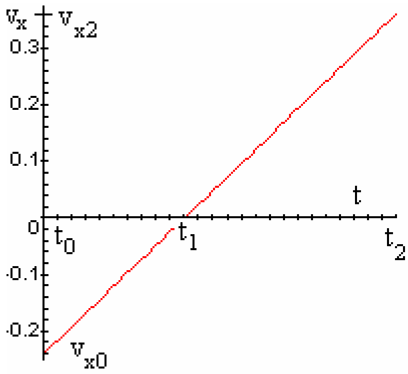
jejímž řešením obdržíme

$$v_{x0} = -a_x t_1 = -6 \cdot 10^{-2} \cdot 4 = -0{,}24 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad .$$

Složka rychlosti v_x v čase $t_2 = 10$ s je pak rovna

$$v_{x2} = a_x t_2 + v_{x0} = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 10 - 0{,}24 = 0{,}36 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} .$$

Závislost složky rychlosti v_x na čase je na následujícím obrázku:



Velikost rychlosti v nalezneme ze vztahu:

$$v = \sqrt{v_x^2} = |v_x| \quad .$$

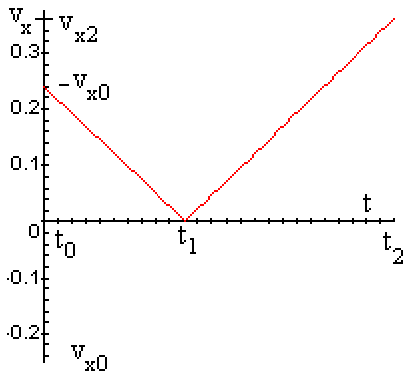
Vzhledem k tomu, že složka rychlosti v_x nabývá jak kladných, tak záporných hodnot, výraz s absolutní hodnotou rozepíšeme do dvou rovnic

$$v = -a_x t + v_{x0} \qquad t \in \langle 0, t_1 \rangle \qquad (1)$$

a

$$v = a_x t - v_{x0} \qquad t \in \langle t_1, t_2 \rangle \quad . \qquad (2)$$

Závislost velikosti rychlosti v na čase je na následujícím obrázku:



Složku polohového x vektoru nalezneme z rovnice:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad ,$$

kterou řešíme separací proměnných a integrací

$$\int_{x_{č}}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v_x \mathrm{d}t = \int_0^t (a_x t + v_{x0}) \mathrm{d}t \quad .$$

Obdržíme

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{x0} t + x_0 \quad .$$

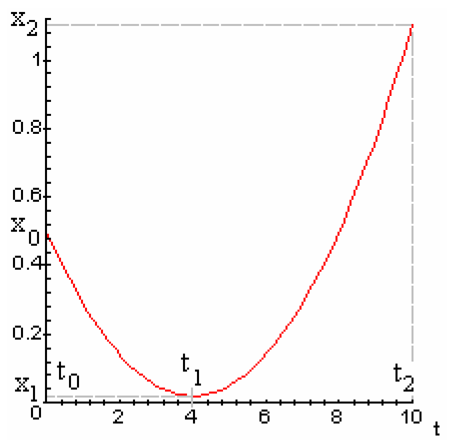
V čase t_1 má složka polohového vektoru x velikost

$$x_1 = \frac{1}{2} a_x t_1{}^2 + v_{x0} t_1 + x_0 = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 4 - 0{,}24 \cdot 4 + 0{,}5 = 0{,}02 \quad \mathrm{m}$$

a v čase t_2

$$x_2 = \frac{1}{2} a_x t_2{}^2 + v_{x0} t_2 + x_0 = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 - 0{,}24 \cdot 10 + 0{,}5 = 1{,}1 \quad \mathrm{m} \quad .$$

Průběh závislosti složky x na čase je na následujícím obrázku:



Dráhu s stanovíme z definiční rovnice pro velikost rychlosti:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Tuto rovnici opět řešíme separací proměnných a integrováním. Získáme

$$s = \int_0^t v \mathrm{d}t = \int_0^t |v_x| \mathrm{d}t \quad .$$

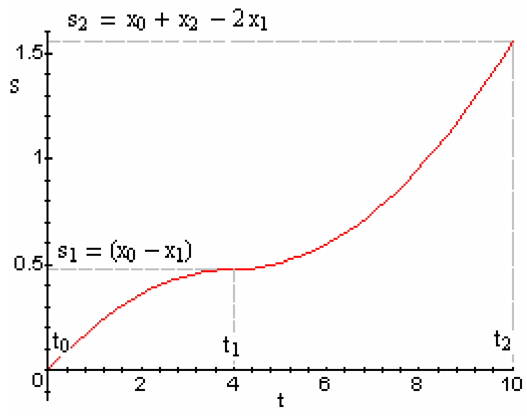
V intervalu $t \in \langle 0, t_1 \rangle$ s přihlédnutím k rovnici (1) pak můžeme psát

$$s = \int_0^t (-a_x t + v_{x0}) \mathrm{d}t$$

a podobně v intervalu $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ s přihlédnutím k rovnici (2)

$$s = \int_{t_1}^{t} \left(a_x t - v_{x0}\right) \mathrm{d}t \quad .$$

Závislost dráhy s na čase je uvedena na následujícím obrázku:



Konečně průměrnou rychlost v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ lze stanovit dvěma způsoby

$$v_P = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1{,}1 - 0{,}02}{10 - 4} = 0{,}18 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

$$v_P = \frac{v_{x1} + v_{x2}}{2} = \frac{0 + 0{,}36}{2} = 0{,}18 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

<u>Příklad 2.1.5.</u>
Drapák bagru vykonává křivočarý pohyb daný vektorovou rovnicí

$$\mathbf{r} = b_1[(t^3 - 15b_2^2 t)\,\mathbf{i} + 3b_2 t^2\,\mathbf{j} - 6b_2 t^2\,\mathbf{k}] \ .$$

Stanovte vektor okamžité rychlosti, vektor celkového zrychlení, velikost tečného a normálového zrychlení a poloměr křivosti (jednak obecně a jednak pro čas t_1 = 5 s). Koeficienty jsou b_1 = 1 cm.s^{-3} a b_2 = 1 s.

<u>Řešení:</u>
Okamžitá rychlost se vypočte z definiční rovnice

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = b_1\left[\left(3t^2 - 15b_2^2\right)\mathbf{i} + 6b_2 t\mathbf{j} - 12b_2 t\mathbf{k}\right] \ .$$

Velikost okamžité rychlosti je pak rovna

$$v = |\mathbf{v}| = 3b_1\left(t^2 + 5b_2^2\right) \ .$$

V čase $t = t_1 = 5$ s je velikost rychlosti rovna

$$v(5) = 90 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \quad .$$

Zrychlení stanovíme z definiční rovnice

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = 6b_1\left[t\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} - 2b_2\mathbf{k}\right] \quad .$$

Velikost zrychlení je rovna

$$a = |\mathbf{a}| = 6b_1\sqrt{\left(t^2 + 5b_2^2\right)} \quad .$$

V čase $t = t_1 = 5$ s je velikost zrychlení rovna

$$a(5) = 6\sqrt{30} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} \quad .$$

Tečné zrychlení stanovíme ze vztahu

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 6b_1 t \quad .$$

V čase $t = t_1 = 5$ s je velikost tečného zrychlení rovna

$$a_t(5) = 30 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} \quad .$$

Normálové zrychlení stanovíme ze vztahu

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = 6b_1 b_2\sqrt{5} \quad .$$

Velikost normálového zrychlení nezávisí u tohoto pohybu na čase a je rovna

$$a_n = 6\sqrt{5} = 13{,}4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} \quad .$$

Poloměr křivosti dráhy stanovíme ze vztahu pro normálové zrychlení

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{9b_1^2\left(t^2 + 5b_2^2\right)^2}{6b_1 b_2\sqrt{5}} = \frac{3b_1\left(t^2 + 5b_2^2\right)^2}{2b_2\sqrt{5}} \quad .$$

V čase $t = t_1 = 5$ s je velikost poloměru křivosti dráhy rovna

$$\rho(5) = 604 \text{ cm} \quad .$$

Příklad 2.1.6.

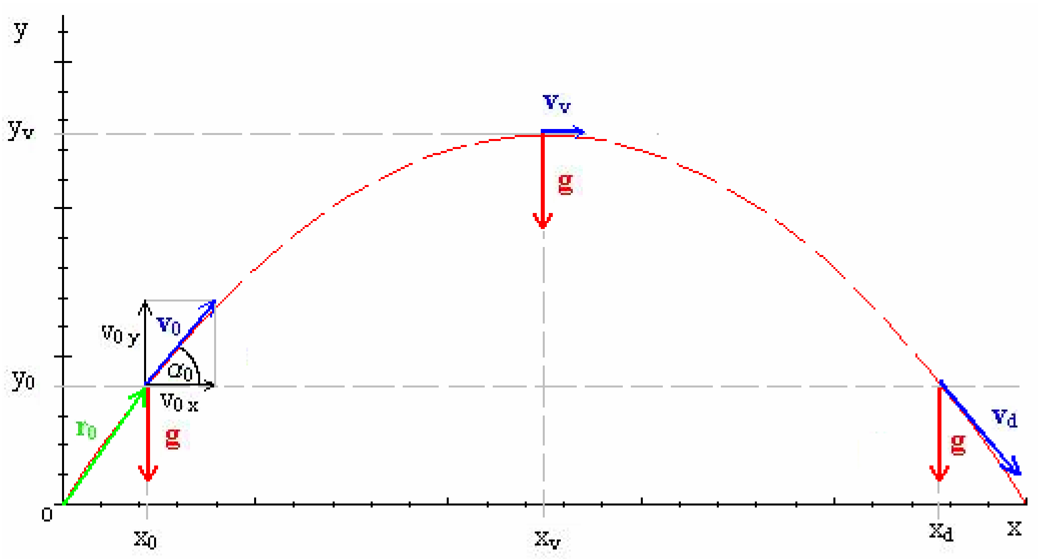
Stanovte pohyb hmotného bodu v homogenním tíhovém poli za předpokladu, že počáteční rychlost hmotného bodu v čase $t_0 = 0$ s je $\mathbf{v_0}$ a vektor $\mathbf{v_0}$ svírá s horizontální rovinou úhel:

(a) $0 < \alpha_o < \pi/2$ (šikmý vrh),
(b) $\alpha_o = \pi/2$ (svislý vrh vzhůru),
(c) $\alpha_o = -\pi/2$ (svislý vrh dolů),
(d) $\alpha_o = 0$ (vodorovný vrh).

Nalezněte polohu $\mathbf{r}(t)$ a rychlost bodu $\mathbf{v}(t)$ v závislosti na čase t, rovnici trajektorie $y = f(x)$, dobu výstupu t_v, výšku výstupu y_v a vzdálenost vrcholu x_v, dobu dopadu t_d, vzdálenost dopadu x_d a rychlost dopadu v_d (do roviny o výšce y_0), tečné zrychlení a_τ, normálové zrychlení a_n a poloměr křivosti dráhy ρ.

Poznámka: Homogenní tíhové pole se vyznačuje tím, že v každém jeho bodě je hmotnému bodu udíleno stejné zrychlení $\mathbf{g}$.

Řešení:



V každém bodě homogenního tíhového pole je hmotnému bodu udělováno zrychlení

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} = -\mathbf{j}g \quad ,$$

Složky počáteční rychlosti jsou rovny

$$v_{0x} = v_0 \cos(\alpha_0) \quad ,$$
$$v_{0y} = v_0 \sin(\alpha_0) \quad .$$

Pro nalezení rychlosti hmotného bodu vyjdeme z definice zrychlení:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Pak

$$\int_{\mathbf{v_0}}^{\mathbf{v}} \mathrm{d}\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a}\mathrm{d}t = \int_0^t \mathbf{g}\mathrm{d}t$$

a

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0 \quad .$$

Pro nalezení polohového vektoru hmotného bodu vyjdeme z definice okamžité rychlosti

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Pak

$$\int_{\mathbf{r_0}}^{\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}\mathrm{d}t = \int_0^t \left(\mathbf{g}t + \mathbf{v}_0\right)\mathrm{d}t$$

a polohový vektor hmotného bodu je dán rovnicí

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2} = \mathbf{g}t^2 + \mathbf{v_0}t + \mathbf{r_0} \quad .$$

Nalezené rovnice rozepíšeme do složek:

$$v_x = v_{0x} \ , \tag{1}$$

$$v_y = v_{0y} - gt \ , \tag{2}$$

$$x = v_{0x}t + x_0 \ , \tag{3}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \ . \tag{4}$$

Velikost rychlosti je pak rovna:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - 2v_{0y}gt + g^2t^2} = \sqrt{v_0^2 + gt\left(gt - 2v_{0y}\right)} \ .$$

a) <u>Šikmý vrh</u> $\left(0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}\right)$:

Rovnici trajektorie $y = f(x)$ získáme z rovnic (3) a (4) vyloučením času t:

$$y - y_0 = \mathrm{tg}\left(\alpha_0\right)\left(x - x_0\right) - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right)\left(x - x_0\right)^2 .$$

Dobu výstupu t_v určíme z rovnice (2) z podmínky, že na vrcholu je $v_y = 0$:

$$t_v = \frac{v_{0y}}{g}.$$

Výšku výstupu y_v získáme dosazením do vztahu (4):

$$y_v = \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_0 .$$

Vzdálenost vrcholu x_v získáme dosazením $t = t_v$ do rovnice (3):

$$x_v = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} + x_0 \quad .$$

Dobu dopadu t_d získáme ze vztahu (4) pro $y = y_0$:

$$t_d = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_v \quad .$$

Vzdálenost dopadu x_d získáme dosazením $t = t_d$ do (3):

$$x_d = \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g} + x_0 \quad .$$

Rychlost ve vrcholu v_v:

$$v_v = \sqrt{v_0^2 + gt_v\left(gt_v - 2v_{0y}\right)} = \sqrt{v_0^2 + g\frac{v_{0y}}{g}\left(g\frac{v_{0y}}{g} - 2v_{0y}\right)} = \sqrt{\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right) + v_{0y}\left(-v_{0y}\right)} =$$
$$= \sqrt{v_{ox}^2 + v_{0y}^2 - v_{0y}^2} = \left|v_{0x}\right| \quad .$$

Rychlost při dopadu v_d:

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + gt_d\left(gt_d - 2v_{0y}\right)} = \sqrt{v_0^2 + g\frac{2v_{0y}}{g}\left(g\frac{2v_{0y}}{g} - 2v_{0y}\right)} = \sqrt{v_0^2 + 2v_{0y}\left(2v_{0y} - 2v_{0y}\right)} =$$
$$= \left|v_0\right| = v_0 \quad .$$

Celkové zrychlení je konstantní a je rovno g.
Tečné zrychlení a_τ je rovno:

$$a_r = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_0^2 + gt\left(gt - 2v_{0y}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{g\left(gt - v_{0y}\right)}{v} \quad .$$

V čase $t = 0$ je pak

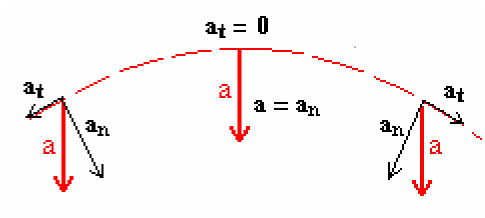
$$a_\tau = -g\frac{v_{0y}}{v}$$

a v čase $t = t_v$

$$a_\tau = 0 \quad .$$

Normálového zrychlení a_n je pak rovno:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^2}{v^2}\left(gt - v_{0y}\right)^2} = \frac{g}{v}\sqrt{v^2 - \left(gt - v_{0y}\right)^2} = g\frac{|v_{0x}|}{v} \quad .$$



Okamžik, kdy je $a_\tau = 0$ (a tudíž $a_n = a = g$) získáme z rovnice pro a_τ :

$$0 = \frac{g\left(gt - 2v_{0y}\right)}{v} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0y}}{g} = t_v \quad .$$

Pro poloměr křivosti platí :

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad .$$

Odtud:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{g\frac{v_{0x}}{v}} = \frac{v^3}{gv_{0x}} \quad .$$

b) <u>Svislý vrh vzhůru</u> $\left(\alpha_0 = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$v_x = 0 \ , \tag{1}$$

$$v_y = v_0 - gt \ , \tag{2}$$

$$x = x_0 \ , \tag{3}$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0 \ . \tag{4}$$

Dobu výstupu t_v určíme z rovnice (2) pro $v_y = 0$:

$$t_v = \frac{v_0}{g} \ .$$

Z rovnice (4) pak pro $t = \mathrm{t_v}$ získáme y_v:

$$y_v = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + y_0 \ .$$

Dobu dopadu t_d získáme ze vztahu (4) pro $y = y_0$:

$$t_d = 2\frac{v_0}{g} = 2t_v \ .$$

Z rovnice (2) pak pro $t = t_d$ získáme v_d:

$$v_d = v_0 - g\frac{2v_0}{g} = v_0 - 2v_0 = -v_0 \ .$$

c) <u>Svislý vrh dolů</u> $\left(\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}\right)$:

$$v_x = 0 \ , \tag{1}$$
$$v_y = -v_0 - gt \ , \tag{2}$$
$$x = x_0 \ , \tag{3}$$
$$y = -v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0 \ . \tag{4}$$

V případě <u>volného pádu</u> platí:

$$v_0 = 0 \ ,$$
$$v_y = -gt \ ,$$
$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \ .$$

d) <u>Vodorovný vrh</u> $(\alpha_0 = 0)$:

$$v_x = v_0 \ , \tag{1}$$
$$v_y = -gt \ , \tag{2}$$
$$x = v_0 t + x_0 \ , \tag{3}$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \ . \tag{4}$$

Trajektorie:

$$\left(y - y_0\right) = \left(\frac{g}{2v_0^2}\right)\left(x - x_0\right)^2 \ .$$

<u>Příklad 2.1.7.</u>

Automobil se rozjíždí ze stavu klidu tak, že jeho zrychlení roste rovnoměrně s časem a v čase t_1 = 20 s od začátku pohybu dosáhne rychlost v_1 = 35 m.s^{-1}. Jakou dráhu s_1 automobil za tento čas urazí a jaké je jeho zrychlení $a_{\tau 1}$ v čase t_1 ?

<u>Řešení:</u>

Dle zadání můžeme tečné zrychlení automobilu vyjádřit vztahem

$$a_\tau = k \cdot t \quad ,$$

kde k je konstantní součinitel, jehož velikost určíme ze zadaných hodnot později. Rychlost automobilu nalezneme z definice tečného zrychlení

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Pak

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t = \int_0^t kt \, \mathrm{d}t$$

a integrací získáme

$$v = \frac{1}{2}kt^2 \quad .$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit neznámý součinitel k

$$k = \frac{2v}{t^2} \quad .$$

Velikost neznámého součinitele k stanovíme ze zadaných hodnot

$$t_1 = 20 \text{ s}, \ v_1 = 35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \ .$$

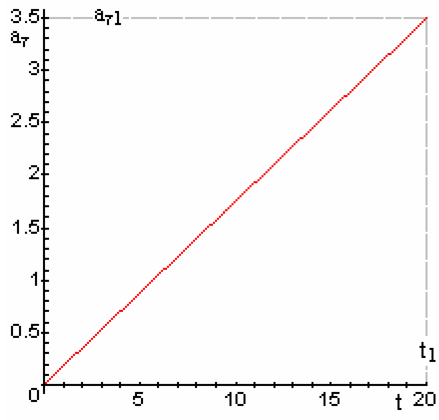
Pak

$$k = \frac{2 \cdot 35}{20^2} = 0{,}175 \ \text{ m} \cdot \text{s}^{-3} \quad .$$

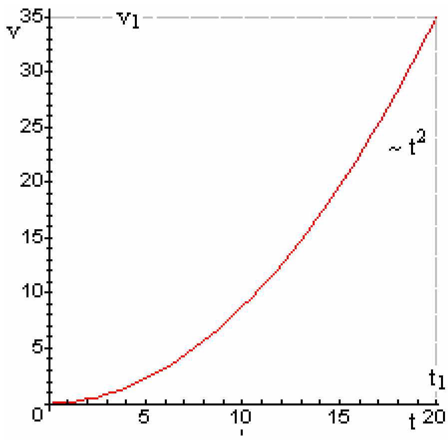
Tečné zrychlení v čase t_1 je pak rovno

$$a_{\tau 1} = kt_1 = 0{,}175 \cdot 20 = 3{,}5 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \quad .$$

Závislost tečného zrychlení na čase je zobrazena na následujícím obrázku:



Závislost rychlosti automobilu na čase je na následujícím obrázku:



Dráhu, kterou automobil urazí nalezneme z definice velikosti rychlosti:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad .$$

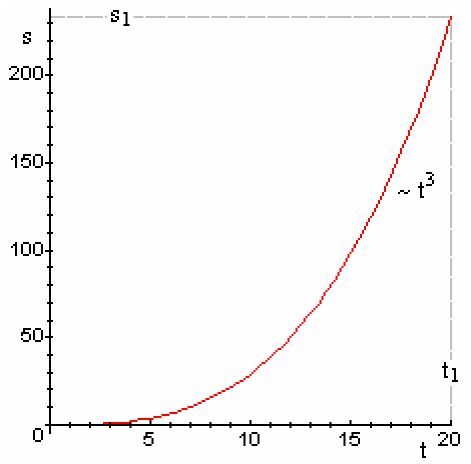
Řešením této rovnice získáme

$$s = \int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{1}{2} k t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2} k \int_0^t \frac{1}{2} t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2} k \frac{1}{3} t^3$$

a dráha, kterou automobil urazil za čas t_1 je pak rovna:

$$s_1 = \frac{1}{6} k t_1^{\,3} = \frac{1}{6} \cdot 0{,}175 \cdot 20^3 = 233{,}3 \text{ m} \quad .$$

Závislost dráhy na čase je na následujícím obrázku:



<u>Příklad 2.1.8.</u>

Vnější poloměr nahraného pásma gramofonové desky je R_1 = 15 cm, vnitřní R_2 = 5 cm. Deska je přehrávána po dobu t = 25 min při otáčkách n = 33 1/3 min^{-1}. Spočtěte tečné zrychlení a_τ relativního pohybu drážky a jehly přenosky, celkovou délku drážky s a průměrnou rychlost pohybu jehly v drážce v_p.

<u>Řešení:</u>

Zadané hodnoty:

$R_1 = 0{,}15\,\mathrm{m}$

$R_2 = 0{,}05\,\mathrm{m}$

$\Delta t = 25 \cdot 60 = 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{s}$

$n = \dfrac{100}{3}\,\mathrm{min}^{-1}$.

Počet otáček desky za 1 sekundu je roven

$$f = \frac{n}{60} = \frac{100}{3 \cdot 60} = 0{,}556\ \mathrm{s}^{-1} \quad ,$$

takže úhlová rychlost otáčení desky je

$$\omega = 2\pi f \doteq 3{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$$

a obvodová rychlost v místě jehly

$$v = \omega R \quad .$$

Průměrné tečné zrychlení je pak rovno

$$a_{\tau\, pr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\omega\left(R_2 - R_1\right)}{\Delta t} = \frac{3{,}5\left(0{,}05 - 0{,}15\right)}{1{,}5 \cdot 10^3} = -2{,}33 \cdot 10^{-4} \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}} \quad .$$

Dráha, kterou urazí jehla je rovna

$$s = \int_0^{\Delta t} v \mathrm{d}t = \int_0^{\Delta t} \left(v_1 + a_\tau t\right) \mathrm{d}t = \left[v_1 t + \frac{a_\tau}{2} t^2 \right]_0^{\Delta t} = \omega R_1 \Delta t + \frac{1}{2} a_\tau \left(\Delta t\right)^2 = 525 \text{ m} \quad ,$$

takže průměrná rychlost jehly vůči drážce se rovná

$$v_p = \frac{s}{\Delta t} = \frac{525}{1{,}5 \cdot 10^3} \doteq 0{,}35 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \; .$$

<u>Příklad 2.1.9.</u>

Za dobu t_1 = 30 s od počátku brždění vykonal motor ještě 375 otáček a zastavil se. Určete jeho úhlové zrychlení při brždění ε a počáteční otáčky motoru n_o.

<u>Řešení:</u>

Budeme předpokládat, že brzdící síla je konstantní. Pak i brzdící moment bude konstantní a úhlové zrychlení bude konstantní.

Úhlovou dráhu stanovíme z definičního vztahu pro úhlovou rychlost:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Řešením této rovnice získáme

$$\int_0^{\varphi} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{t} \omega \, \mathrm{d}t \quad ,$$

$$\varphi = \int_0^{t} \omega \, \mathrm{d}t \quad .$$

Úhlovou rychlost stanovíme z definičního vztahu pro úhlové zrychlení:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Řešením této rovnice získáme

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_0^{t} \varepsilon \, \mathrm{d}t \quad ,$$

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon \, \mathrm{d}t \quad .$$

Vzhledem k tomu, že předpokládáme, že ε je konstantní, pak řešením poslední rovnice získáme

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \, t \qquad . \tag{1}$$

Po dosazení výrazu (1) do vztahu pro úhlovou dráhu obdržíme

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t \left(\omega_0 + \varepsilon \, t\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \varepsilon \, t^2 + \omega_0 t \quad . \tag{2}$$

V našem případě pro $t = t_1$ je $\omega_1 = 0$. Po dosazení těchto hodnot do rovnice (1) obdržíme

$$\omega_0 = -\varepsilon \, t_1 \quad . \tag{3}$$

Neznámé úhlové zrychlení pak je rovno

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t_1} \quad .$$

Úhlová dráha od začátku brždění do zastavení motoru je proto rovna (vyjdeme z rovnice (2) a za ω_0 dosadíme z rovnice (3))

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \varepsilon \, t_1^2 - \varepsilon \, t_1^2 = \varepsilon \left(\frac{1}{2} t_1^2 - t_1^2 \right) = -\frac{1}{2} \varepsilon \, t_1^2 \quad .$$

Úhlová dráha od začátku brždění do zastavení motoru je $\varphi_1 = 2\pi n_1$, kde n_1 je počet otáček vykonaných motorem během brždění (za čas t_1). Po dosazení do předcházející rovnice obdržíme úhlové zrychlení

$$\varepsilon = -\frac{2\varphi_1}{t_1^2} = -\frac{4\pi \, n_1}{t_1^2} = -\frac{4\pi \cdot 375}{30^2} = -5{,}24 \quad \mathrm{s}^{-2} \quad .$$

Konečně počet otáček za 1 sekundu na začátku brždění je roven (za ω_0 dosadíme z rovnice (3))

$$n_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = -\frac{\varepsilon \, t_1}{2\pi} = \frac{5{,}24 \cdot 30}{2\pi} = 25 \quad \mathrm{s}^{-1} \quad .$$

Příklad 2.1.10.

Po vypnutí proudu se kotva elektromotoru otáčela rovnoměrně zpožděně a zastavila se za 15 s. Poslední dvě otočky před zastavením vykonala za 6 s. Stanovte úhlové zpoždění a úhlovou rychlost v okamžiku vypnutí proudu.

Řešení:

Vyjdeme z definice úhlového zrychlení ε a úhlové rychlosti ω. Pro rovnoměrně zpožděný pohyb po kružnici platí, že ε = konst. Počáteční podmínky jsou :

$$t = 0 \text{ s}, \ \omega = \omega_0, \ \varphi = \varphi_0 \, .$$

Pak:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \quad ,$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\omega = \varepsilon \int_0^t \mathrm{d}t \quad ,$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\, t \quad , \tag{1}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad ,$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathrm{d}\varphi = \int_0^t \omega \, \mathrm{d}t = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon\, t) \mathrm{d}t \quad ,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2} \varepsilon\, t^2 \quad . \tag{2}$$

Označme proměnné veličiny t, φ a ω v čase, kdy kotva právě začala poslední dvě otočky jako t_1,φ_1 a ω_1 a v čase, kdy se právě zastavila, jako t_2, φ_2 a ω_2.

Dle zadání je:

$t_2 = 15 \text{ s}$,

$\omega_2 = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,

$t_2 - t_1 = \Delta t = 6 \text{ s}$,

$n_2 - n_1 = \Delta n = 2$ otočky.

Dosazením do rovnice (1) získáme:

$$0 = \omega_0 + \varepsilon t_2 \, ,$$

$$\omega_0 = -\varepsilon\, t_2 \quad . \tag{3}$$

Dosazením do rovnice (2) získáme:

$$\varphi_1 = 2\pi\, n_1 = \varphi_0 + \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\varepsilon\, t_1^2 \quad , \tag{4}$$

$$\varphi_2 = 2\pi\, n_2 = \varphi_0 + \omega_0 t_2 + \frac{1}{2}\varepsilon\, t_2^2 \quad . \tag{5}$$

Do rovnic (4) a (5) dosadíme za ω_0 z rovnice (3). Obdržíme

$$2\pi\, n_1 = \varphi_0 - \varepsilon\, t_1 t_2 + \frac{1}{2}\varepsilon\, t_1^2 \quad , \tag{6}$$

$$2\pi\, n_2 = \varphi_0 - \varepsilon\, t_2{}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\, t_2^2 = \varphi_0 - \frac{1}{2}\varepsilon\, t_2^2 \quad . \tag{7}$$

Rovnici (7) odečteme od rovnice (6). Získáme

$$2\pi\left(n_1 - n_2\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{2}t_1^2 - t_1 t_2 + \frac{1}{2}t_2^2\right) = \frac{\varepsilon}{2}\left(t_1 - t_2\right)^2 \quad .$$

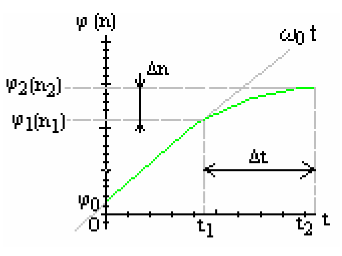
Odtud hledané ε:

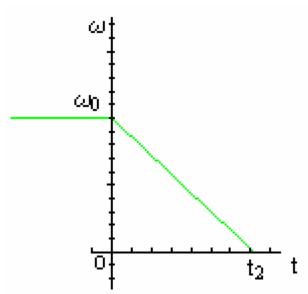
$$\varepsilon = \frac{4\pi\left(n_2 - n_1\right)}{\left[-\left(t_2 - t_1\right)\right]^2} = -\frac{4\pi\,\Delta n}{\Delta t^2} = -\frac{4\pi\cdot 2}{6^2} = -0{,}698 \quad \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2} .$$

Počáteční úhlová rychlost ω_0 ze vztahu (3) je pak rovna:

$$\omega_0 = -\varepsilon\, t_2 = -\left(-0{,}698\right)\cdot 15 = 10{,}47 \quad \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \quad .$$

Časový průběh sledovaných veličin je uveden na následujících obrázcích:





2.2. *Dynamika hmotného bodu*

Příklad 2.2.1.

Při akceleračních závodech speciálních automobilů se startuje z klidu a měří se čas potřebný k ujetí dráhy s = 400 m. Dosažený čas je t = 8 s. Vypočtěte konečnou rychlost automobilu, jeho zrychlení a působící sílu, je-li hmotnost automobilu m = 2000 kg. Předpokládejte, že síla urychlující automobil je konstantní.

Řešení:

Vzhledem k předpokladu o konstantní urychlující síle bude automobil vykonávat přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb. Postupem probíraným v kinematice nejdříve odvodíme obecné vztahy pro rychlost automobilu a dráhu ujetou automobilem. Dráhu nalezneme z definičního vztahu pro velikost okamžité rychlosti

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad ,$$

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t v\mathrm{d}t \quad ,$$

$$s = \int_0^t v\mathrm{d}t \quad .$$

Abychom mohli vyřešit tento integrál, musíme znát závislost velikosti rychlosti na čase. Tuto závislost najdeme z definičního vztahu pro velikost tečného zrychlení

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad ,$$

$$\int_0^v \mathrm{dv} = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t \quad .$$

S ohledem na předpoklad o konstantní urychlující síle bude dle 2. pohybového zákona i zrychlení automobilu konstantní a proto

$$v = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t = a_\tau t \quad .$$

Po dosazení do rovnice pro dráhu získáme

$$s = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t a_\tau \mathrm{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} a_\tau t^2 \quad .$$

Z této rovnice můžeme stanovit velikost neznámého tečného zrychlení automobilu

$$a_\tau = \frac{2s}{t^2} = \frac{2\cdot 400}{8^2} = 12{,}5 \quad \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

a po dosazení do odvozeného obecného vztahu pro velikost rychlosti i rychlost automobilu na konci dráhy

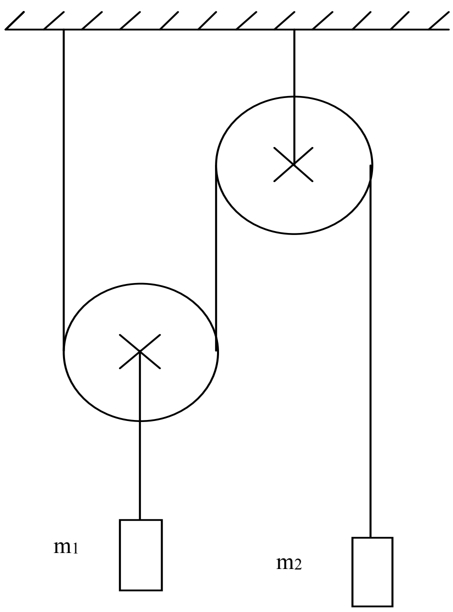
$$v = a_\tau t = 12{,}5\cdot 8 = 100 \quad \mathrm{m\cdot s^{-1}} \quad .$$

Síla, která urychluje automobil je pak rovna

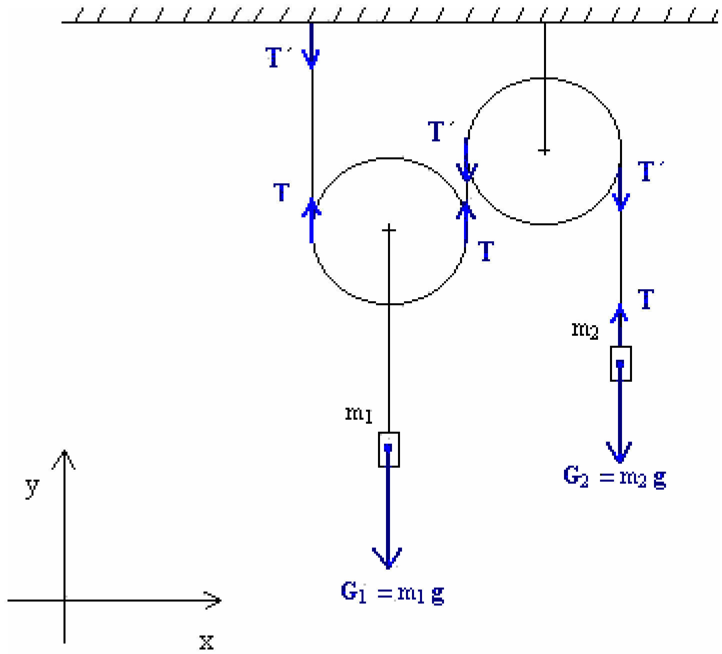
$$F = ma_\tau = 2000\cdot 15{,}5 = 25\cdot 10^3 \quad \mathrm{N}$$

<u>Příklad 2.2.2.</u>

Na soustavě kladek (viz obrázek) jsou přes vlákno zavěšena dvě tělesa o hmotnostech m_1 = 1 kg a m_2 = 2 kg. Určete zrychlení, s kterými se tělesa pohybují a sílu napínající vlákno. Hmotnost kladek a tření mezi kladkami a vláknem zanedbejte.



Řešení:
Na zavěšená tělesa působí síly dle obrázku:



Tahovou sílu ve vláknu označme **T**. Pohybová rovnice má tvar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, kde **F** je výslednice sil působících na těleso $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$.
Máme dvě tělesa, proto napíšeme dvě pohybové rovnice (viz obrázek):

$$\mathbf{G}_1 + 2\mathbf{T} = m_1\mathbf{a}_1 \quad , \tag{1}$$

$$\mathbf{G}_2 + \mathbf{T} = m_2\mathbf{a}_2 \quad . \tag{2}$$

Pohyb těles není nezávislý, neboť mezi nimi existuje vazba. Za čas Δt urazí těleso 1 dráhu Δs a těleso 2 dráhu $2\Delta s$. Nezávisle na hmotnosti těles pro jejich zrychlení musí platit:

$$\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{a}_1 \quad . \tag{3}$$

Rovnice (1) a (2) vyjádříme ve složkách (volba kladného směru osy y je vyznačena na obrázku):

$$2T - m_1 g = m_1 a_{y1} \quad , \tag{4}$$

$$T - m_2 g = m_2 a_{y2} = m_2(-2a_{y1}) \qquad , \tag{5}$$

kde jsme v rovnic (5) za a_{y1} dosadili z rovnice (3). Rovnici (5) dále upravíme:

$$-2T + 2m_2 g = 4ma_{y1} . \tag{6}$$

Sečtěme rovnice (4) a (6). Získáme

$$2m_2 g - m_1 g = 4m_2 a_{y1} + m_1 a_{y1} \quad .$$

Po úpravě

$$g(2m_2 - m_1) = a_{y1}(4m_2 + m_1) \quad ,$$

takže složka zrychlení prvního tělesa je rovna

$$a_{y1} = g\frac{2m_2 - m_1}{4m_2 + m_1} = 10\frac{2 \cdot 2 - 1}{4 \cdot 2 + 1} = 3{,}33 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

a složka zrychlení druhého tělesa

$$a_{y2} = -2a_{y1} = -2 \cdot 3{,}33 = -6{,}67 \quad m \cdot s^{-2} \quad .$$

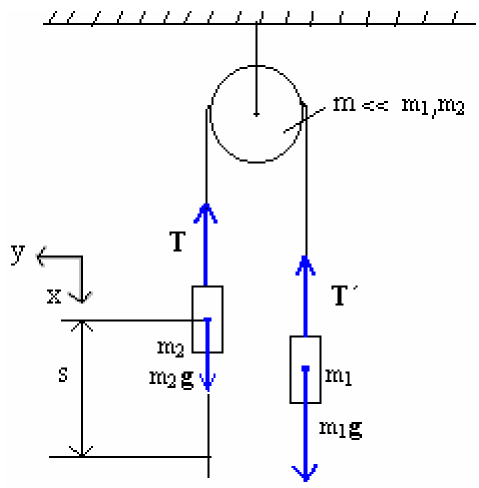
Velikost tahové síly T stanovíme např. z rovnice (4):

$$T = \frac{m_1}{2}(a_{y1} + g) = \frac{1}{2}(3{,}33 + 10) = 6{,}67 \quad \mathrm{N}\,.$$

<u>Příklad 2.2.3.</u>

Dvě závaží o hmotnosti m_1 a m_2 jsou spojena nití přes kladku, jejíž hmotnost můžeme zanedbat. Takovéto uspořádání závaží lze použít k měření tíhového zrychlení g a pak se nazývá Atwoodův stroj. Aby bylo možné g změřit přesně, musí být hmotnosti m_1 a m_2 velmi blízké. Stanovte velikost g, jestliže při pokusu bylo m_1 = 0,4 kg, m_2 = 0,402 kg a závaží urazila dráhu 0,5 m za čas 6,4 s, přičemž na začátku byla v klidu.

<u>Řešení:</u>



Na každé závaží působí jednak tíhová síla $\mathbf{G} = m\,\mathbf{g}$ a jednak tah vlákna **T.**
Pohybové rovnice závaží jsou rovny

$$\mathbf{G_1} + \mathbf{T'} = m_1\mathbf{a_1} \quad ,$$

$$\mathbf{G_2} + \mathbf{T} = m_2\mathbf{a_2} \quad .$$

Zvolme soustavu souřadnic (viz.obr.). V této soustavě souřadnic mají pohybové rovnice ve složkách tvar:

$$m_2 g - T = m_2 a_{x2},$$
$$m_1 g - T' = m_1 a_{x1},$$

přitom ovšem platí (vzhledem k tomu, že hmotnost kladky zanedbáváme, je tah vlákna stejný na obě závaží)

$$a_{x2} = -a_{x1} \quad \text{a} \quad T = T' \quad . \tag{1}$$

Po dosazení vztahů (1) za zrychlení a tah vlákna obdržíme

$$m_2 g - T = m_2 a_{x2} \quad , \tag{2}$$
$$m_1 g - T = -m_1 a_{x2} \quad . \tag{3}$$

Odečteme rovnici (3) od rovnice (2).Pak

$$(m_2 - m_1)g = (m_2 + m_1)a_{x2} \quad .$$

Z této rovnice určíme hledané g

$$g = a_{x2}\frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} \quad .$$

Pro dráhu s platí (rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu, odvození viz předcházející příklady)

$$s = \frac{1}{2}a_{x2}t^2 \quad .$$

Odtud

$$a_{x2} = \frac{2s}{t^2}$$

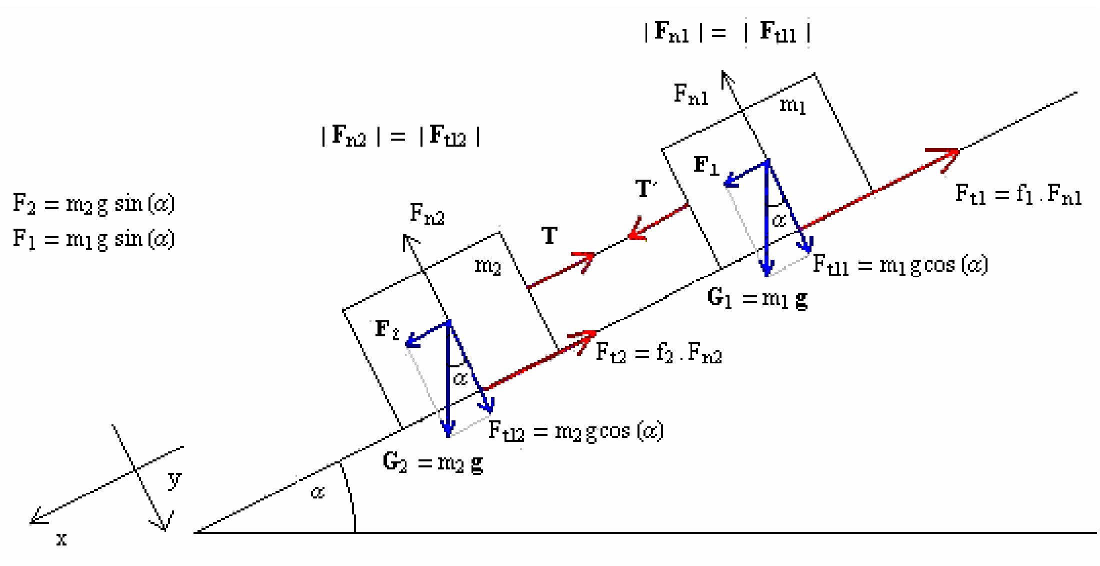
a po dosazení

$$g = \frac{2s}{t^2}\cdot\frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} = \frac{2\cdot 0{,}5}{6{,}4^2}\cdot\frac{0{,}402 + 0{,}4}{0{,}402 - 0{,}4} = 9{,}79 \quad \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

<u>Příklad 2.2.4.</u>

Dva kvádry o hmotnosti m_1 = 3 kg a m_2 = 2 kg spojené nití leží na nakloněné rovině se sklonem α = 37°. Koeficienty smykového tření mezi kvádry a rovinou jsou f_1 = 0,25 a f_2 = 0,10. Vypočtěte zrychlení této soustavy a tahovou sílu v niti.

<u>Řešení:</u>



Pohybová rovnice:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \quad .$$

Nejprve je nutné zjistit,zda je niť napínána .Uvažuje kvádry samostatně (bez nitě):

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{t1} = m_1\mathbf{a}_1 ,$$
$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{t2} = m_2\mathbf{a}_2 ,$$

Rozepíšeme pohybové rovnice ve složkách. První rovnice má tvar

$$m_1 g \cdot \sin(\alpha) - f_1 m_1 g \cdot \cos(\alpha) = m_1 a_{x1} ,$$

a jejím řešením zjistíme zrychlení prvního tělesa, pokud by nebylo spojeno nití s druhým tělesem:

$$a_{x1} = g(\sin\alpha - f_1 \cdot \cos\alpha) = 10(\sin 37° - 0{,}25 \cdot \cos 37°) \doteq 4 \ \text{ms}^{-2} ,$$

Druhá pohybová rovnice má ve složkách tvar

$$m_2 g \cdot \sin(\alpha) - f_2 m_2 g \cdot \cos(\alpha) = m_2 a_{x2} ,$$

a jejím řešením zjistíme zrychlení druhého tělesa, pokud by nebylo nití spojené s prvním tělesem:

$$a_{x2} = g(\sin\alpha - f_2 \cdot \cos\alpha) = 10(\sin 37° - 0{,}1 \cdot \cos 37°) \doteq 5{,}2 \ \ \mathrm{ms}^{-2} .$$

Protože $a_{x2} > a_{x1}$, niť je napínána. Pak:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}' \quad , \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a} \tag{2}$$

a pohybové rovnice pro oba kvádry spojené nití jsou:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{T}' + \mathbf{F}_{t1} = m_1\mathbf{a}_1 ,$$
$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{T} + \mathbf{F}_{t2} = m_2\mathbf{a}_2 .$$

Pohybové rovnice lze s uvážením rovnic (1) a (2) přepsat:

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{T} + \mathbf{F}_{t1} = m_1\mathbf{a} ,$$
$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{T} + \mathbf{F}_{t2} = m_2\mathbf{a} .$$

Poslední rovnice vyjádříme ve složkách $(\mathbf{T} = -\mathbf{i}T, \ \ \mathbf{F}_{t1} = -\mathbf{i}F_{t1}, \ \ \mathbf{F}_{t2} = -\mathbf{i}F_{t2})$. Obdržíme:

$$F_1 + T - F_{t1} = m_1 a_x ,$$
$$F_2 - T - F_{t2} = m_2 a_x$$

a po dosazení za jednotlivé síly:

$$m_1 g \cdot \sin(\alpha) + T - f_1 \cdot m_1 g \cdot \cos(\alpha) = m_1 a_x \quad , \tag{3}$$
$$m_2 g \cdot \sin(\alpha) - T - f_2 \cdot m_2 g \cdot \cos(\alpha) = m_2 a_x \quad . \tag{4}$$

Sečteme rovnice (3) a (4) a po úpravě získáme zrychlení těles spojených nití:

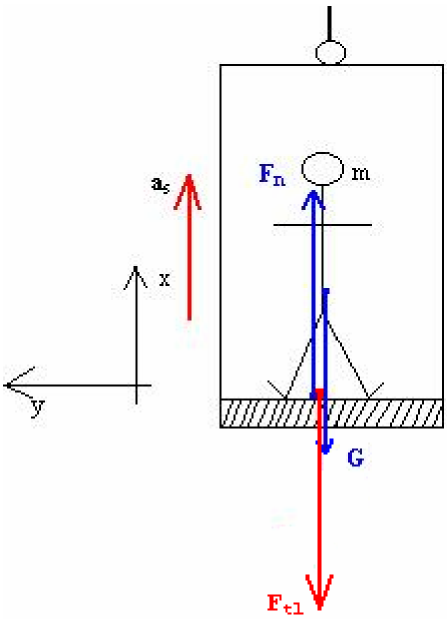
$$a_x = g\left(\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\frac{m_1 f_1 + m_2 f_2}{m_1 + m_2}\right) = 10\left(\sin 37° - \cos 37° \frac{3 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0{,}1}{3+2}\right) = 4{,}5 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

T můžeme určit např. z rovnice (2):

$$T = m_1[a_x + g(f_1 \cos(\alpha) - \sin(\alpha))] = 3[4{,}5 + 10(0{,}25 \cdot \cos 37° - \sin 37°)] = 1{,}44 \quad \mathrm{N} .$$

Příklad 2.2.5.
Stanovte tlakovou sílu, kterou působí člověk o hmotnosti m na podlahu výtahu, jestliže:
a) výtah se pohybuje se zrychlením a_s vzhůru,
b) výtah je v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně (a_s=0 m.s^{-2}),
c) výtah se pohybuje se zrychlením a_s dolů,
d) výtah padá volným pádem (pohyb se zrychlením g dolů)

Řešení:



a) Výtah se pohybuje se zrychlením a_s vzhůru. Na člověka o hmotnosti m ve výtahu jednak působí tíhová síla $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ a jednak normálová síla $\mathbf{F}_n$ vyvolaná podlahou jako reakce na tlakovou sílu $\mathbf{F}_{tl}$.

Pohybová rovnice člověka ve výtahu má tvar

$$\mathbf{F}_n + \mathbf{G} = m\mathbf{a}_s \quad .$$

Po rozepsání ve složkách (kladný směr osy x viz.obr.; index x pro zjednodušení zápisu v dalším však vynecháme)

$$F_n - mg = ma_s \quad .$$

Po úpravě

$$F_n = m(g + a_s) > G \quad .$$

Síla $\mathbf{F}_{tl}$ je reakcí k síle $\mathbf{F}_n$ a proto je stejně velká (má však opačný směr)

$$|\mathbf{F}_{tl}| = |\mathbf{F}_n| > |\mathbf{G}| \quad .$$

Tlaková síla je větší než *G*, dochází ke stavu přetížení (člověk má subjektivní pocit, že na něj působí větší tíhová síla než je *G*).

b) Výtah je v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně.V tomto případě je $a_s = 0$ a

$$F_n = mg = G$$

a velikost tlakové síly je

$$|\mathbf{F}_{tl}| = |\mathbf{F}_n| = |\mathbf{G}| \quad .$$

Člověk má pocit ,že na něj působí normální tíhová síla *G*.

c) Výtah se pohybuje se zrychlením a_s dolů.Pohybová rovnice má nyní tvar

$$F_n - mg = -ma_s \quad ,$$
$$F_n = m(g - a_s) < G$$

a velikost tlakové síly

$$|\mathbf{F}_{tl}| = |\mathbf{F}_n| < |\mathbf{G}| .$$

Tlaková síla je menší než *G* ,člověk má subjektivní pocit,že na něj působí menší tíhová síla než je *G*.

d) Ve zvláštním případě volného pádu kabiny výtahu je $a_s = g$ a

$$|\mathbf{F}_{th}| = |\mathbf{F}_n| = 0 .$$

Člověk se nyní nalézá v tzv. beztížném stavu. Má subjektivní pocit, že na něj nepůsobí tíhová síla.

Příklad 2.2.6.

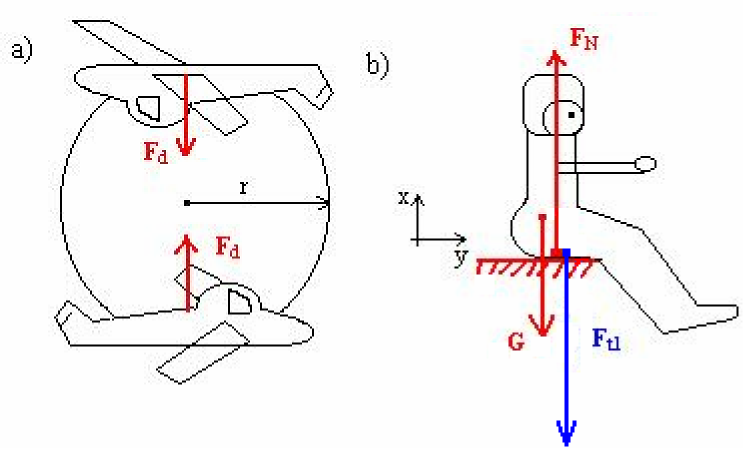
Pilot tryskového letadla letí po kružnici, která leží v rovině kolmé na povrch Země (provádí tzv. looping). Letadlo letí konstantní rychlostí 720 km.hod^{-1} a poloměr kružnice je 1,5 km. Jaká je zdánlivá tíhová síla, kterou pilot pociťuje:

a) když letadlo prolétává nejnižší bod kružnice,

b) když letadlo prolétává nejvyšší bod kružnice.

Příklad řešte v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí.

Řešení:



Na pilota během letu působí dvě síly: tíhová síla **G** a normálová síla $\mathbf{F}_N$, kterou na pilota vyvozuje sedačka jako reakci na tlakovou sílu $\mathbf{F}_{tl}$, kterou je do sedačky vtlačován. Výslednice těchto sil je rovna dostředivé síle, která udržuje pilota na kruhové dráze:

$$\mathbf{G} + \mathbf{F}_N = \mathbf{F}_d \quad .$$

a) Nejprve se budeme zabývat případem, když letadlo prolétává nejnižší bod kružnice. Nalézá-li se pilot s letadlem v nejnižším bodě kružnice, platí (viz. obr. B, kde je rovněž vyznačen kladný směr osy *x*; index *x* však pro zjednodušení zápisu v dalším budeme vynechávat)

$$F_N - mg = m\frac{v^2}{r}$$

a tudíž

$$F_N = m\left(g + \frac{v^2}{r}\right) = mg\left(1 + \frac{v^2}{gr}\right) \quad .$$

Po dosazení:

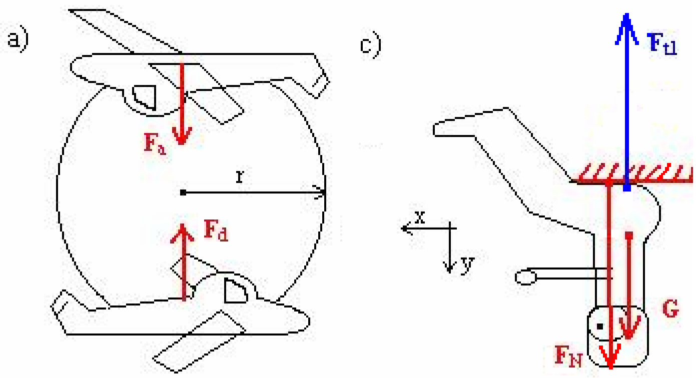
$$F_N = mg\left(1+\frac{200^2}{9,8\cdot 1500}\right) = mg\cdot 3,7\,.$$

Tlaková síla $\mathbf{F}_{tl}$,kterou je pilot vtlačován do sedačky , je stejně velká jako $\mathbf{F}_N$,má však obrácený směr (míří do sedačky)

$$|\mathbf{F}_{tl}| = |\mathbf{F}_N| = 3,7\cdot mg\,.$$

Protože tlaková síla je nyní 3,7 krát větší než tlaková síla, kterou pilot pociťuje, sedí-li v nehybné sedačce na zemi, pilot řekne, že pociťuje zdánlivou tíhovou sílu 3,7 krát větší, než je jeho normální tíhová síla (nebo, že pociťuje přetížení rovno 3,7g).

b) Nyní se budeme zabývat případem, kdy pilot prolétává nejvyšší bod kružnice.



Na vrcholu kružnice platí (viz. obr. c)):

$$F_N + mg = m\frac{v^2}{r} \quad ,$$

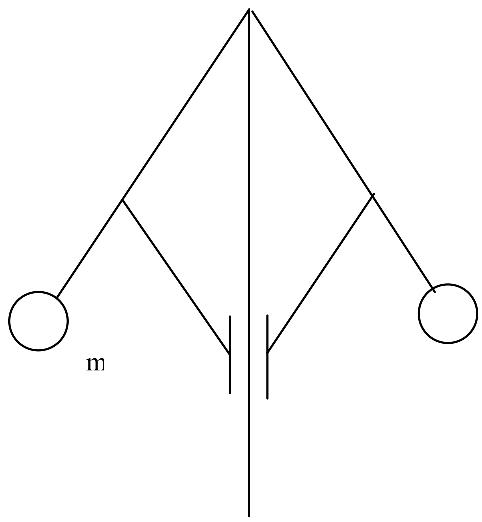
$$F_N = mg\left(-1+\frac{v^2}{gr}\right) \quad ,$$

$$F_N = mg\left(-1+\frac{200^2}{9,8\cdot 1500}\right) = mg\cdot 1,7 \quad .$$

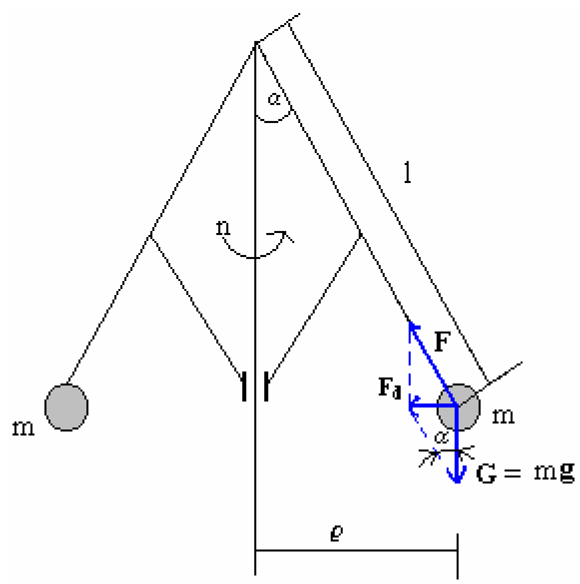
Zdánlivá tíhová síla, kterou pilot pociťuje v nejvyšším bodě kružnice je 1,7 krát větší, než jako normální tíhová síla. Poznamenejme ,že nyní je pilot vtlačován do sedačky tlakovou silou $\mathbf{F}_{tl}$, která míří vzhůru. Pilot proto může mít dojem ,že směr gravitační síly je převrácený – obloha je pod jeho nohama a Země nad hlavou. Tento pocit může být pro nezkušeného pilota velmi matoucí.

Příklad 2.2.7.

Stanovte úhel α odklonu závaží od svislé osy Wattova odstředivého regulátoru (viz obrázek) při otáčkách n = 150 min^{-1}. Regulátor je tvořen dvěma symetricky umístěnými závažími o hmotnosti m rotujícími na výklopném rameni délky l = 0,1 m.



Řešení:



Dle zadání je:

$l = 0{,}1\ \text{ m},\quad n = 150\ \text{ min}^{-1}$

$f = \dfrac{n}{60} = \dfrac{150}{60} = 2{,}5\quad \text{s}^{-1}$

$\alpha = ?$

Na závaží působí jednak tíhová síla **G** a jednak tahová síla závěsu **F**. Tyto síly se skládají ve výslednou dostředivou sílu $\mathbf{F_d}$

$$\mathbf{F_d} = \mathbf{F} + \mathbf{G} \quad ,$$

která uděluje závaží dostředivé zrychlení. Pohybová rovnice závaží má proto tvar

$$\mathbf{F}_d = m\mathbf{a}_d \quad .$$

Dostředivá síla i dostředivé zrychlení mají stejný směr, který známe (viz obr.). Proto můžeme opustit vektorový zápis. Označme jako ρ poloměr kružnice opisované závažím. Pak pohybovou rovnici můžeme přepsat ve tvaru

$$F_d = m\frac{v^2}{\rho} = m\frac{\rho^2\omega^2}{\rho} = m\rho\omega^2 = m\rho 4\pi^2 f^2 \quad .$$

Úhel, který svírá závěs závaží s osou rotace stanovíme následovně:

$$\tan(\alpha) = \frac{F_d}{G} = \frac{m\rho 4\pi^2 f^2}{mg} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad .$$

Úpravou této rovnice obdržíme

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha)\frac{g}{\rho 4\pi^2 f^2} \quad , \tag{1}$$

kde $\sin(\alpha)$ stanovíme z délky závěsu l a poloměru kružnice ρ

$$\sin(\alpha) = \frac{\rho}{l} \quad .$$

Po dosazení do rovnice (1) obdržíme

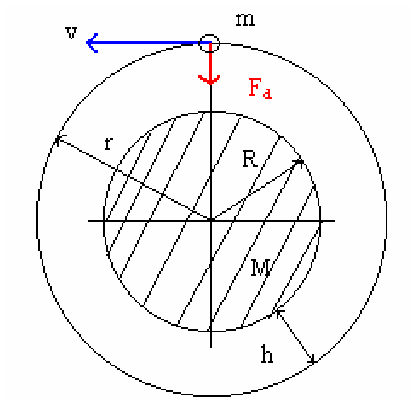
$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha)\frac{g}{\rho 4\pi^2 f^2} = \frac{\rho}{l}\frac{g}{\rho 4\pi^2 f^2} = \frac{g}{4\pi^2 f^2 l} \quad .$$

Po dosazení číselných hodnot získáme

$$\cos(\alpha) = \frac{9{,}81}{0{,}1 \cdot 4\pi^2 \cdot 2{,}5^2} = 0{,}4 \Rightarrow \alpha = 66{,}4^\circ \quad .$$

Příklad 2.2.8.
Družice hmotnosti m = 10^3 kg se pohybuje v ekvátorové rovině po geostacionární dráze (tj. s dobou oběhu 24 h) okolo Země. Spočtěte poloměr její dráhy, její rychlost a dostředivou sílu, která na ní působí. Hmotnost Země je M = $5{,}98.10^{24}$ kg, poloměr Země je R = $6{,}4.10^6$ m a gravitační konstanta κ = $6{,}67.10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$. Příklad řešte v inerciální vztažné soustavě.

Řešení:



Dle zadání je:

$m = 10^3 \quad \text{kg}$

$M = 5{,}98 \cdot 10^{24} \quad \text{kg}$

$\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \quad \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

$T = 24 \cdot 3600 = 86400 \quad \text{s}$

$r = ?,\ v = ?,\ F_d = ?$

Vyjdeme z pohybové rovnice družice:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}\,.$$

Na družici působí jediná síla, a to síla gravitační $\mathbf{F}_g$. Tato síla uděluje družici dostředivé zrychlení $\mathbf{a}_d$. Pohybovou rovnici proto můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{a}_d\,.$$

Dostředivá síla i dostředivé zrychlení mají stejný směr - do středu Země. Protože směr vektorů známe, můžeme opustit vektorový zápis. Velikost gravitační síly je dána Newtonovým gravitačním zákonem

$$F_g = \kappa \frac{mM}{r^2}$$

a velikost dostředivého zrychlení vyjádříme pomocí výrazu známého z kinematiky

$$a_d = \frac{v^2}{r} \quad .$$

Po dosazení do pohybové rovnice obdržíme

$$\kappa \frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad ,$$

odkud po úpravě získáme

$$\kappa \frac{M}{r} = v^2 \quad . \tag{1}$$

Obvodovou rychlost družice můžeme vyjádřit pomocí vztahu

$$v = \frac{2\pi\, r}{T} \quad .$$

Po dosazení do vztahu (1) získáme

$$\kappa \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow r^3 = \kappa M \frac{T^2}{4\pi^2} \quad .$$

Poloměr oběhu družice se proto rovná

$$r = \sqrt[3]{\kappa M \frac{T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot \frac{86400^2}{4\pi^2}} = 42{,}3 \cdot 10^6 \ \text{ m} ,$$

obvodová rychlost družice pak je

$$v = \frac{2\pi\, r}{T} = 3{,}1 \cdot 10^3 \quad \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

a dostředivá síla

$$F_d = m\frac{v^2}{r} = 223{,}5 \quad \text{N} \quad .$$

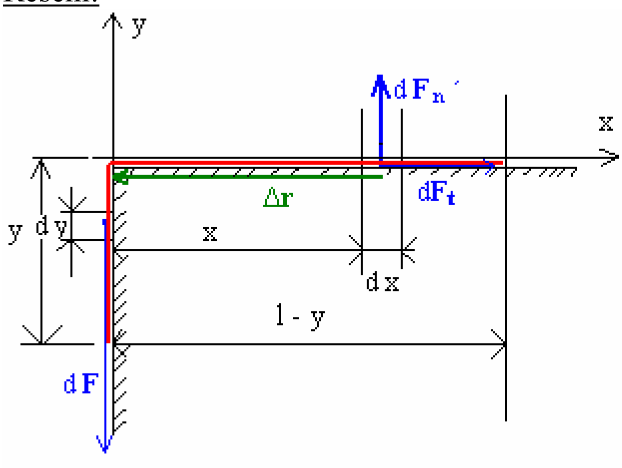
Výška oběhu družice nad povrchem Země je rovna

$$h = r - R = 42{,}3 \cdot 10^6 - 6{,}4 \cdot 10^6 = 35{,}9 \cdot 10^6 \quad \text{m} \quad .$$

2.3. *Práce a energie*

Příklad 2.3.1.
Řetízek hmotnosti m = 0.8 kg a délky l = 1,5 m leží na vodorovném stole tak, že jeden jeho konec visí přes hranu desky. Řetízek začne sám klouzat ze stolu, jestliže přes hranu visí 1/3 jeho délky. Jakou práci vykoná síla tření při úplném sklouznutí řetízku?

Řešení:



Koeficient tření mezi řetízkem a stolem označme f. Hmotnosti připadající na elementy řetízku délky dx a dy jsou rovny

$$\frac{m}{l}\mathrm{d}x, \quad \frac{m}{l}\mathrm{d}y \quad .$$

Velikost tíhové síly připadající na element řetízku dy (na obrázku je element této tíhové síly označen d**F**)

$$\mathrm{d}G = g\frac{m}{l}\mathrm{d}y \quad .$$

Velikost normálové síly připadající na element řetízku dx

$$dF_n' = g\frac{m}{l}\mathrm{d}x \quad .$$

Třecí síla mezi stolem a elementem řetízku dx pak je rovna

$$\mathrm{d}F_t = \mathrm{d}F_n' f = \frac{gmf}{l}\mathrm{d}x \quad .$$

Podle zadání začne řetízek sám sklouzávat, jestliže:

$$y = \frac{1}{3} l \quad .$$

Pak na stole leží ještě část řetízku o délce

$$l - y = \left(1 - \frac{1}{3}\right) l = \frac{2}{3} l \quad .$$

V okamžiku, kdy řetízek začne sklouzávat, je tíhová síla G stejně velká jako síla tření F_t. Tyto síly nalezneme integrací:

$$F_t = \int \mathrm{d}F_t = \int_0^{\frac{2}{3}l} \frac{gmf}{l} \mathrm{d}x = \frac{gmf}{l} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{2gmf}{3} \quad ,$$

a

$$G = \int \mathrm{d}G = \int_0^{\frac{l}{3}} \frac{gm}{l} \mathrm{d}y = \frac{gm}{l} \cdot \frac{l}{3} = \frac{gm}{3} \quad .$$

Podle uvedené podmínky pak platí:

$$G = F_t \quad .$$

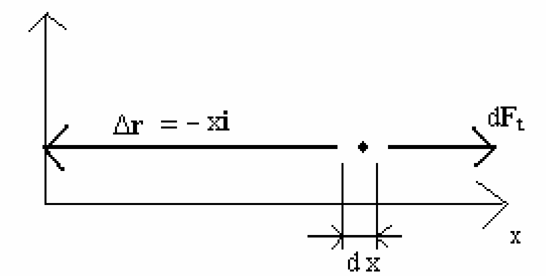
Po dosazení

$$\frac{1}{3} gm = \frac{2}{3} gmf$$

a po úpravě získáme velikost neznámého koeficientu tření

$$f = \frac{1}{2} \quad .$$

Práce vykonaná silou tření působící na element dx při posunutí tohoto elementu o vzdálenost $\Delta\mathbf{r}$ (přírůstek polohového vektoru) je rovna



$$\mathrm{d}A_t = \mathrm{d}\mathbf{F}_t \cdot \Delta\mathbf{r} \quad .$$

Vyjádřím si vektorové veličiny ve složkách (viz obrázek)

$$\Delta \mathbf{r} = -x\mathbf{i} \quad ,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_t = \mathrm{d}F_t \cdot \mathbf{i} \quad .$$

Pak práci vykonanou třecí silou při posunutí elementu dx po dráze x můžeme vyjádřit ($\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$):

$$\mathrm{d}A_t = -\mathrm{d}F_t \cdot x = -g\frac{m}{l} f \cdot x \cdot \mathrm{d}x \quad .$$

Celková práce vykonaná třecí silou při sklouznutí řetízku délky (2/3)l je pak rovna

$$A_t = \int \mathrm{d}A_t = -g\frac{m}{l} f \int_0^{\frac{2}{3}l} x\mathrm{d}x = -g\frac{m}{l} f\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{2}{3}l} = -\frac{2}{9}gmfl \quad .$$

Číselně:

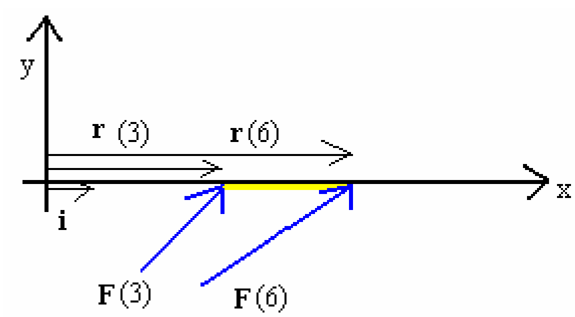
$$A_t = -\frac{2}{9}\cdot 9{,}81\cdot 0{,}8\cdot\frac{1}{2}\cdot 1{,}5 = -1{,}308 \quad \mathrm{J} \quad .$$

Práce třecí síly je $A_t < 0$ protože třecí síla F_t působí proti pohybu řetízku (brzdí pohyb), řetízek koná práci na úkor své potenciální energie.Vykonaná práce se projeví přírůstkem vnitřní energie stolu a řetízku.

<u>Příklad 2.3.2.</u>

Na hmotný bod, který se pohybuje po trajektorii dané v SI rovnicí $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i}$ působí síla daná v SI rovnicí $\mathbf{F}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$. Určete práci A, kterou tato síla vykoná v době mezi $t_1 = 3$ s a $t_2 = 6$ s a průměrný výkon P_p této síly v dané době. Jak velké byly okamžité výkony zadané síly v časech t_1 a t_2? Je vykonaná práce rovna přírůstku kinetické energie hmotného bodu? Hmotnost hmotného bodu je $m = 5$ kg.

<u>Řešení:</u>



Práci koná jen tečná složka síly

$$\mathbf{F}_\tau = 2t^2\mathbf{i} \quad .$$

Polohový vektore hmotného bodu je dán rovnicí

$$\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} \quad .$$

Přírůstek polohového vektoru je pak roven

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = 2t\,\mathrm{d}t\,\mathbf{i}$$

a velikost přírůstku polohového vektoru (která je rovna přírůstku dráhy)

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}s = 2t\,\mathrm{d}t \quad .$$

Okamžitou rychlost stanovíme z definičního vztahu

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = 2t\,\mathbf{i} \quad .$$

Práce vykonaná silou **F** je rovna

$$A = \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} 2t^2\, 2t\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} 4t^3 \mathrm{d}t = \frac{4}{4}\left[t^4\right]_3^6 = 6^4 - 3^4 = 1215 \quad \mathrm{J} \quad .$$

Průměrný výkon síly **F** v časovém intervalu od t_1 do t_2

$$P_p = \frac{A}{t_2 - t_1} = \frac{1215}{6-3} = 405 \quad \mathrm{W} \quad .$$

Okamžitý výkon síly **F** stanovíme ze vztahu

$$P(t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_t v = 2t^2\, 2t = 4t^3 \quad .$$

Okamžitý výkon v časech t_1 a t_2 je pak roven

$$P_1 = 4t_1^3 = 4 \cdot 3^3 = 108 \quad \mathrm{W}, \quad P_2 = 4t_2^3 = 4 \cdot 6^3 = 864 \quad \mathrm{W} \quad .$$

Velikost okamžité rychlosti je rovna

$$v(t) = 2t \quad ,$$

takže okamžitá rychlost má v časech t_1 a t_2 velikost

$$v_1 = 2t_1 = 2 \cdot 3 = 6 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \quad v_2 = 2t_2 = 2 \cdot 6 = 12 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad .$$

Přírůstek kinetické energie hmotného bodu je pak roven

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(12^2 - 6^2 \right) = 270 \quad \mathrm{J} \quad .$$

Povšimněme si, že $\Delta E_k \neq A$. Odtud vyplývá, že na přírůstek kinetické energie ΔE_k se spotřebuje jen část vykonané práce A.

<u>Příklad 2.3.3.</u>
Při akceleračních závodech se startuje z klidu a měří se čas, za který automobil urazí dráhu 400 m. Dosažený čas je 8 s. Vypočtěte konečnou rychlost v, konečné zrychlení automobilu a_τ a výkon motoru P za předpokladu, že hmotnost automobilu je m = 2000 kg a výkon motoru je během jízdy konstantní. Tření zanedbejte. (Srovnejte s příkladem 2.2.1).

<u>Řešení:</u>
Práce vykonaná motorem automobilu za čas t je při konstantním výkonu motoru rovna

$$A = Pt \quad .$$

Přírůstek kinetické energie automobilu, který se rozjíždí z klidu je roven

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad .$$

Práce vykonaná motorem automobilu se přemění na přírůstek kinetické energie

$$A = \Delta E_k \quad .$$

Po dosazení získáme

$$Pt = \frac{1}{2} m v^2 \quad .$$

Z této rovnice vyjádříme rychlost automobilu

$$v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} = \sqrt{\frac{2P}{m}} \cdot t^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Dráha ujetá automobilem je pak rovna

$$s = \int_0^t v \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2P}{m}} \int_0^t t^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2P}{m}} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \quad .$$

Úpravou této rovnice získáme neznámý konstantní výkon motoru automobilu

$$P = s^2 \frac{m}{2}\frac{9}{4}t^{-3} = \frac{9}{8}\cdot 2\cdot 10^3\cdot\left(4\cdot 10^2\right)^2\cdot 8^{-3} = 7{,}05\cdot 10^5 \quad \mathrm{W} \quad .$$

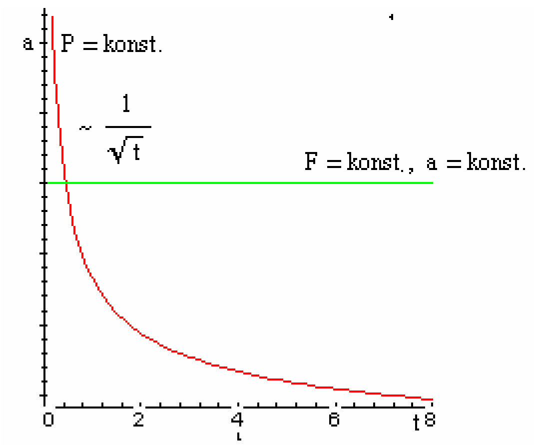
Konečnou rychlost automobilu stanovíme z dříve odvozeného vztahu

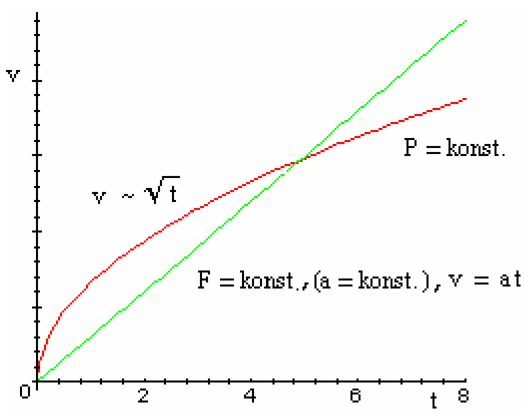
$$v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 7{,}05\cdot 10^5\cdot 8}{2\cdot 10^3}} = 75 \quad \mathrm{m\cdot s^{-1}} \cong 270 \quad \mathrm{km\cdot h^{-1}} \quad .$$

Velikost tečného zrychlení automobilu na konci dráhy je pak je rovna

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{2P}{m}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{P}{2mt}} = \sqrt{\frac{7{,}05\cdot 10^5}{2\cdot 2\cdot 10^3\cdot 8}} \cong 4{,}7 \quad \mathrm{m\cdot s^{-2}} \quad .$$

Průběh velikosti zrychlení a velikosti okamžité rychlosti získané v tomto příkladu (červené křivky) jsou porovnávány s průběhy těchto veličin z příkladu 2.2.1 (zelené křivky) na následujících obrázcích:





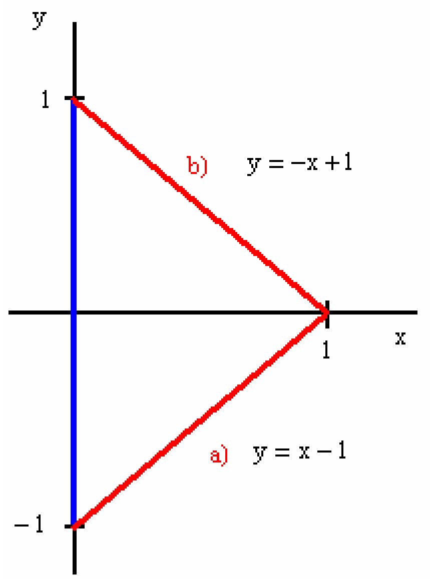
Příklad 2.3.4.

Těleso hmotnosti m = 1 kg se přemístí z bodu A[0,-1,0] do bodu B[0,1,0] působením síly dané v SI rovnicí

$$\mathbf{F} = 2y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$$

jednou po ose y, podruhé po lomené trajektorii určené přímkami $y = x-1$ a $y = -x+1$. Jakou práci vykoná síla **F** ? Je tato síla konzervativní ?

Řešení:



Složky síly jsou rovny:

$$F_x = 2y^2,\ \ F_y = x^2,\ \ F_z = 3y \quad .$$

1) Přemisťováním po přímce totožné s osou y se vykoná práce:

$$A_1 = \int_A^B F_y \mathrm{d}y = 0 \ \ \mathrm{J} \qquad (F_y = x^2 = 0 \text{ pro } x = 0) \ \ .$$

2) Přemisťováním po lomené trajektorii se vykoná práce:

$$A_2 = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy \quad .$$

Přemisťování se děje po částech přímek:

$$y=-x+1$$

a

$$y=x-1 \ \ .$$

Příslušné integrály jsou pak rovny:

$$\int_A^B F_x dx = \int_0^0 2y^2 dx = 0 \quad J$$

a

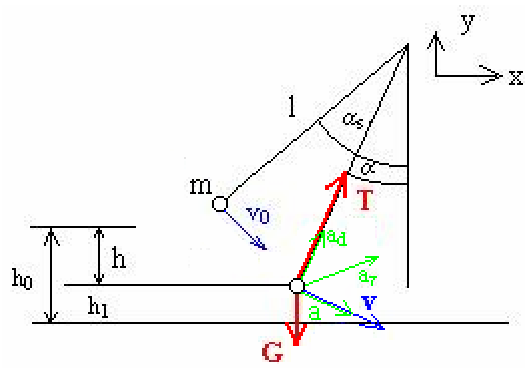
$$\int_A^B F_y dy = \int_{-1}^{1} x^2 dy = \int_{-1}^{0} (y+1)^2 dy + \int_{0}^{1} (-y+1)^2 dy = \frac{2}{3} \quad J \quad ,$$

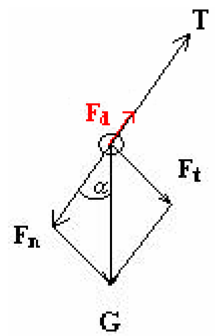
kde jsme za x dosadili z rovnic přímek.

Protože $A_1 \neq A_2$, síla **F** není konzervativní.

<u>Příklad 2.3.5.</u>
Kulička o hmotnosti m = 200 g je zavěšena na vlákně délky l = 0,5 m. Kulička je vychýlena ze svislé polohy o úhel α_o = 60^o a je jí udělena počáteční obvodová rychlost v_o = 2 m.s^{-1} ve směru k rovnovážné poloze (svislé). Stanovte tahovou sílu ve vlákně a velikost zrychlení kuličky v okamžiku, kdy vlákno svírá úhel α = 30^o.

<u>Řešení:</u>





Vyjdeme z pohybové rovnice

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad .$$

Na kuličku působí tíhová síla **G** a tahová síla ve vlákně **T.** Pak

$$\mathbf{G} + \mathbf{T} = m\mathbf{a} \quad .$$

Pohybovou rovnici přepíšeme ve složkách. Ve směru normály k trajektorii platí

$$T - F_n = ma_d \quad . \tag{1}$$

Rozdíl normálové a tahové síly je roven dostředivé síle

$$F_d = T - F_n \quad ,$$

která uděluje kuličce dostředivé zrychlení

$$a_d = \frac{v^2}{l} \quad .$$

Po dosazení do rovnice (1) získáme

$$T - mg\cos(\alpha) = m\frac{v^2}{l} \quad ,$$

Odtud po úpravě obdržíme

$$T = m\left(g\cos(\alpha) + \frac{v^2}{l}\right) \quad .$$

Pro tečnou složku urychlující síly platí :

$$F_t = mg\sin(\alpha) \quad ,$$

takže tečné zrychlení je rovno

$$a_\tau = \frac{F_\tau}{m} = g\sin(\alpha) \quad .$$

Rychlost kuličky v určíme ze zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad .$$

Po zkrácení

$$v^2 = v_0^2 + 2gh \quad . \qquad (2)$$

Výška h je rovna

$$h = h_0 - h_1 = l - l\cos(\alpha_0) - (l - l\cos(\alpha)) = l(\cos(\alpha) - \cos(\alpha_0)) \quad .$$

Po dosazení do rovnice (2) získáme

$$v^2 = v_0^2 + 2gl(\cos(\alpha) - \cos(\alpha_0)) \quad .$$

Pak tahová síla ve vláknu je rovna

$$T = m\left(g\cos(\alpha) + \frac{v_0^2 + 2gl(\cos(\alpha) - \cos(\alpha_0))}{l}\right)$$

$$T = m\left(\frac{v_0^2}{l} + g(3\cos(\alpha) - 2\cos(\alpha_0))\right)$$

Po dosazení číselných hodnot obdržíme

$$T = 0{,}2\left(\frac{2^2}{0{,}5} + 10(3\cdot 0{,}8 - 2\cdot 0{,}5)\right) = 4{,}8 \text{ N} \quad .$$

Velikost tečného zrychlení stanovíme ze vztahu

$$a_\tau = g\sin(\alpha) = 10\cdot 0{,}5 = 5 \quad \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

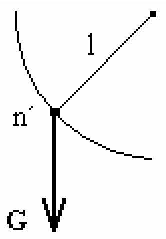
a velikost dostředivého zrychlení ze vztahu

$$a_d = \frac{v^2}{l} = \frac{v_0^2}{l} + 2g(\cos(\alpha) - \cos(\alpha_0)) = \frac{2^2}{0{,}5} + 2\cdot 10(\cos 30° - \cos 60°) = 15{,}4 \quad \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \quad .$$

Velikost okamžitého zrychlení je pak rovna

$$a = \sqrt{a_d^2 + a_\tau^2} = \sqrt{15{,}4^2 + 5^2} = 16{,}2 \quad \text{m}\cdot\text{s}^{-2} .$$

<u>Řešení v rámci rotačního pohybu:</u>



Tíhová síla vyvolává moment (viz obrázek)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{G} \quad .$$

Pohybová rovnice při rotačním pohybu má tvar

$$\mathbf{M} = J\boldsymbol{\varepsilon} \quad .$$

Velikost momentu síly je rovna

$$M = Gl\sin(\alpha) = mgl\sin(\alpha) \quad .$$

Moment setrvačnosti kuličky lze zapsat

$$J = ml^2 \quad .$$

Úhlové zrychlení a tečné zrychlení jsou vázány vztahem

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{l} \quad .$$

Po dosazení do pohybové rovnice získáme

$$mgl\sin(\alpha) = ml^2 \frac{a_\tau}{l} \quad ,$$

odkud po úpravě získáme tečné zrychlení

$$a_\tau = g\sin(\alpha) \quad .$$

Zákon zachování energie při rotačním pohybu lze zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad ,$$

kde mezi úhlovou rychlostí a obvodovou rychlostí platí vztah

$$\omega = \frac{v}{l} \quad .$$

Po dosazení za moment setrvačnosti kuličky a úhlovou rychlost obdržíme

$$\frac{1}{2}ml^2 \frac{v_0^2}{l^2} + mgh = \frac{1}{2}ml^2 \frac{v^2}{l^2} \quad ,$$

odkud po úpravě získáme vztah pro rychlost kuličky

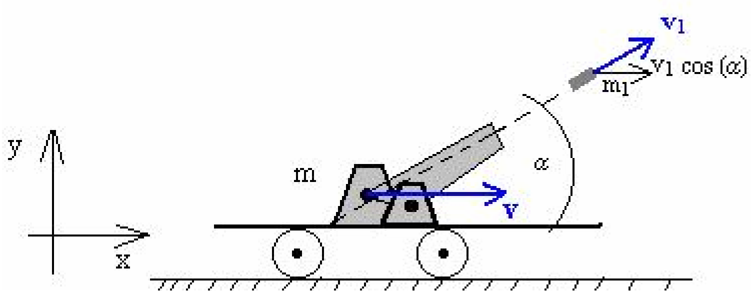
$$v_0^2 + 2gh = v^2 \quad .$$

2.4. *Dynamika soustavy hmotných bodů*

Příklad 2.4.1.

Dělo je upevněno na plošině vagónu, který se pohybuje setrvačností po vodorovné trati v přímém směru rychlostí v = 2 km/hod. Hlaveň děla míří ve směru pohybu vagónu a svírá s vodorovnou rovinou úhel α = 30°. Po výstřelu z děla rychlost vagónu klesla o 1/3 původní rychlosti. Určete rychlost v_1 náboje vzhledem k místu výstřelu. Hmotnost vystřeleného náboje je m_1 = 5 kg a hmotnost vagónu s dělem m = 30 t.

Řešení:



Vagón s dělem a náboj představují soustavu dvou hmotných bodů. Na soustavu nepůsobí vnější síly, proto lze pro řešení úlohy použít zákon zachování hybnosti. Je-li hybnost soustavy před výstřelem

$$p_{0x} = (m_1 + m)v \quad ,$$

pak po výstřelu je součet x-ových složek hybnosti roven

$$p_{1x} = m_1 v_1 \cos(\alpha) + m\frac{2}{3}v \quad .$$

Ze zákona zachování hybnosti pro x-ové složky

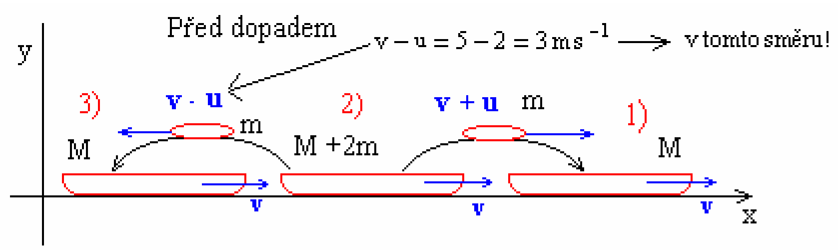
$$(m_1 + m)v = m_1 v_1 \cos(\alpha) + m\frac{2}{3}v \quad ,$$

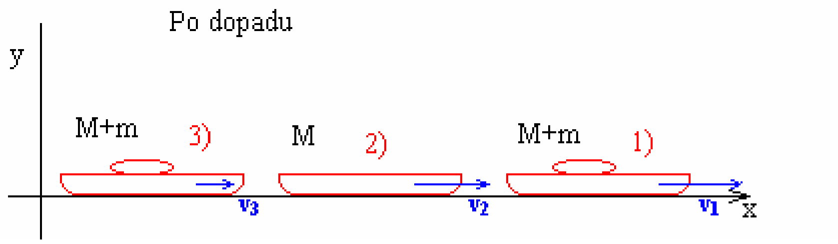
odkud

$$v_1 = \frac{v\left(m_1 + \frac{1}{3}m\right)}{m_1 \cos(\alpha)} = \frac{2000\left(5 + \frac{30 \cdot 10^3}{3}\right)}{3600 \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ} = 1284 \quad m \cdot s^{-1} \, .$$

Příklad 2.4.2.
Tři loďky stejné hmotnosti M = 250 kg jedou za sebou stejnou rychlostí v = 5 m.s^{-1}. Z druhé loďky se současně vyhodí do prvé a třetí pytel hmotnosti m = 20 kg s relativní rychlostí u = 2 m.s^{-1} vůči druhé lodi. Jak se změní rychlost loděk ?

Řešení :





Vztažnou soustavu spojíme s vodou, kterou pokládáme za nehybnou. Dle zadání máme následující číselné hodnoty:

$$M = 250 \text{ kg}$$
$$v = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$
$$m = 20 \text{ kg}$$
$$u = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Soustavu tří loděk i s pytli můžeme považovat za tři izolované soustavy hmotných bodů a pro každou z nich bude platit zákon zachování hybnosti

$$\mathbf{p} = \mathbf{konst}.$$

V případě první loďky bude proto platit, že součet hybnosti samotné loďky a samotného pytle před jeho dopadem do loďky se musí rovnat hybnosti loďky a pytle po dopadu

$$Mv + m(v+u) = (M+m)v_1 \quad ,$$

odkud po úpravě a po dosazení číselných hodnot získáme rychlost loďky po dopadu pytle

$$v_1 = v + u\frac{m}{M+m} = 5 + 2\frac{20}{250+20} = 5{,}15 \quad \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \quad .$$

V případě druhé loďky bude platit, že hybnost loďky s pytli se musí rovnat součtu hybnosti vyhozených pytlů a samotné loďky

$$(M+2m)v = Mv_2 + m(v+u) + m(v-u) \quad ,$$

odkud po úpravě a po dosazení číselných hodnot získáme rychlost loďky po vyhození pytlů

$$v_2 = v = 5 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad .$$

V případě třetí loďky bude pak platit, že součet hybnosti samotné loďky a samotného pytle před jeho dopadem do loďky se musí rovnat hybnosti loďky a pytle po dopadu

$$Mv + m(v-u) = (M+m)v_3 \quad ,$$

odkud po úpravě a po dosazení číselných hodnot získáme rychlost loďky po dopadu pytle

$$v_3 = v - u\frac{m}{M+m} = 5 - 2\frac{20}{250+20} = 4{,}85 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad .$$

Příklad 2.4.3.
Na jednom konci lodě o délce l = 3,6 m a hmotnosti m_2 = 90 kg stojí člověk o hmotnosti m_1 = 70 kg. Jak daleko se loďka posune, přejde-li člověk na její opačný konec ? Odpor vody zanedbejte.

Řešení:
Dle zadání jsou číselné hodnoty:

$l = 3{,}6$

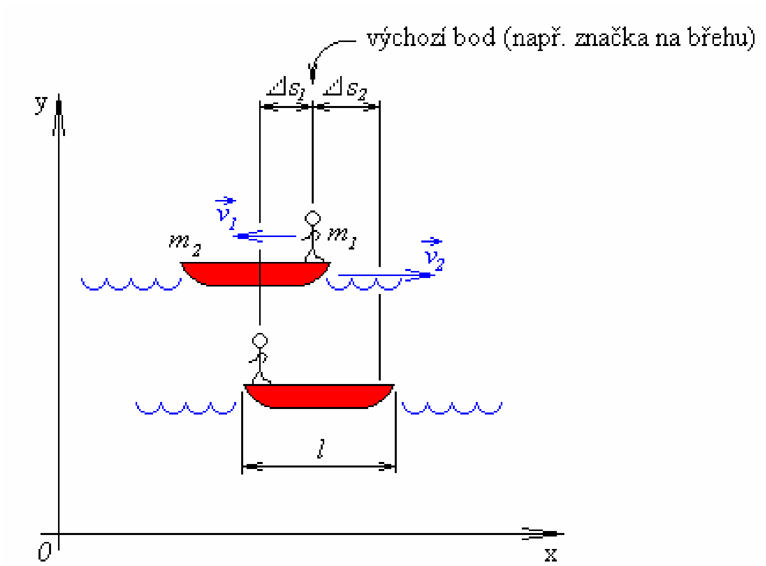
$m_1 = 70\text{kg}$

$m_2 = 90\text{kg}$

$\Delta s_2 = ?$

Řešení úlohy nalezneme dvěma způsoby.

a) Vztažnou soustavu spojíme s povrchem Země (břehem).



Použijeme zákon zachování hybnosti izolované soustavy:

$$\mathbf{p} = \mathbf{konst.}$$

Izolovaná soustava je tvořena dvěma tělesy (člověkem a lodí). Než se člověk dal do pohybu, byly hybnosti obou těles rovny nule. Proto:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \quad ,$$
$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad ,$$
$$m_1\mathbf{v}_1 = -m_2\mathbf{v}_2 \quad .$$

Vektor $\boldsymbol{v_1}$ má opačný směr než vektor $\boldsymbol{v_2}$. Zvolíme soustavu souřadnic (viz obr.). Pak ve složkách (složka vektoru v_1 je záporná, složka vektoru v_2 je kladná):

$$-m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \quad ,$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad .$$

Člověk přejde loď za čas Δt. Pak vůči břehu jsou velikosti rychlostí (viz obr.):

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t} \qquad \text{a} \qquad v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t} \quad .$$

Po dosazení a úpravě:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{\Delta s_1}{\Delta t}}{\frac{\Delta s_2}{\Delta t}} = \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad . \qquad (1)$$

Zároveň ale musí platit (viz obr.):

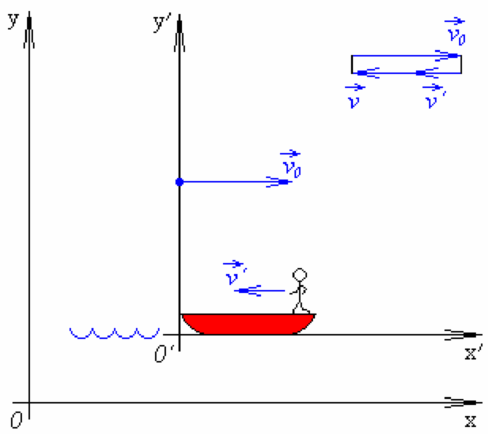
$$|\Delta s_1| + |\Delta s_2| = |l| \quad . \qquad (2)$$

Řešením (1) a (2) získáme:

$$\Delta s_2 = l \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = 3{,}6 \cdot \frac{1}{1 + \frac{90}{70}} = 1{,}575 \quad \text{m} \quad ,$$

$$\Delta s_1 = l - \Delta s_2 = 3{,}6 - 1{,}575 = 2{,}025 \quad \text{m} \quad .$$

b) Při druhém způsobu řešení úlohy použijeme Galileiho transformaci a Galileiho princip skládání rychlostí. Uvažujme dvě vztažné soustavy:



Nečárkovaná soustava je spojena s břehem, čárkovaná s lodí. Čárkovaná soustava (loď) se vůči nečárkované pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v_0}$. Transformační vztahy mezi soustavami jsou:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v_0 t} + \mathbf{r_0}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v}', \qquad t = t' \quad .$$

Pro přírůstky polohových vektorů platí:

$$\mathbf{\Delta r} = \mathbf{\Delta r_0} + \mathbf{\Delta r}', \qquad \mathbf{\Delta r} = \mathbf{v_0}\Delta t, \qquad \mathbf{\Delta r} = \mathbf{v}\Delta t, \qquad \mathbf{\Delta r}' = \mathbf{v}'\Delta t,$$

kde $\boldsymbol{v_0}$ – rychlost lodi vůči břehu,
$\boldsymbol{v}$ – rychlost člověka vůči břehu,
$\boldsymbol{v}'$ – rychlost člověka vůči lodi,
$\Delta\boldsymbol{r_0}$ – změna polohy lodi vůči břehu (Δs_2),
$\Delta\boldsymbol{r}$ – změna polohy člověka vůči břehu (Δs_1),
$\Delta\boldsymbol{r}'$ – změna polohy člověka vůči lodi (l).

Zákon zachování hybnosti izolované soustavy lze zapsat ve tvaru:

$$m_1\mathbf{v} + m_2\mathbf{v_0} = \mathbf{0} \quad , \tag{3}$$

odkud po úpravě získáme

$$\mathbf{v_0} = -\frac{m_1}{m_2}\cdot\mathbf{v} \quad . \tag{4}$$

Z Galileiho transformace získáme pro přírůstky polohových vektorů:

$$\mathbf{\Delta r} = \mathbf{\Delta r_0} + \mathbf{\Delta r}' \quad . \tag{5}$$

Galileiho princip skládání rychlostí říká:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v}' \quad ,$$

kde

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{\Delta r}}{\Delta t}, \quad v_0 = \frac{\mathbf{\Delta r_0}}{\Delta t}, \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{\Delta r}'}{\Delta t} \quad . \tag{6}$$

Po dosazení (6) do (3) a vynásobení rovnice Δt získáme:

$$m_1\mathbf{\Delta r} + m_2\mathbf{\Delta r_0} = \mathbf{0} \quad . \tag{7}$$

Po dosazení (5) do (7) a úpravě:

$$\Delta \mathbf{r}_0 = -\Delta \mathbf{r}' \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = -\Delta \mathbf{r}' \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad . \tag{8}$$

Rovnice (4) a (8) udávají směr vektorů $\boldsymbol{v_0}$ a $\boldsymbol{\Delta r_0}$ pro zadaný směr $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{\Delta r'}$ (je opačný než $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{\Delta r'}$). Po dosazení (8) do (5) a úpravě obdržíme:

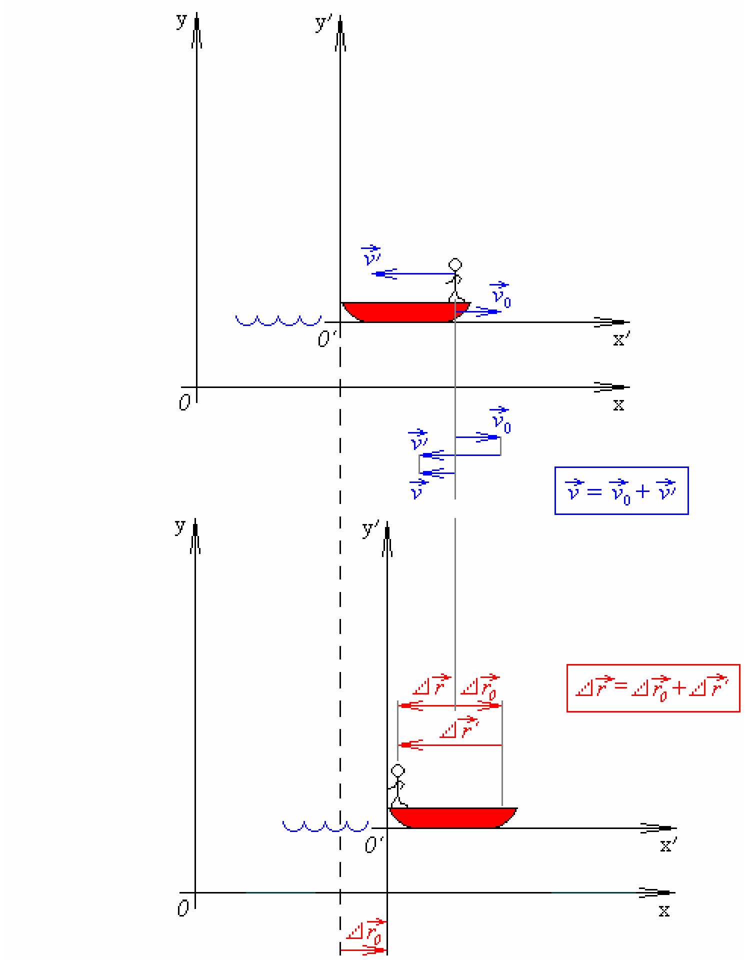
$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}' \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad . \tag{9}$$

Pro velikosti přírůstků vektorů pak platí ($\Delta r' = l$, $\Delta r_0 = \Delta s_2$, $\Delta r = \Delta s_1$):

$$\Delta r_0 = \Delta s_2 = \frac{l \cdot m_1}{m_1 + m_2} = \frac{3{,}6\,\mathrm{m} \cdot 70\,\mathrm{kg}}{70\,\mathrm{kg} + 90\,\mathrm{kg}} = 1{,}575\ \mathrm{m} \quad ,$$

$$\Delta r = \Delta s_1 = \frac{l \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{3{,}6\,\mathrm{m} \cdot 90\,\mathrm{kg}}{70\,\mathrm{kg} + 90\,\mathrm{kg}} = 2{,}025\ \mathrm{m} \quad .$$

Příslušné vektory jsou uvedeny na obrázku.



$\boldsymbol{v_0}$ – rychlost lodi (čárkované soustavy) vůči břehu

$\boldsymbol{v'}$ - rychlost člověka vůči lodi (v čárkované soustavě)

$\boldsymbol{v}$ – rychlost člověka vůči břehu (v nečárkované soustavě)

$\boldsymbol{\Delta r_0}$ - změna polohy lodi vůči břehu

$\boldsymbol{\Delta r'}$ - změna polohy člověka vůči lodi

$\boldsymbol{\Delta r}$ – změna polohy člověka vůči břehu

Zde:

$$\Delta r' = l, \quad \Delta r = \Delta s_1, \quad \Delta r_0 = \Delta s_2.$$

Pro stanovení rychlostí je nutné zadat Δt. Nechť např. Δt = 10 s. Pak

$$v' = \frac{\Delta r'}{\Delta t} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{3,6}{10} = 0,36 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

$$v_0 = \frac{\Delta r_0}{\Delta t} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t} = \frac{1,575}{10} = 0,1575 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

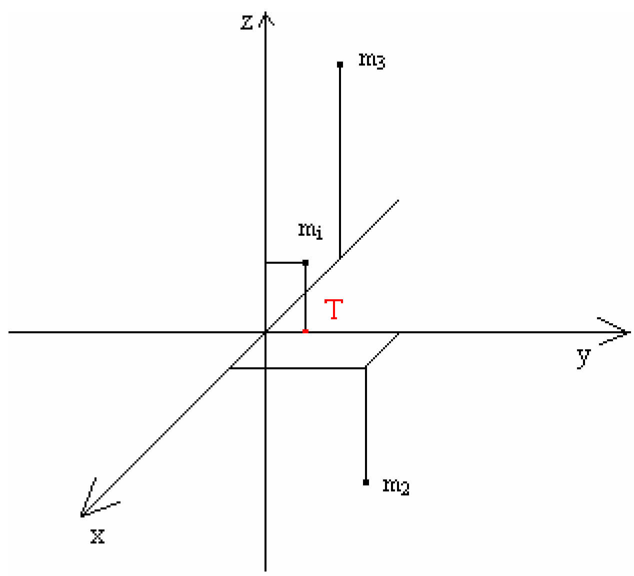
$$|v| = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1}{\Delta t} = \frac{2,025}{10} = 0,2025 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

$$v = v_0 - v' = 0,157 - 0,36 = -0,2025 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

<u>Příklad 2.4.4.</u>

Vyhledejte souřadnice hmotného středu soustavy hmotných bodů o hmotnostech m_1 = 5 kg, m_2 = 20 kg a m_3 = 10 kg, jež jsou umístěny v bodech A_1[0,1,2], A_2[1,2,-3] a A_3[-2,0,5].

<u>Řešení:</u>



Celková hmotnost soustavy hmotných bodů je rovna

$$m = \sum_{i=1}^{3} m_i = 35 \ \text{kg} \quad .$$

Souřadnice hmotného středu soustavy stanovíme ze vztahů

$$x_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{3} m_i x_i \quad ,$$

$$y_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{3} m_i y_i \quad ,$$

$$z_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{3} m_i z_i \quad .$$

Dle zadání jsou číselné hodnoty rovny:

$m_1 = 5\,\text{kg}$	$x_1 = 0 \ \text{m}$	$y_1 = 1 \ \text{m}$	$z_1 = 2 \ \text{m}$
$m_2 = 20\,\text{kg}$	$x_2 = 1 \ \text{m}$	$y_2 = 2 \ \text{m}$	$z_2 = -3 \ \text{m}$
$m_3 = 10\,\text{kg}$	$x_3 = -2 \ \text{m}$	$y_3 = 0 \ \text{m}$	$z_3 = 5 \ \text{m}$

Po dosazení získáme:

$$x_T = \frac{1}{35}\left(5 \cdot 0 + 20 \cdot 1 + 10 \cdot 0\right) = 0 \ \text{m} \quad ,$$

$$y_T = \frac{1}{35}\left(5 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 0\right) = 1{,}29 \ \text{m} \quad ,$$

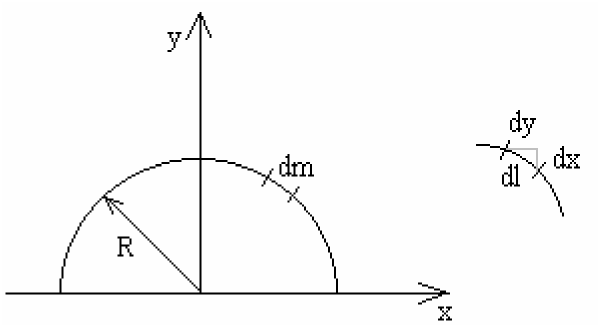
$$z_T = \frac{1}{35}\left(5 \cdot 2 + 20 \cdot (-3) + 10 \cdot 5\right) = 0 \ \text{m} \quad .$$

2.5. *Mechanika tuhého tělesa*

Příklad 2.5.1.

Určete souřadnice hmotného středu tenkého drátu ohnutého do tvaru půlkruhu o poloměru R.

Řešení:



Souřadnici hmotného středu y_s nalezneme s použitím definičního vztahu

$$y_s = \frac{1}{m}\int_{(m)} y\mathrm{d}m \quad . \tag{1}$$

Jestliže hmotnost drátu je m a délka drátu je $l = \pi R$, pak hmotnost elementu drátu délky dl je rovna

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R}\mathrm{d}l \quad . \tag{2}$$

Délku elementu dl můžeme vyjádřit v kartézských souřadnicích (viz obrázek):

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}^2 x + \mathrm{d}^2 y} \quad .$$

Mezi proměnnými x a y existuje vazba (jsou navzájem závislé)

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad ,$$

takže proměnnou x můžeme vyloučit s pomocí vztahu

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad .$$

Derivací tohoto vztahu získáme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x\right) = -\frac{x}{y}$$

a po úpravě obdržíme

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}=\frac{R^2-y^2}{y^2}=\frac{R^2}{y^2}-1 \quad . \tag{3}$$

Výraz (2) upravíme a dosadíme do něho ze vztahu (3):

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{\pi R}\sqrt{\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}^2y}=\frac{m}{\pi R}\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\frac{m}{\pi R}\mathrm{d}x\sqrt{1+\frac{R^2}{y^2}-1}=\frac{m}{\pi R}\frac{R}{y}\mathrm{d}x=\frac{m}{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{y} \quad .$$

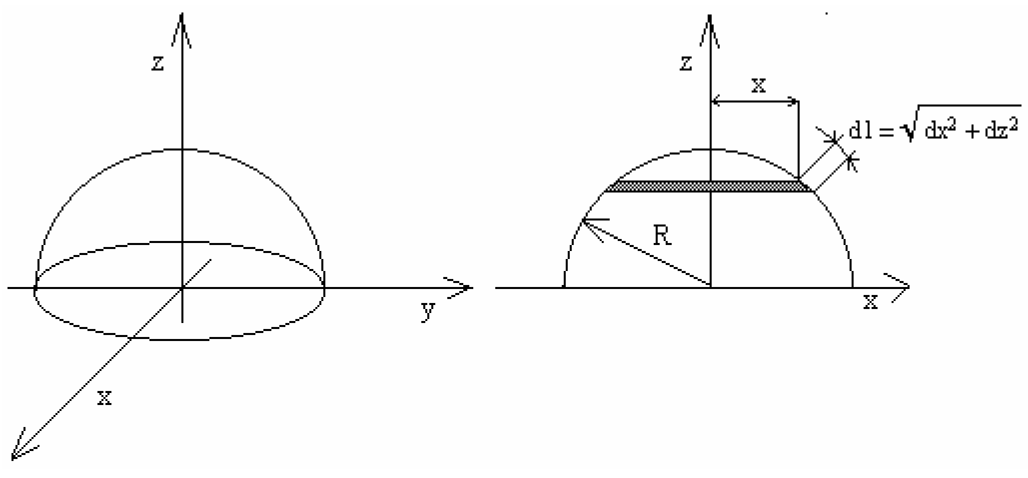
Tento vztah dosadíme do rovnice (1). Získáme hledanou souřadnici hmotného středu

$$y_s=\frac{1}{m}\int_{(m)}y\,\mathrm{d}m=\frac{1}{m}\int_{-R}^{R}y\frac{m}{\pi R}\frac{R}{y}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x=\frac{2R}{\pi} \quad .$$

Příklad 2.5.2.
Určete souřadnice hmotného středu plochy polokoule o poloměru R.

Řešení:
Element plochy zvolme ve tvaru zkoseného mezikruží o poloměru x a šířce dl. Je-li hustota materiálu, z kterého je polokoule vyrobena, rovna ρ, pak hmotnost zvoleného elementu plochy je rovna (viz obrázek)

$$\mathrm{d}m=\rho 2\pi\, x dl=\rho 2\pi\, x\sqrt{\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}^2z}=\rho 2\pi\, x dx\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2} \quad . \tag{1}$$



Mezi proměnnými x a z existuje vazba (jsou navzájem závislé):

$$x^2 + z^2 = R^2 \quad . \tag{2}$$

Tuto rovnici derivujeme. Po úpravě získáme

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{z} \quad .$$

Za x dosadíme z rovnice (2). Obdržíme

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{x^2}{z^2} = \frac{R^2 - z^2}{z^2} = \frac{R^2}{z^2} - 1 \quad .$$

Tento výraz dosadíme do rovnice (1)

$$\mathrm{d}m = \rho 2\pi x \,\mathrm{d}x \sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2} - 1} = \rho 2\pi x \frac{R}{z} \mathrm{d}x \quad .$$

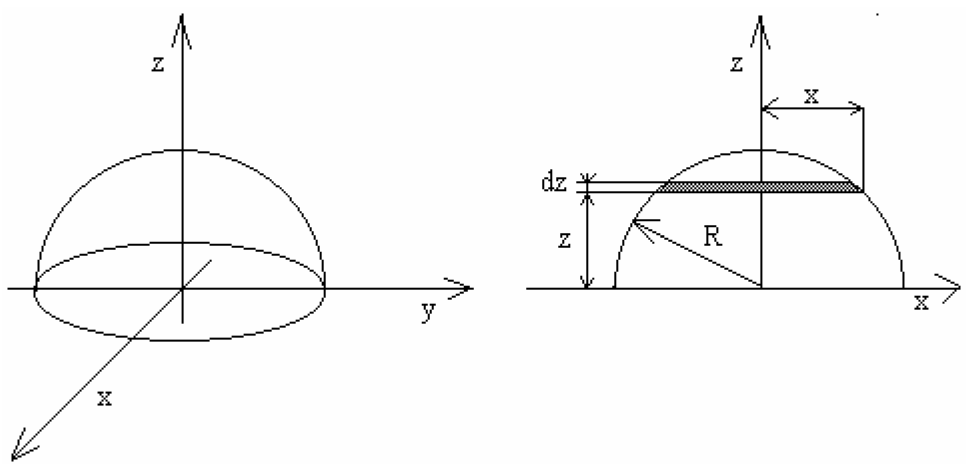
Hledanou souřadnici hmotného středu z_s nalezneme po dosazení získaného vztahu pro dm do definičního vztahu

$$z_s = \frac{1}{m} \int_{(m)} z \mathrm{d}m = \frac{1}{\rho 2\pi R^2} \int_0^R z\rho \, 2\pi x \frac{R}{z} \mathrm{d}x = \frac{1}{R} \int_0^R x \mathrm{d}x = \frac{1}{R} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^R = \frac{1}{R} \frac{R^2}{2} = \frac{R}{2} \quad .$$

Příklad 2.5.3.

Určete souřadnice hmotného středu homogenní polokoule o poloměru R.

Řešení:



Celková hmotnost polokoule je rovna

$$m = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho \quad .$$

Hmotnost elementu dV stanovíme pomocí vztahu

$$\mathrm{d}m = \rho dV \quad ,$$

kde element dV volíme ve tvaru válečku o poloměru základny x a výšce dz (viz obrázek). Pak

$$\mathrm{d}V = \pi x^2 \mathrm{d}z \quad .$$

Mezi proměnnými x a z existuje vazba (jsou navzájem závislé)

$$R^2 = z^2 + x^2 \quad .$$

Proto

$$\mathrm{d}V = \pi x^2 \mathrm{d}z = \pi\left(R^2 - z^2\right)\mathrm{d}z \quad .$$

Souřadnici hmotného středu z_s nalezneme dosazením do definičního vztahu

$$z_s = \frac{1}{m}\int_{(m)} z\mathrm{d}m = \frac{3}{2\pi R^3 \rho}\int_0^R z\rho\pi\left(R^2 - z^2\right)\mathrm{d}z = \frac{3}{2R^3}\left(R^2\int_0^R z\mathrm{d}z - \int_0^R z^3\mathrm{d}z\right) =$$

$$= \frac{3}{2R^3}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{3}{2}R\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}R \quad .$$

Příklad 2.5.4.

Stanovte moment setrvačnosti J homogenní koule k ose rotace procházející jejím středem. Poloměr koule je R = 5 cm, hmotnost koule m = 4 kg.

Řešení:

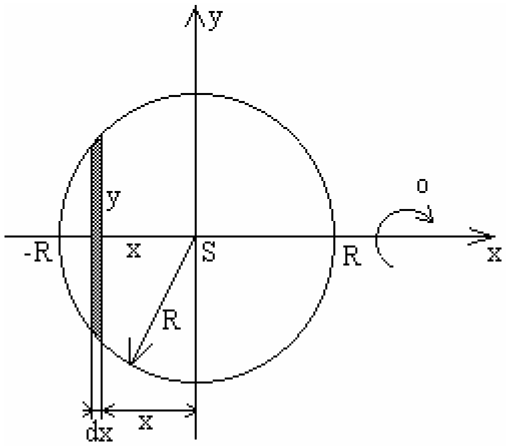
Dle zadání máme hodnoty

$m = 4$ kg

$R = 5$ cm

Řešení této úlohy nalezneme dvěma způsoby.

1. způsob:



Uvažujme elementární válec o poloměru y ($y^2 = R^2 - x^2$) a výšce dx, který má moment setrvačnosti (moment setrvačnosti válce je odvozován na přednáškách):

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\mathrm{d}my^2 = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{d}Vy^2 = \frac{1}{2}\rho\pi\,y^2\mathrm{d}x\,y^4 = \frac{1}{2}\rho\pi\,y^4\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho\pi\left(R^2 - x^2\right)^2\mathrm{d}x \quad .$$

Moment setrvačnosti koule pak získáme integrací:

$$J = \int_M \mathrm{d}J = \frac{1}{2}\rho\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho\pi\,2\int_0^R\left(R^4 - 2R^2x^2 + x^4\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \rho\pi\left(R^4\int_0^R\mathrm{d}x - 2R^2\int_0^R x^2\mathrm{d}x + \int_0^R x^4\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \rho\pi\left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5\right) = \rho\pi R^5\,\frac{8}{15} = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi R^3\rho R^2 \quad .$$

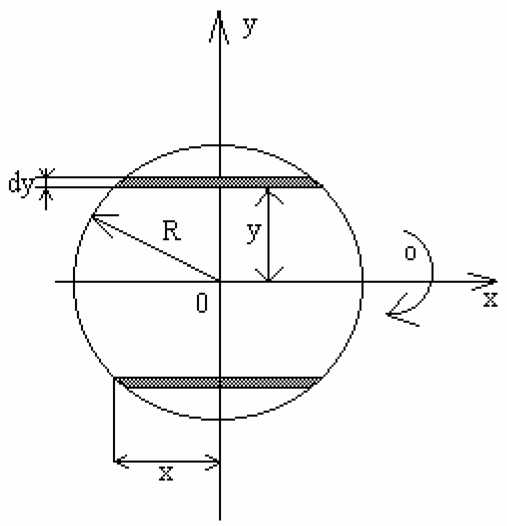
Vzhledem k tomu, že hmotnost koule je rovna $(4/3)\pi R^3\rho$, pak poslední výraz lze zapsat ve tvaru

$$J = \frac{2}{5} m R^2 \quad .$$

Po dosazení číselných hodnot obdržíme

$$J = \frac{2}{5} m R^2 = \frac{2}{5} \cdot 4 \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 = 4 \cdot 10^{-3} \quad \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \quad .$$

2. způsob:



Element dm volíme ve tvaru dutého válce (viz obrázek). Hmotnost tohoto elementu je rovna:

$$\mathrm{d}m = 2\pi\, y 2x \mathrm{d}y \rho \quad . \tag{1}$$

Moment setrvačnosti určíme z definičního vztahu

$$J = \int_{(m)} y^2 \mathrm{d}m \quad . \tag{2}$$

Mezi proměnnými x a y existuje vazba

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad .$$

Do rovnice (2) dosadíme vztah (1) a rovnici upravíme s pomocí vazební podmínky

$$J = \int_0^R y^2 2\pi y 2x \mathrm{d}y \rho = 4\pi\rho \int_0^R y^3 x \mathrm{d}y = 4\pi\rho \int_0^R y^3 \sqrt{R^2 - y^2}\, \mathrm{d}y \quad .$$

Pro řešení integrálu použijeme vzorník (např. Dwight H. G.: *Tables of Integrals and other Mathematical Data*, MacMillan Company, New York 1961, vzorec 353.01)

$$\int y^3 \sqrt{R^2 - y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\left(R^2 - y^2\right)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{R^2}{3}\left(R^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad .$$

Pak po dosazení mezí integrace a úpravě získáme

$$J = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho$$

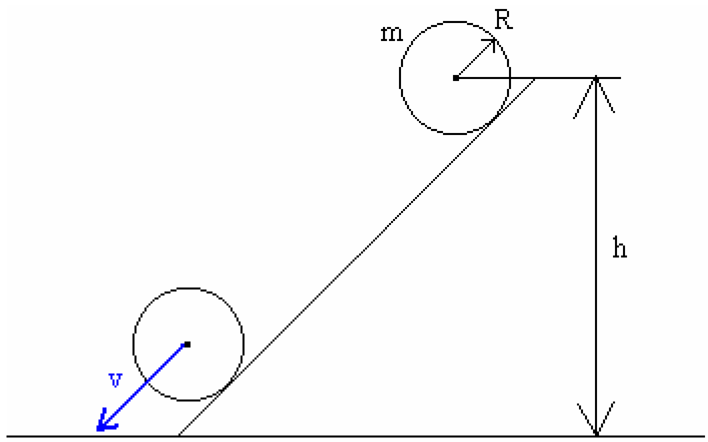
a po další úpravě konečně obdržíme ($(4/3)\pi R^3\rho = \mathrm{m}$)

$$J = \frac{2}{5} m R^2 \quad .$$

Obdrželi jsme stejný výsledek, jako při použití postupu 1, čímž jsme si ověřili, že jsme se při řešení úlohy nedopustili chyb.

<u>Příklad 2.5.5.</u>
Plná homogenní koule poloměru R a hmotnosti m se kutálí po nakloněné rovině bez smýkání. Na počátku pohybu byla koule v klidu ve výšce h = 1 m nad vodorovnou rovinou. Jakou rychlost v bude mít těžiště koule na konci nakloněné roviny ? Jakou rychlost by těžiště koule mělo v případě, že by nerotovala, ale smýkala se bez tření ?

<u>Řešení:</u>



Dle zadání máme:

$h = 1$ m
$v = ?$
$v` = ?$

Zde jsme apostrofem označili rychlost těžiště koule, která se pouze smýká.

a) Pohyb bez smykání:
Potenciální energie koule na začátku pohybu je rovna

$$E_p = mgh \quad .$$

Kutálející se koule má kinetickou energii translační a rotační

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \quad ,$$

kde moment setrvačnosti koule je roven (viz příklad 2.5.4)

$$J = \frac{2}{5}mR^2 \quad .$$

Úhlová rychlost kutálející se koule je rovna

$$\omega = \frac{v}{R} \quad .$$

Použijeme zákon zachování mechanické energie

$$E_p = E_k \quad .$$

Po dosazení získáme

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\frac{v^2}{R^2} \quad ,$$

odkud po úpravě můžeme vyjádřit rychlost těžiště koule

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = \sqrt{\frac{10}{7}\cdot 10\cdot 1} = 3{,}8 \quad \mathrm{m\cdot s^{-1}} \quad .$$

b) Pohyb se smykáním (bez valení)
Na počátku pohybu měla koule potenciální energii

$$E_p = mgh \quad .$$

Smýkající se koule má kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2} m v`^2 \quad .$$

Opět dosadíme do zákona zachování mechanické energie. Získáme

$$mgh = \frac{1}{2} m v`^2 \quad ,$$

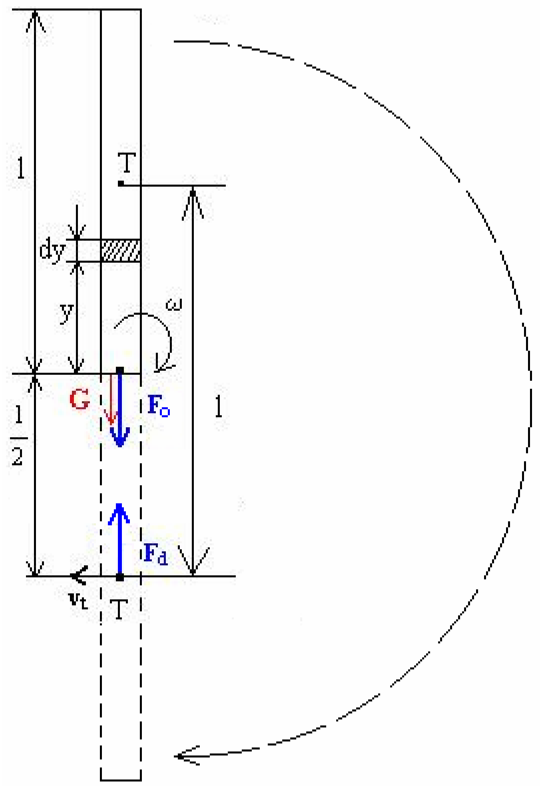
odkud po úpravě a dosazení číselných hodnot obdržíme

$$v` = \sqrt{2gh} = \sqrt{20} = 4{,}5 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad .$$

<u>Příklad 2.5.6.</u>

Tenká homogenní tyč hmotnosti m = 2 kg a délky l = 1 m je uložena na vodorovné ose, procházející jejím koncovým bodem. Jakou silou F je namáhána osa tyče v okamžiku průchodu tyče nejnižší polohou, když tyč pustíme (necháme otáčet) z nejvyšší polohy ?

<u>Řešení:</u>



V okamžiku průchodu tyče nejnižší polohou je velikost síly, která namáhá osu tyče rovna

$$F = G + F_o \quad ,$$

kde $G = mg$ a F_o je odstředivá sila, která je reakcí na dostředivou sílu F_d. Dostředivá síla má působiště v těžišti a její velikost závisí na obvodové rychlosti těžiště v_T. Obvodová rychlost těžiště se během pohybu mění. Platí

$$F_o = F_d = m\frac{v_T^2}{\frac{l}{2}} = m\frac{l}{2}\omega^2 .$$

Velikost úhlové rychlosti ω v nejnižší poloze tyče stanovíme ze zákona zachování mechanické energie

$$E_p = E_k \quad ,$$

$$mgl = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad ,$$

$$\omega^2 = \frac{2mgl}{J} \quad .$$

Moment setrvačnosti tyče J k ose rotace stanovíme následovně. Je–li hmotnost tyče $m = \rho\, S\, l$, pak hmotnost elementu tyče délky dl ve vzdálenosti y od osy rotace je rovna

$$\mathrm{d}m = \rho\, S dy$$

a tudíž

$$J = \int_0^l y^2 \mathrm{d}m = \rho\, S \int_0^l y^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{3}\rho\, S l^3 = \frac{1}{3} m l^2 \quad .$$

Po dosazení do výrazu pro ω^2 získáme

$$\omega^2 = \frac{2mgl}{J} = \frac{2mgl}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{6g}{l}$$

a odstředivá síla je v nejnižší poloze rovna

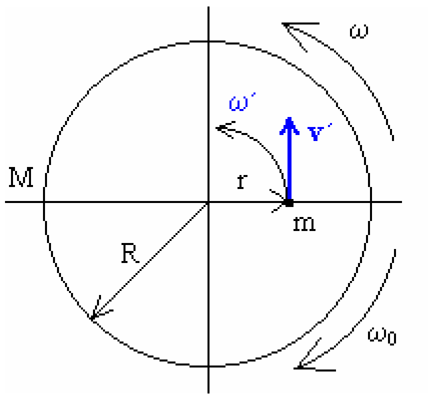
$$F_o = m\frac{1}{2}\frac{6g}{l} = 3mg \quad .$$

Osa rotace tyče je pak namáhána silou

$$F = G + F_o = mg + 3mg = 4mg = 4 \cdot 2 \cdot 10 = 80 \text{ N} \quad .$$

Příklad 2.5.7.
Na vodorovně umístěném homogenním kotouči hmotnosti $M = 15$ kg a poloměru $R = 1,5$ m, který je v klidu, stojí člověk hmotnosti $m = 80$ kg. Kotouč se může otáčet kolem svislé osy procházející jeho středem. Jakou úhlovou rychlostí ω_o se bude otáčet kotouč vůči Zemi, rozběhne-li se člověk po kružnici o poloměru $r = 1$ m, opsané kolem středu kotouče, relativní rychlostí $v' = 1,5$ m.s^{-1} vzhledem ke kotouči ?

Řešení:



Označme:
ω´ **-** úhlová rychlost člověka vůči kotouči
ω **-** úhlová rychlost člověka vůči nehybné vztažné soustavě (Zemi)
ω_0 - úhlová rychlost kotouče vůči nehybné vztažné soustavě (Zemi)

Pro řešení této úlohy použijeme zákon zachování momentu hybnosti izolované soustavy

$$\mathbf{b} = \mathbf{konst.}$$

Označme moment hybnosti člověka $\mathbf{b_m}$ a moment hybnosti kotouče $\mathbf{b_M}$. Protože na počátku byla celková hybnost soustavy **b** rovna **0** (člověk i kotouč byli v klidu), musí platit

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_m + \mathbf{b}_M = \mathbf{0} \quad .$$

Po úpravě

$$\mathbf{b}_m = -\mathbf{b}_M \quad . \qquad (1)$$

Dosaďme za jednotlivé momenty hybnosti

$$\mathbf{b}_m = J_m \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{b}_M = J_{\mathbf{M}} \boldsymbol{\omega}_0 \quad .$$

Galileiho princip skládání rychlostí platí i zde

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}` \quad .$$

Po úpravě získáme pro moment hybnosti člověka

$$\mathbf{b}_m = J_m(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}`) \quad .$$

Dosaďme do rovnice (1). Získáme

$$J_m(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}`) = -J_M\boldsymbol{\omega}_0 \quad .$$

Řešením této rovnice získáme

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\boldsymbol{\omega}`\frac{J_m}{J_m + J_0} \quad .$$

Úhlová rychlost ω_0 má opačný směr než ω'. Dále platí

$$\omega` = \frac{v`}{r}$$

$$J_{\mathbf{M}} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad \text{(moment setrvačnosti kotouče)}$$

$$J_m = mr^2 \qquad \text{(moment setrvačnosti člověka)}$$

Po dosazení:

$$\omega_0 = -\frac{v`}{r}\frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2}MR^2} = -\frac{1{,}5}{1}\frac{80\cdot 1^2}{80\cdot 1^2 + \frac{1}{2}15\cdot 1{,}5^2} = -1{,}24 \quad \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{(kotouč vůči Zemi)}$$

$$\omega` = \frac{v`}{r} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5 \quad \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{(člověk vůči kotouči)}$$

$$\omega = \omega_0 + \omega` = -1{,}24 + 1{,}5 = 0{,}26 \quad \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{(člověk vůči Zemi)}$$

Kotouč se bude otáčet úhlovou rychlostí ω = 1,24 rad s^{-1} opačným směrem, než půjde člověk.

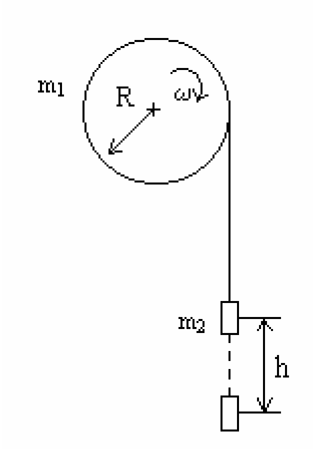
Příklad 2.5.8.

Kotouč poloměru R = 0.1 m a hmotnosti m_1 = 1 kg se může otáčet kolem horizontální osy. Na kotouči je navinuto vlákno, na jehož konci je závaží o hmotnosti m = 0,5 kg. Jakou má kotouč úhlovou rychlost ω, urazí-li závaží svislou dráhu h = 1 m a pohyb začínal z klidu ? Úlohu řešte: a) pomocí zákona zachování mechanické energie, b) z pohybové rovnice.

Řešení:
Dle zadání máme:

R = 0,1 m
$m_1 = 1$ kg
$m_2 = 0{,}5$ kg
$h = 1$ m
$\omega = ?$

a) Řešení pomocí zákona zachování mechanické energie



Zákon zachování mechanické energie pro tento případ můžeme psát ve tvaru:

$$E_p = E_k = E_{kt} + E_{kr} \quad ,$$

kde:

$$E_p = m_2 gh, \quad E_k = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 \quad ,$$

a dále

$$J = \frac{1}{2} m_1 R^2 \quad ,$$

$$v = \omega R \quad .$$

Po dosazení:

$$m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} m_1 R^2 \frac{v^2}{R^2} \quad ,$$

$$4m_2 gh = 2m_2 v^2 + m_1 v^2 = v^2 (2m_2 + m_1) \quad .$$

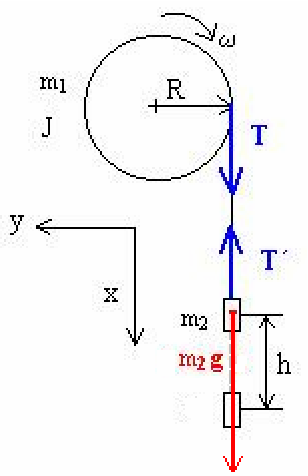
Řešením předcházející rovnice získáme

$$v = 2\sqrt{\frac{m_2 gh}{m_1 + 2m_2}} \quad ,$$

a tudíž úhlová rychlost kotouče bude rovna

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{m_2 gh}{m_1 + 2\cdot m_2}} = \frac{2}{0{,}1}\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 10\cdot 1}{1+2\cdot 0{,}5}} = 31{,}6\ \mathrm{s}^{-1} \quad .$$

b) Řešení pomocí pohybové rovnice



Máme dvě tělesa, pro která napíšeme dvě samostatné pohybové rovnice:

Vyjdeme z pohybová rovnice kotouče:

$$M = J\boldsymbol{\varepsilon} \quad . \tag{1}$$

Za úhlové zrychlení dosadíme výraz

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{a_\tau}{R} \quad ,$$

za moment působící tahové síly vztah

$$M = TR \quad ,$$

a za moment setrvačnosti kotouče

$$J = \frac{1}{2} m_1 R^2 \quad .$$

Po dosazení do pohybové rovnice za M, J a ε získáme

$$TR = \frac{1}{2} m_1 R^2 \frac{a_\tau}{R} \quad .$$

Po úpravě obdržíme

$$T = \frac{1}{2} m_1 a_\tau \quad .$$

Pohybová rovnice závaží má tvar (viz obrázek):

$$m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T}' = m_2 \mathbf{a}_\tau \quad . \tag{2}$$

Protože

$$\mathbf{T}' = -\mathbf{T} \quad .$$

Pak po dosazení za tahovou sílu získáme

$$m_2 \mathbf{g} - \mathbf{T} = m_2 \mathbf{a}_\tau \quad .$$

Vektory vyjádříme ve složkách

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}T, \qquad \mathbf{g} = \mathbf{i}g, \qquad \mathbf{a}_\tau = \mathbf{i}a_\tau \quad ,$$

takže předcházející rovnice má ve složkovém vyjádření tvar

$$m_2 g - T = m_2 a_\tau \quad .$$

Po úpravě nalezneme tahovou sílu

$$T = m_2 g - m_2 a_\tau \quad .$$

Porovnáním rovnic (1) a (2) získáme

$$\frac{1}{2} m_1 a_\tau = m_2 g - m_2 a_\tau \quad ,$$

odkud po úpravě obdržíme

$$a_\tau (m_1 + 2m_2) = 2m_2 g \quad .$$

Tečné zrychlení je pak rovno

$$a_\tau = g \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} \quad .$$

Z kinematiky víme, že dráha při rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu je rovna:

$$h = \frac{1}{2} a_\tau t^2 \quad .$$

Po úpravě získáme

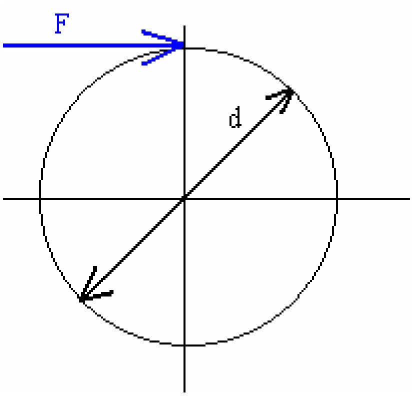
$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_\tau}} \quad .$$

Pak úhlová rychlost kotouče

$$\omega = \varepsilon t = \frac{a_\tau}{R}\sqrt{\frac{2h}{a_\tau}} = \frac{1}{R}\sqrt{2ha_\tau} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4m_2 gh}{m_1 + 2m_2}} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{m_2 gh}{m_1 + 2m_2}} = 31{,}6 \ \mathrm{s}^{-1} \quad .$$

<u>Příklad 2.5.9.</u>
Kruhový kotouč hmotnosti m = 5 kg a průměru d = 30 cm máme za čas t = 0,5 s otočit o 1 otáčku. Jakou silou F musíme tangenciálně působit na obvodu kotouče ? Jakou práci A tato síla vykoná ? Jaký výkon P odevzdá tato síla v čase t ? Kotouč byl na počátku v klidu.

<u>Řešení:</u>



Dle zadání máme:

$m = 5\ kg$	$F = ?$
$d = 0{,}3\ m$	$A = ?$
$t = 0{,}5\ s$	$P = ?$
$\varphi = 2\pi$	

Vyjdeme z pohybové rovnice kotouče

$$M = J\varepsilon \quad ,$$

kde moment síly působící na kotouč je roven

$$M = F\frac{d}{2} \quad .$$

Pro moment setrvačnosti kotouče můžeme psát (odvození bylo provedeno na přenáškách)

$$J = \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad .$$

Z kinematiky víme, že úhlová dráha při rovnoměrně zrychleném pohybu je rovna

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \quad .$$

Po úpravě získáme

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} \quad .$$

Uvedené vztahy dosadíme do pohybové rovnice. Obdržíme

$$F\frac{d}{2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{2\varphi}{t^2} \quad .$$

Po úpravě získáme výraz pro sílu

$$F = \frac{1}{2}\frac{md\varphi}{t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\cdot 0{,}3\cdot 2\pi}{0{,}5^2} = 6\pi = 18{,}8 \quad \mathrm{N} \quad .$$

Síla vykoná mechanickou práci

$$A = M\varphi = F\frac{d}{2}\varphi = 18{,}8\cdot\frac{0{,}3}{2}\cdot 2\pi = 17{,}8 \quad \mathrm{J}$$

a odevzdá v čase t mechanický výkon

$$P = M\omega = F\frac{d}{2}\varepsilon t = F\frac{d}{2}\frac{2\varphi}{t^2}t = F\frac{d}{2}\frac{2\varphi}{t} = \frac{18{,}8\cdot 0{,}3\cdot 2\pi}{0{,}5} = 71{,}1 \quad \mathrm{W} \quad .$$

2.6. *Pevná tělesa*

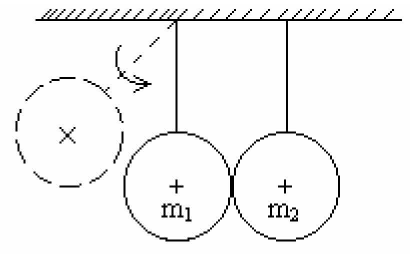
<u>Příklad 2.6.1.</u>

Dvě pružné koule o hmotnostech m_1 a m_2 jsou zavěšeny dle obrázku. První kouli vychýlíme a ta po uvolnění narazí rychlostí v_1 do druhé. Po dokonale pružném rázu se první koule bude pohybovat rychlostí c_1 a druhá rychlostí c_2. Stanovte poměr rychlostí c_1 ku v_1 a c_2 ku v_1 za předpokladu, že:

a) $m_1 = m_2$

b) $m_1 = 2m_2$

c) $m_2 = 2m_1$.



<u>Řešení:</u>

Pro dokonale pružný ráz platí jednak zákon zachování hybnosti

$$m_1 v_1 = m_1 c_1 + m_2 c_2 \tag{1}$$

a jednak zákon zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 = \frac{1}{2} m_1 {c_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {c_2}^2 \quad . \tag{2}$$

Z rovnice (1) získáme rychlost

$$c_1 = \frac{m_1 v_1 - m_2 c_2}{m_1} \quad ,$$

kterou dosadíme do rovnice (2):

$$m_1 v_1^2 = m_1 \frac{(m_1 v_1 - m_2 c_2)^2}{m_1^2} + m_2 c_2^2 \quad .$$

Postupnými úpravami získáme rychlost c_2

$$m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1^2 - 2 m_1 m_2 v_1 c_2 + m_2^2 c_2^2 + m_2 c_2^2 m_1 \quad ,$$

$$2 m_1 m_2 v_1 c_2 = m_2^2 c_2^2 + m_2 c_2^2 m_1 \quad ,$$

$$2 m_1 v_1 = m_2 c_2 + c_2 m_1 = c_2 (m_1 + m_2) \quad ,$$

$$c_2 = v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad . \tag{3}$$

Dosazením za c_2 do (1) obdržíme

$$m_1 v_1 = m_1 c_1 + m_2 v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \quad ,$$

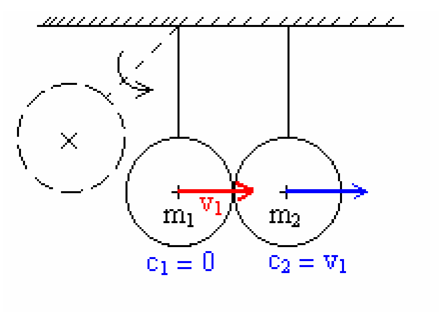
odkud získáme rychlost c_1

$$c_1 = v_1 \left(1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) = v_2 \frac{m_1 + m_2 - 2m_2}{m_1 + m_2} \quad ,$$

$$c_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad . \tag{4}$$

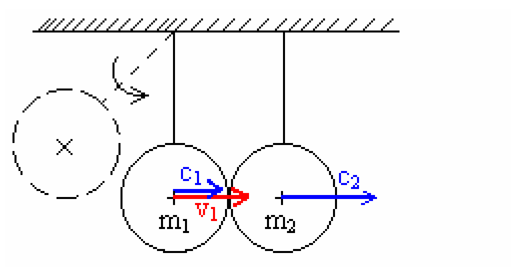
Uvažujme nyní jednotlivé případy a dosaďme za m_1 a m_2 dle zadání. Získáme:

a) V případě, že $m_1 = m_2$, pak z rovnic (3) a (4) vyplývá, že $c_2 = v_1$ a $c_1 = 0$.



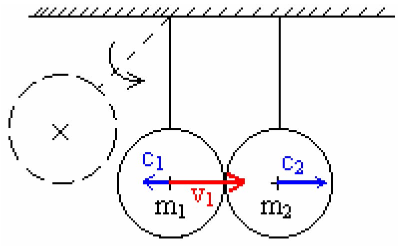
První koule se po rázu zastaví,druhá se bude pohybovat rychlostí v_1.

b) V případě, že $m_1 = 2m_2$, pak z rovnic (3) a (4) vyplývá, že $c_2 = (4/3)v_1$ a $c_1 = v_1/3$.



První koule, která je nyní těžší, se po rázu bude pohybovat v původním směru, avšak s nižší rychlostí, druhá koule naopak s rychlostí $c_2 > v_2$.

c) V případě, že $m_2 = 2m_1$, pak z rovnic (3) a (4) vyplývá, že $c_2 = (2/3)v_1$ a $c_1 = -v_1/3$.

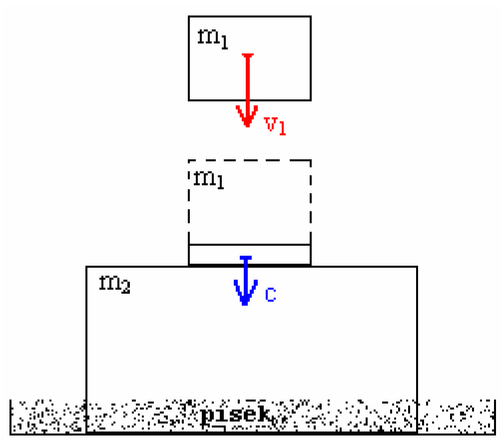


První koule, která je nyní lehčí, se po rázu odrazí zpět, druhá, těžší koule, se bude pohybovat rychlostí $c_2 < v_1$.

Příklad 2.6.2.

Beran bucharu o hmotnosti m_1 = 150 kg dopadá z výšky h = 60 cm na kovaný kus spočívající na kovadlině o hmotnosti m_2 = 2000 kg. Stanovte deformační práci a účinnost rázu (účinnost je dána poměrem práce vykonané zdvižením beranu ku práci užité ke zploštění kovaného kusu). Kovadlina je pružně uložena se značným tlumením (např. do vany s pískem). Na počátku rázu proto můžeme předpokládat, že buchar a kovadlina s kovaným kusem se pohybují společně rychlostí c.

Řešení:



Dle zadání máme:

$$m_1 = 150 \ \ \text{kg}$$
$$m_2 = 2000 \ \ \text{kg}$$
$$\eta = ?$$

Beran se při dopadu pohybuje rychlostí $v_1 = \sqrt{2gh}$ (volný pád z výšky h). Po dopadnutí na kovaný kus ležící na kovadlině se beran s kovaným tělesem a s kovadlinou pohybují společně, a to rychlostí c.

Protože dochází k deformaci kovaného tělesa, jedná se o nepružný ráz, pro který platí zákon zachování hybnosti

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)c \quad .$$

Po úpravě získáme

$$c = v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad .$$

Kinetická energie bucharu je rovna

$$E_{kb} = \frac{1}{2} m_1 v_1^{\,2} \quad .$$

Ztráta kinetické energie bucharu při nepružném rázu je pak rovna:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)c^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_1^2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = E_{kb} \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \quad .$$

Tento úbytek kinetické energie se převážně přemění na deformační práci, tudíž

$$A_d = \Delta E_k \quad .$$

Účinnost rázu je pak rovna

$$\eta = \frac{A_d}{E_{kb}} = \frac{E_{kb} \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}}{E_{kb}} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \quad .$$

Číselně

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}6} \doteq 3{,}5 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad ,$$

$$c = v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 3{,}5 \frac{150}{150 + 2000} = 0{,}24 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad ,$$

$$E_{kb} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} 150 \cdot 3{,}5^2 = 918{,}75 \quad \mathrm{J} \quad ,$$

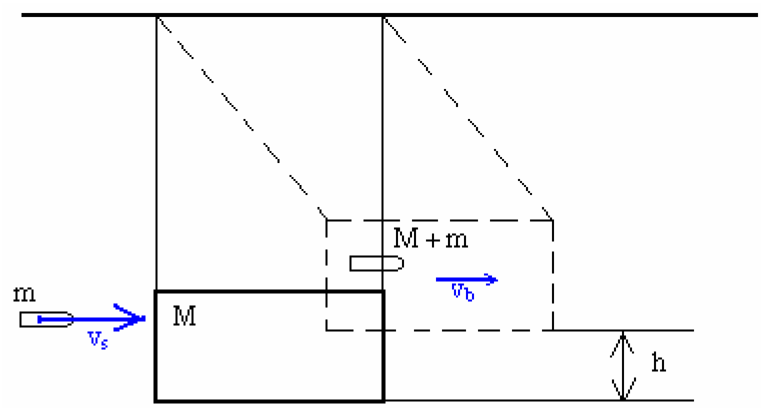
$$A_d = E_{kb} \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = 918{,}75 \cdot \frac{1}{1 + \frac{150}{2000}} = 854{,}65 \quad \mathrm{J} \quad ,$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{150}{2000}} = 0{,}93 = 93\% \quad .$$

Příklad 2.6.3.

Rychlost střely lze určit tak, že střelu vstřelíme do bedny s pískem (jedná se o nepružnou srážku), která je zavěšená na závěsech a sledujeme výchylku bedny. Jaká je rychlost střely o hmotnosti m = 10 g, vychýlí-li se bedna hmotnosti M = 10 kg do výše h = 3 cm ?

Řešení:



Dle zadání máme:

$M = 10$ kg
$m = 10$ g
$v_s = ?$
$h = 3$ cm

Pro nepružný ráz platí zákon zachování hybnosti, který v našem případě můžeme zapsat ve tvaru

$$mv_s = (M+m)v_b \quad . \tag{1}$$

Nárazem střely do bedny se bedna uvede do pohybu. Zákon zachování energie pro pohybující se bednu s pískem a střelou pak můžeme zapsat ve tvaru

$$\Delta E_k = \Delta E_p \quad .$$

Po dosazení získáme

$$\frac{1}{2}(M+m)v_b^2 = (M+m)gh \quad ,$$

odkud po úpravě obdržíme rychlost bedny s pískem a střelou

$$v_b = \sqrt{2gh} \quad .$$

Po dosazení do (1) a po úpravě získáme rychlost střely

$$v_s = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh} \cong \frac{M}{m}\sqrt{2gh} = \frac{10}{10^{-2}}\sqrt{2\cdot 10\cdot 3\cdot 10^{-2}} = 775 \quad \mathrm{m\cdot s^{-1}} \quad .$$

Kinetická energie střely je rovna

$$E_{ks} = \frac{1}{2}mv_s^2 = 2{,}94 \quad \mathrm{kJ} \quad .$$

Kinetická energie bedny s pískem

$$E_{kb} \cong \frac{1}{2}Mv_b^2 = \frac{1}{2}\left(v_s\frac{m}{M}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v_s^2 = E_{ks}\frac{m}{M} = E_{ks}\cdot 10^{-3} = 2{,}94 \quad \mathrm{J}$$

a potenciální energie vychýlené bedny s pískem

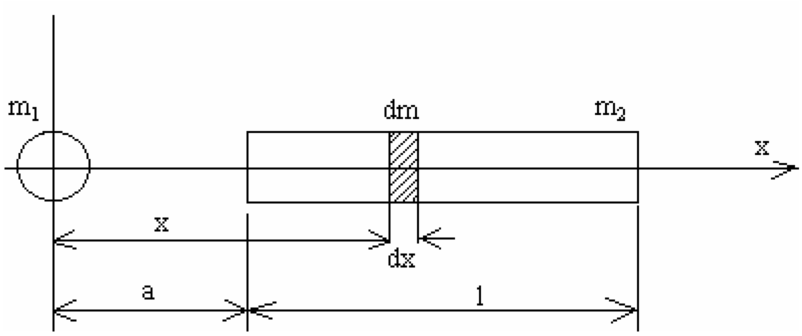
$$E_p \cong Mgh = 2{,}94 \quad \mathrm{J} \quad .$$

2.7. *Gravitační pole*

Příklad 2.7.1.

Kulička o hmotnosti m_1 = 10 g je vzdálena a = 0,1 m od přímé homogenní tyče o hmotnosti m_2 = 1 kg a délce l = 1 m. Střed kuličky leží na prodloužené podélné ose tyče. Spočtěte gravitační sílu, kterou se obě tělesa přitahují.

Řešení:



Dle zadání máme:

$m_1 = 10$ g

$m_2 = 1$ kg

$a = 0{,}1$ m

$l = 1$ m

$F_g = ?$

Kuličku o hmotnosti m_1 a element tyče o hmotnosti dm_2 můžeme považovat za hmotné body. Sílu mezi dvěma hmotnými body určíme z gravitačního zákona

$$\mathrm{d}F_g = \kappa \frac{m_1 \mathrm{d}m_2}{x^2} \quad .$$

Hmotnost elementu homogenní tyče je rovna

$$\mathrm{d}m_2 = \frac{m_2}{l}\mathrm{dx} \quad .$$

Po dosazení získáme pro element síly

$$\mathrm{d}F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{l} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad .$$

Celkovou gravitační sílu mezi kuličkou a tyčí získáme integrací

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{l} \int_a^{a+l} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \kappa \frac{m_1 m_2}{l} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{a+l} = \kappa \frac{m_1 m_2}{l} \frac{l}{(a+l)a} = \kappa \frac{m_1 m_2}{(a+l)a} \quad .$$

Po dosazení číselných hodnot obdržíme

$$F_g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{10^{-2} \cdot 1}{(0{,}1+1) \cdot 10^{-1}} = 6{,}06 \quad \mathrm{pN} \quad .$$

<u>Příklad 2.7.2.</u>
Spočtěte první a druhou kosmickou rychlost. První kosmická rychlost je obvodová rychlost, kterou musíme udělit tělesu o hmotnosti m ve výši $h \ll R_z$ nad zemským povrchem, aby obíhalo po kružnici kolem Země. Druhá kosmická rychlost je rychlost, kterou musíme udělit tělesu svisle vzhůru, aby se nevrátilo na Zem. Hmotnost Země je $M_z = 6.10^{24}$ kg, poloměr Země $R_z = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

<u>Řešení</u>:
<u>a) První kosmická rychlost</u> $(R_z + h \approx R_z)$

Aby těleso obíhalo po kružnici, musí na něj působit dostředivá síla F_d. V případě tělesa obíhajícího okolo Země je dostředivá síla vyvolána gravitační silou F_g. Podmínka dynamické rovnováhy pak je:

$$F_d = F_g \quad ,$$

$$m \frac{v_1^2}{R_z} = \kappa \frac{m M_z}{R_z^2} \quad .$$

Po úpravě získáme výraz pro první kosmickou rychlost a po dosazení i její číselnou velikost:

$$v_1 = \sqrt{\kappa \frac{M_z}{R_z}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \mathrm{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6 \mathrm{m}}} = 7{,}9 \quad \mathrm{km \cdot s^{-1}} \quad .$$

b) <u>Druhá kosmická rychlost</u>

Vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie. Tělesu na povrchu Země musíme udělit kinetickou energii E_{kz} tak velkou, aby mohlo doletět do nekonečna, kde bude mít kinetickou energii $E_{k\infty}$. Na povrchu Země má těleso potenciální energii E_{pz}, v nekonečnu $E_{p\infty}$. Pak:

$$E_{kz} + E_{pz} = E_{k\infty} + E_{p\infty} \quad . \qquad (1)$$

Na povrchu Země musíme udělit tělesu rychlost v_2, v nekonečnu můžeme položit $v_\infty = 0$. Pak:

$$E_{kz} = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad \text{a} \qquad \mathrm{E}_{\mathrm{k}\,\infty} = 0 \quad .$$

Stanovme potenciální energii tělesa o hmotnosti m v gravitačním poli Země. Potenciální energie v bodě $\boldsymbol{r}$ je podle definice rovna

$$E_p = A + E_{p0} \quad ,$$

kde A je práce vykonaná vnějšími silami na přemístění tělesa z referenčního bodu $\boldsymbol{r_0}$ do bodu $\boldsymbol{r}$ a E_{p0} je potenciální energie v referenčním místě. Položme $E_{p0} = 0$. Pak:

$$E_p = A = \int_{\mathbf{r}0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \quad .$$

Aby vnější síla **F** mohla těleso v gravitačním poli Země přemísťovat, musí být

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_g \quad .$$

Gravitační síla $\mathbf{F}_g$ je rovna

$$\mathbf{F}_g = -\kappa \frac{M_z m}{r^2} \mathbf{r}^0 \quad .$$

Po dosazení do výrazu pro potenciální energii:

$$E_p = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r} = \kappa M_z m \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{r}^0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{r^2} = \kappa M_z m \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \kappa M_z m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{r}$$

$$E_p = \kappa M_z m \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \quad . \qquad (2)$$

Referenční bod se obvykle volí buď v nekonečnu ($r_0 \to \infty$), nebo na povrchu Země ($r_0 = R_z$). Vyřešme E_p pro obě volby.

1) V případě, že $r_0 \to \infty$, pak ze vztahu (2) získáme

$$E_p = -\kappa \frac{M_z m}{r} \quad .$$

Potenciální energie na povrchu Země je tudíž rovna

$$E_{pz} = -\kappa \frac{M_z m}{R_z}$$

a v nekonečnu

$$E_{p\infty} = E_{p0} = 0 \quad .$$

Po dosazení do rovnice (1)

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \kappa \frac{M_z m}{R_z} = 0 \quad ,$$

odkud po úpravě

$$v_2 = \sqrt{2\kappa \frac{M_z}{R_z}} = \sqrt{2} v_1 = \sqrt{2} \cdot 7{,}9 \quad \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 11{,}2 \quad \mathrm{km \cdot s^{-1}} .$$

2) V případě, že zvolíme $r_0 = R_z$, pak ze vztahu (2) obdržíme

$$E_p = \kappa M_z m \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{r} \right)$$

a na povrchu Země

$$E_{pz} = E_{p0} = 0 \quad ,$$

případně v nekonečnu ($r \to \infty$)

$$E_{p\infty} = \kappa \frac{M_z m}{R_z} \quad .$$

Po dosazení do (1):

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + 0 = \kappa \frac{M_z m}{R_z} + 0 \quad ,$$

odkud po úpravě a dosazení číselných hodnot získáme velikost druhé kosmické rychlosti

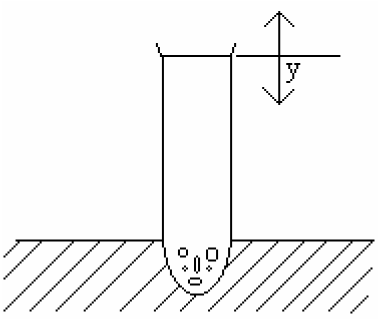
$$v_2 = \sqrt{2\kappa \frac{M_z}{R_z}} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 kg^{-2}} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6{,}37 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}}} = 11{,}2 \quad \mathrm{km \cdot s^{-1}} \quad .$$

3.2. *Volné netlumené kmity*

Příklad 3.2.1.

Zkumavka o průměru D = 1 cm zatížená broky o celkové hmotnosti m = 100 g plave ve svislé poloze v kapalině hustoty $\rho = 10^3$ kg.m^{-3}. Stanovte dobu kmitu zkumavky, když jí byl udělen malý svislý impuls. Pohyb kapaliny a tření zanedbejte.

Řešení:



Vratná síla F_v je zde vztlaková síla. Zvětší–li se ponoření zkumavky o y, bude vztlaková síla rovna

$$F_v = -\rho\, gSy = -\rho\, g \frac{\pi D^2}{4} y \quad .$$

Pohybová rovnice zkumavky má tvar:

$$F_v - ma = 0 \quad .$$

Dosaďme do pohybové rovnice za vratnou sílu a zrychlení vyjádřeme jako druhou derivaci výchylky podle času

$$-\rho g \frac{\pi D^2}{4} y - m \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad .$$

Po úpravě získáme

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\pi D^2 \rho\, g}{4m} y = 0 \quad .$$

Jak bylo odvozeno na přednáškách, součinitel u druhého členu má význam kvadrátu úhlového kmitočtu. Proto

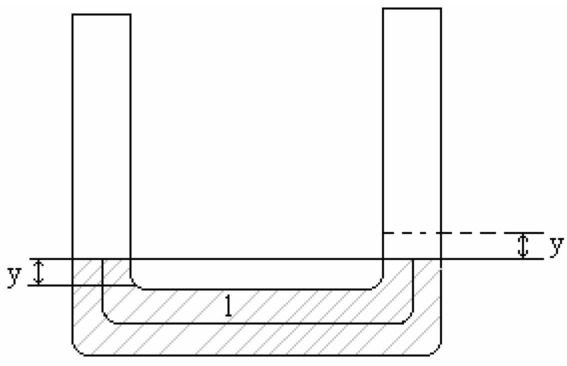
$$\omega = \sqrt{\frac{\pi D^2 \rho\, g}{4m}} = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{\pi \rho\, g}{m}} \quad .$$

Doba kmitu pak je rovna

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{2}{D}\sqrt{\frac{m}{\pi \rho g}} = \frac{4}{D}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}} = \frac{4}{10^{-2}}\sqrt{\frac{\pi \cdot 10^{-1}}{10^{3} \cdot 10}} = 2{,}24 \quad \text{s} \quad .$$

Příklad 3.2.2.
Rtuť se nalézá v trubici tvaru U. Vychýlí-li se rtuť z rovnovážné polohy, začne vykonávat kmitavý pohyb. Určete dobu kmitu rtuti, je-li délka sloupce rtuti v trubici l = 8 cm.

Řešení:



Je-li kapalina v trubici vychýlena, pak je v jednom rameni hladina snížena o výchylku y proti rovnovážné poloze, v druhém je o y zvýšena. Vratná síla F_v je dána vahou sloupce rtuti o výšce rozdílu hladin, tj. $2y$

$$F_v = -\rho S 2 y g \quad .$$

Pohybová rovnice rtuti v trubici má tvar ($m = \rho S l$)

$$F_v - ma = 0 \quad ,$$

takže po dosazení

$$-\rho S 2 y g - \rho S l \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad .$$

Po úpravě získáme

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2g}{l} y = 0 \quad .$$

Součinitel u druhého členu má význam kvadrátu úhlového kmitočtu. Perioda těchto kmitů je proto rovna:

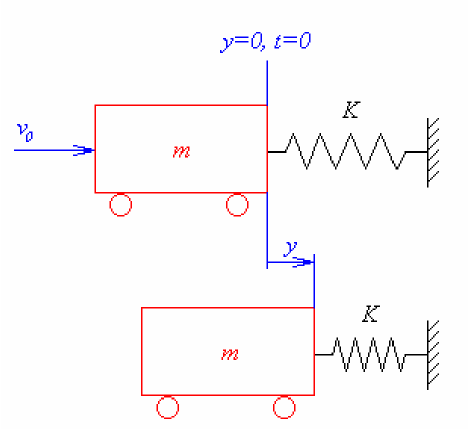
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{4l}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{2\cdot 8\cdot 10^{-2}}{10}} = 0{,}4 \quad \mathrm{s} \quad .$$

<u>Příklad 3.2.3.</u>

Vagón o hmotnosti $m = 2{\cdot}10^4$ kg rozjetý rychlostí $v_0 = 1{,}6$ m.s^{-1} se má zastavit nárazem na pevnou překážku. Jakou tuhost K musí mít jeho nárazníkové tlumiče a jakou dobu trvá náraz, je-li dovolené zkrácení tlumiče $d = 10$ cm? Příklad řešte jednak jako úlohu z kinematiky kmitání a jednak pomocí zákona zachování mechanické energie.

<u>Řešení:</u>

a) Kinematika kmitání



Kmitavá soustava je tvořena vagonem o hmotnosti m a pružinou nárazníkového tlumiče o tuhosti K. V čase $t = 0$ narazí tlumič do překážky a pružina se začne stlačovat. Můžeme proto psát:

$$y(0) = 0 \quad ,$$

$$v(0) = v_0 \quad .$$

Za čas Δt je pružina tlumiče stlačena do maximální polohy (amplitudy) a pohyb vagónu se zastaví. Proto:

$$y(\Delta t) = Y = d \quad ,$$

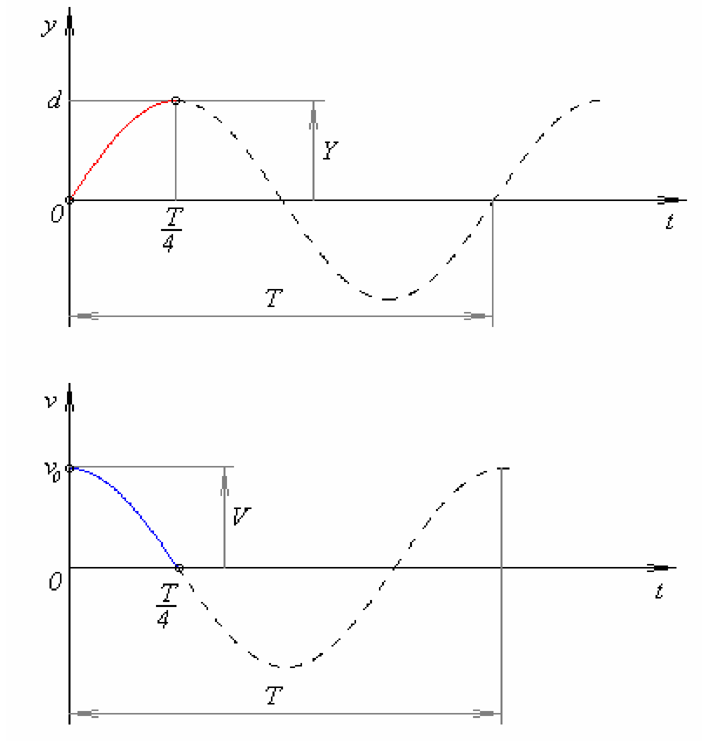
$$v(\Delta t) = 0 \, .$$

Těmto podmínkám vyhovují rovnice výchylky a rychlosti ve tvaru:

$$y = Y \sin(\omega t) \quad ,$$

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega Y \cos(\omega t) = V \cos(\omega t) \quad .$$

Průběhy výchylky a rychlosti harmonického kmitavého pohybu jsou uvedeny na obrázku



Z obrázku je zřejmé, že

$$\Delta t = \frac{T}{4},\ Y = d,\ V = v_0 \quad .$$

Kvadrát úhlového kmitočtu kmitavé soustavy je roven

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad . \tag{1}$$

Pro amplitudu rychlosti dále platí:

$$V = \omega Y \quad ,$$

odkud

$$\omega = \frac{V}{Y} \quad . \tag{2}$$

Dosaďme vztah (2) do vztahu (1). Úpravou získáme:

$$K = m\left(\frac{V}{Y}\right)^2 = m\left(\frac{v_0}{d}\right)^2 = 2\cdot 10^4\,\text{kg}\cdot\left(\frac{1{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{0{,}1\,\text{m}}\right)^2 = 5{,}12\cdot 10^6\ \ \text{N}\cdot\text{m}^{-1} \quad .$$

Doba trvání nárazu:

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi Y}{2V} = \frac{\pi d}{2v_0} = \frac{\pi\cdot 0{,}1\ \text{m}}{2\cdot 1{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}} = 0{,}098\quad \text{s.}$$

b) Zákon zachování mechanické energie
Vagón má před nárazem kinetickou energii E_k, která se přemění během stlačování pružiny v elastickou potenciální energii E_p. Proto:

$$E_k = E_p \quad .$$

Po dosazení za kinetickou a elastickou energii obdržíme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}KY^2 = \frac{1}{2}Kd^2 \quad .$$

Po úpravě získáme

$$K = m\left(\frac{v_0}{d}\right)^2 = 2\cdot 10^4\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{0{,}1\ \text{m}}\right)^2 = 5{,}12\cdot 10^6\quad \text{N}\cdot\text{m}^{-1} \quad .$$

Dále platí:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad .$$

Po úpravě získáme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

a proto hledaná doba trvání nárazu

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^4 \ \text{kg}}{5{,}12 \cdot 10^6 \ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}}} = 0{,}098 \quad \text{s} \quad .$$

Poznámka: Protože jsou u vagónu tlumiče dva, musí mít každý z nich tuhost $K' = 2{,}56 \cdot 10^6 \ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Příklad 3.2.4.

Stanovte sílu F, kterou působí píst spalovacího motoru na klikový hřídel v mrtvém bodě. Hmotnost pístu je m = 1,2 kg, hřídel má otáčky n = 200 min^{-1}, zdvih pístu je z = 0,12 m. Předpokládejte, že píst koná harmonický pohyb. Pro řešení úlohy použijte kinematiku kmitání.

Řešení:

V mrtvém bodě je zrychlení maximální a má amplitudu

$$A = \omega^2 Y \quad .$$

Zrychlení A odpovídá síla na klikový hřídel

$$F = mA = m\omega^2 Y \quad .$$

Amplituda výchylky je rovna polovině zdvihu

$$Y = \frac{z}{2}$$

a kruhový kmitočet harmonického pohybu je

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad .$$

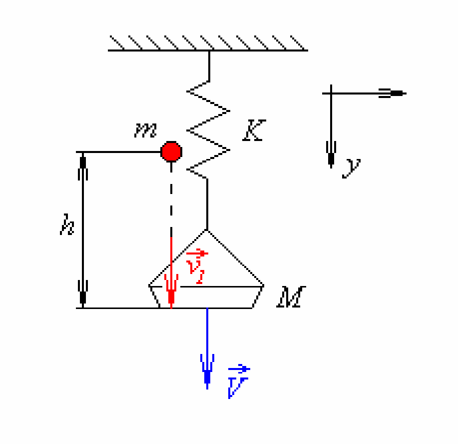
Pak hledaná síla F

$$F = m\frac{\pi^2 m^2}{30^2}\frac{z}{2} = \frac{1{,}2 \cdot \pi^2 \cdot 200^2 \cdot 0{,}12}{30^2 \cdot 2} = 31{,}6 \ \text{N} \quad .$$

<u>Příklad 3.2.5</u>.

Na misku o hmotnosti $M = 40$ g, která je zavěšena na pružině o tuhosti $K = 400\ \mathrm{N.m^{-1}}$ dopadne z výšky $h = 0{,}4$ m plastelínová kulička o hmotnosti $m = 10$ g a zůstane ležet zdeformovaná na misce. Miska s kuličkou začne v důsledku uděleného impulsu konat kmitavý pohyb. Stanovte amplitudu výchylky Y tohoto pohybu. Zanedbejte změnu rovnovážné polohy misky y_0 vlivem hmotnosti kuličky a misky (zanedbání je možné, pokud $y_0 \ll Y$; ověřte, zda zanedbání je možné).

<u>Řešení:</u>



Kulička dopadne na misku rychlostí v_1, kterou stanovíme ze zákona zachování mechanické energie:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad .$$

Odtud

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad .$$

Protože se jedná o nepružný ráz, pak ze zákona zachování hybnosti izolované soustavy stanovíme rychlost V, s kterou se začne miska s kuličkou pohybovat

$$m v_1 = (m + M) V \quad ,$$

$$V = v_1 \frac{m}{m+M} = \sqrt{2gh} \frac{m}{m+M} \quad .$$

Miska s deformovanou kuličkou začne vykonávat harmonický kmitavý pohyb

$$y = Y \sin(\omega t) \quad .$$

Pro rychlost tohoto kmitavého pohybu platí

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega Y \cos(\omega t) = V \cos(\omega t) \quad ,$$

kde jsme označili amplitudu rychlosti

$$V = \omega Y \quad .$$

Amplituda rychlosti V je rovna rychlosti, kterou má miska s kuličkou na začátku pohybu, tj. v_1. Pro úhlový kmitočet kmitavého pohybu platí

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m+M}} \quad .$$

Hledaná amplituda výchylky je proto rovna

$$Y = \frac{V}{\omega} = \frac{\sqrt{2gh}\,\dfrac{m}{m+M}}{\sqrt{\dfrac{K}{m+M}}} = m\sqrt{\frac{2gh}{K(m+M)}} \quad .$$

Po dosazení číselných hodnot obdržíme

$$Y = 10^{-2}\ \mathrm{kg}\sqrt{\frac{2\cdot 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot 0{,}4\,\mathrm{m}}{400\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}(1.10^{-2}\,\mathrm{kg}+4.10^{-2}\,\mathrm{kg})}} = 6{,}32 \quad \mathrm{mm}\,\cdot$$

Při výpočtu jsme zanedbali rovnovážnou výchylku y_0. Proveďme kontrolu. Pro rovnovážnou výchylku platí

$$(m + M)g = K y_0 \quad ,$$

odkud po úpravě získáme

$$y_0 = g\frac{m+M}{K} = 10 \quad \mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot\frac{2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}+4.10^{-2}\,\mathrm{kg}}{4\cdot 10^{2}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}} = 1{,}25 \quad \mathrm{mm} \quad .$$

$$y_0 = 1{,}25\ \ \mathrm{mm} < \mathrm{Y} = 6{,}32\ \ \mathrm{mm} \quad .$$

Zanedbáním rovnovážné výchylky y_0 jsme se nedopustili větší chyby.

Příklad 3.2.6.

Jaký je poměr kinetické a potenciální energie hmotného bodu vykonávajícího harmonické kmity s počáteční nulovou fází:

a) v čase $t = T/12$,

b) v okamžiku, kdy výchylka je $y = Y/4$.

Řešení:
Předpokládejme, že podle zadání hmotný bod vykonává harmonické kmity a že jeho výchylku z rovnovážné polohy můžeme popsat rovnicí

$$y = Y\cos(\omega t) \quad .$$

Na přednáškách byly odvozeny vztahy pro kinetickou a potenciální energii harmonického kmitavého pohybu

$$E_k = \frac{1}{2}KY^2\sin^2(\omega t)$$

a

$$E_p = \frac{1}{2}KY^2\cos^2(\omega t) \quad .$$

Pak hledaný podíl je v libovolném časovém okamžiku roven

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{1}{2}KY^2\sin^2(\omega t)}{\frac{1}{2}KY^2\cos^2(\omega t)} = \frac{\sin^2(\omega t)}{\cos^2(\omega t)} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos(2\omega t))}{\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega t))} = \frac{1-\cos(2\omega t)}{1+\cos(2\omega t)} \quad . \tag{1}$$

a) V prvém případě platí

$$t = \frac{T}{12} \quad .$$

Pak

$$\omega t = 2\pi\frac{1}{T}\frac{T}{12} = \frac{\pi}{6}$$

a po dosazení do vztahu (1) získáme

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{1-\cos\left(2\frac{\pi}{6}\right)}{1+\cos\left(2\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad .$$

b) Ve druhém případě podle zadání platí

$$y(t) = \frac{Y}{4} = Y\cos(\omega t) \quad .$$

Po krácení Y získáme

$$\cos(\omega t) = 0{,}25$$

a proto

$$\omega t = \arccos(0{,}25) = 1{,}318 \text{ rad} \quad .$$

Hledaný podíl energií má proto v tomto případě velikost (dosadíme do vztahu (1))

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{1-\cos(2\omega t)}{1+\cos(2\omega t)} = 15 \quad .$$

<u>Příklad 3.2.7.</u>

Na dvou stejných pružinách jsou zavěšena dvě závaží, jejichž hmotnosti jsou v poměru $m_1 : m_2 = 4{:}1$. Závaží dostala impuls ve svislém směru a kmitají se stejnými amplitudami $Y_1 = Y_2$. V jakém poměru jsou a) periody jejich kmitů $T_1{:}T_2$, b) energie kmitavých pohybů $E_1{:}E_2$?

<u>Řešení:</u>

Doba kmitu a energie kmitavého pohybu jsou rovny

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad , \qquad E = \frac{1}{2}KY^2 \quad .$$

a) Pro poměr period kmitů získáme

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K}}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = \frac{2}{1} \quad ,$$

tj.

$$T_1 : T_2 = 2:1 \quad .$$

b) Pro poměr energií získáme

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}KY_1^2}{\frac{1}{2}KY_1^2} = \frac{1}{1} \quad ,$$

tj.

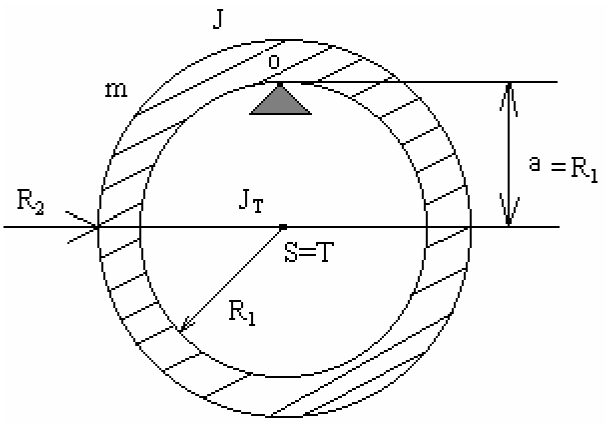
$$E_1 : E_2 = 1:1 \quad .$$

3.3. *Kyvadla*

Příklad 3.3.1.

Stanovte dobu kyvu obruče (dutého rotačního válce) o rozměrech R_1 = 0,99 m, R_2 = 1 m a výšce v = 2 cm. Obruč se opírá svojí vnitřní stěnou o břit a koná malé kyvy s úhlovou výchylkou $\alpha \leq 4^{\circ}$.

Řešení:



Kývající obruč můžeme považovat za fyzické kyvadlo. Pro dobu kyvu fyzického kyvadla byl na přednášce odvozen vztah

$$T_k = \pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad .$$

Zde J je moment setrvačnosti kyvadla k ose procházející bodem závěsu, m je hmotnost kyvadla a a je vzdálenost těžiště kyvadla od bodu závěsu. Moment setrvačnosti dutého válce vzhledem k ose rotace procházející těžištěm stanovíme z definičního vztahu

$$J_T = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m \quad . \tag{1}$$

Pro určení J ze vztahu (1) volíme element válce o hmotnosti dm ve tvaru dutého válečku o poloměru r, tloušťce stěny dr a výšce v. Je-li hustota materiálu válce ρ, pak

$$\mathrm{d}m = 2\pi r dr\, v\, \rho \quad .$$

Po dosazení do vztahu (1) obdržíme

$$J_T = 2\pi v\rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi v\rho \left(R_2^4 - R_1^4\right) \quad .$$

Moment setrvačnosti k ose rotace *o* procházející bodem závěsu a rovnoběžné s osou rotace procházející těžištěm stanovíme s pomocí Steinerovy věty

$$J = J_T + ma^2 \quad .$$

Hmotnost dutého válce je rovna

$$m = \pi\, v\rho\left(R_2^2 - R_1^2\right) \quad .$$

Vzdálenost os rotace *a* je (viz obrázek)

$$a = R_1 \quad .$$

Po dosazení

$$J = \frac{1}{2}\pi\, v\rho\left(R_2^4 - R_1^4\right) + \pi\, v\rho\left(R_2^2 - R_1^2\right)R_1 = \pi\, v\rho\left(R_2^2\left(\frac{1}{2}R_2^2 + R_1^2\right) - \frac{3}{2}R_1^4\right) \quad .$$

Doba kyvu obruče je pak rovna

$$T_k = \pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = \pi\sqrt{\frac{\pi\, v\rho\left(R_2^2\left(\frac{1}{2}R_2^2 + R_1^2\right) - \frac{3}{2}R_1^4\right)}{\pi\, v\rho\left(R_2^2 - R_1^2\right)gR_1}} \quad .$$

Po dosazení číselných hodnot získáme

$$T_k = \pi\sqrt{\frac{1^2\left(\frac{1}{2}1^2 + 0{,}99^2\right) - \frac{3}{2}0{,}99^4}{\left(1^2 - 0{,}99^2\right)\cdot 10\cdot 0{,}99}} = 1{,}41 \text{ s} \quad .$$

3.4. *Skládání kmitů*

Příklad 3.4.1.

Nalezněte amplitudu výchylky Y a počáteční fázi φ_0 kmitání složeného ze tří harmonických kmitů stejného směru, které jsou popsány rovnicemi:
$y_1 = Y_1\sin(2\pi ft + \varphi_1)$, $y_2 = Y_2\sin(2\pi ft - \varphi_2)$ a $y_3 = Y_3\sin(2\pi ft + \varphi_3)$,
kde $Y_1 = 5$ mm, $Y_2 = 10$ mm, $Y_3 = 8$ mm, $\varphi_1 = \pi/6$ rad, $\varphi_2 = -\pi/6$ rad a $\varphi_3 = 1{,}39$ rad.

Řešení:

Pro řešení použijeme vektorovou metodu. Vektorová metoda sestává ze tří kroků. V prvém kroku přiřadíme jednotlivým kmitáním rotující vektory. V druhém kroku provedeme sečtení dílčích vektorů podle pravidel vektorového počtu. Ve třetím kroku přiřadíme výslednému vektoru zpětně harmonické kmitání.

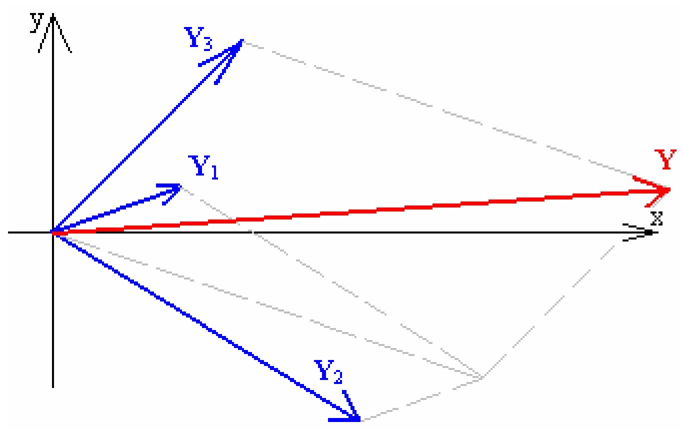
1. *Krok*. Jednotlivým harmonickým kmitáním přiřadíme vektory:

$$y_1 \to \mathbf{Y}_1 = \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1, \text{ kde } x_1 = Y_1\cos\varphi_1 \text{ a } y_1 = Y_1\sin\varphi_1 \quad ,$$

$$y_2 \to \mathbf{Y}_2 = \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2, \text{ kde } x_2 = Y_2\cos\varphi_2 \text{ a } y_2 = Y_2\sin\varphi_2 \quad ,$$

$$y_3 \to \mathbf{Y}_3 = \mathbf{i}x_3 + \mathbf{j}y_3, \text{ kde } x_3 = Y_3\cos\varphi_3 \text{ a } y_3 = Y_3\sin\varphi_3 \quad .$$

2. *Krok*. Vektory sečteme podle pravidel vektorového počtu. Obdržíme



$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 = \mathbf{i}(x_1 + x_2 + x_3) + \mathbf{j}(y_1 + y_2 + y_3) = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 \quad ,$$

kde složka x_0 výsledného vektoru je rovna

$$x_0 = x_1 + x_2 + x_3 = Y_1\cos\varphi_1 + Y_2\cos\varphi_2 + Y_3\cos\varphi_3$$

a složka y_0

$$y_0 = y_1 + y_2 + y_3 = Y_1\sin\varphi_1 + Y_2\sin\varphi_2 + Y_3\sin\varphi_3 \quad .$$

Modul výsledného vektoru se tudíž rovná

$$Y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{\left(Y_1 \cos\varphi_1 + Y_2 \cos\varphi_2 + Y_3 \cos\varphi_3\right)^2 + \left(Y_1 \sin\varphi_1 + Y_2 \sin\varphi_2 + Y_3 \sin\varphi_3\right)^2}$$

a úhel, který svírá výsledný vektor s osou x

$$tg\varphi_0 = \frac{x_0}{y_0} = \frac{Y_1 \sin\varphi_1 + Y_2 \sin\varphi_2 + Y_3 \sin\varphi_3}{Y_1 \cos\varphi_1 + Y_2 \cos\varphi_2 + Y_3 \cos\varphi_3} \quad .$$

Po dosazení číselných hodnot získáme

$$Y = 15{,}39 \quad \text{mm}$$

a

$$\varphi_0 = 0{,}3563 \quad \text{rad} \quad .$$

3. *Krok*. Výslednému vektoru přiřadíme zpět harmonické kmitání tak, že amplituda kmitání je rovna modulu vektoru a počáteční fázi kmitání je rovna úhlu, který výsledný vektor svírá s osou x:

$$\mathbf{Y} \rightarrow y = Y \sin(\omega t + \varphi_0) \quad .$$

3.5. *Volné tlumené kmity*

Příklad 3.5.1.
Perioda netlumených kmitů je $T = 4$ s, konstanta tlumení $\delta = 0{,}4$ s^{-1} a počáteční fáze $\varphi_0 = 0$ rad. Výchylka hmotného bodu v čase $t = T/8$ je rovna $y = 4{,}5$ cm. Napište rovnici popisující časový průběh výchylky těchto kmitů.

Řešení:
Rovnice pro výchylku tlumených kmitů má obecný tvar:

$$y = Y_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \quad . \qquad (1)$$

V našem případě je

$$\varphi_0 = 0 \,\text{rad}$$

a

$$\delta = 0{,}4 \ \ \text{s}^{-1} \ .$$

Vlastní úhlová frekvence netlumených kmitů je rovna

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

a vlastní úhlová frekvence tlumených kmitů má proto velikost

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{4}\right)^2 - 0{,}4^2} = 1{,}52 \ \ \text{s}^{-1} \quad .$$

V čase $t = T/8$ je dle zadání výchylka $y = 4{,}5$ cm. Úpravou rovnice (1) a po dosazení číselných hodnot získáme velikost amplitudy

$$Y_0 = \frac{y(t) e^{\delta t}}{\cos(\omega_1 t)} = \frac{4{,}5 e^{0{,}4 \cdot 0{,}5}}{\cos(1{,}52 \cdot 0{,}5)} = 7{,}58 \ \ \text{cm} \quad .$$

Rovnice popisující časový průběh výchylky je pak rovna :

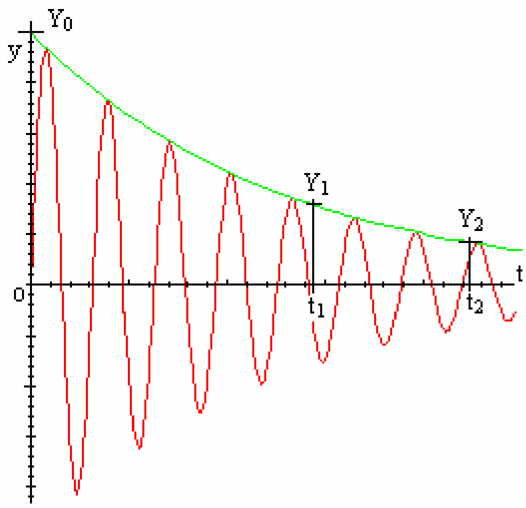
$$y(t) = 0{,}0758 e^{-0{,}4t} \cos(1{,}52t) \qquad [\text{m}] \ .$$

Příklad 3.5.2.
Počáteční velikost obálky amplitud kmitavého pohybu je $Y_0 = 3$ cm. Za dobu $t_1 = 10$ s klesne obálka amplitud na velikost $Y_1 = 1$ cm. V jakém čase t_2 bude obálka amplitud rovna $Y_2 = 0{,}3$ cm ?

Řešení:
Pro obálku amplitud tlumených kmitů platí:

$$Y = Y_0 e^{-\delta t} \quad ,$$

kde Y_0 je velikost obálky amplitud v čase $t = 0$, Y je velikost obálky v čase t a δ je konstanta tlumení.



Pro čas t_1 platí

$$Y_1 = Y_0 e^{-\delta t_1} \quad ,$$

odkud získáme

$$\delta = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{Y_1}{Y_0} = \frac{1}{t_1}\ln\frac{Y_0}{Y_1} \quad .$$

Podobně pro čas t_2 platí

$$Y_2 = Y_0 e^{-\delta t_2} \quad ,$$

takže

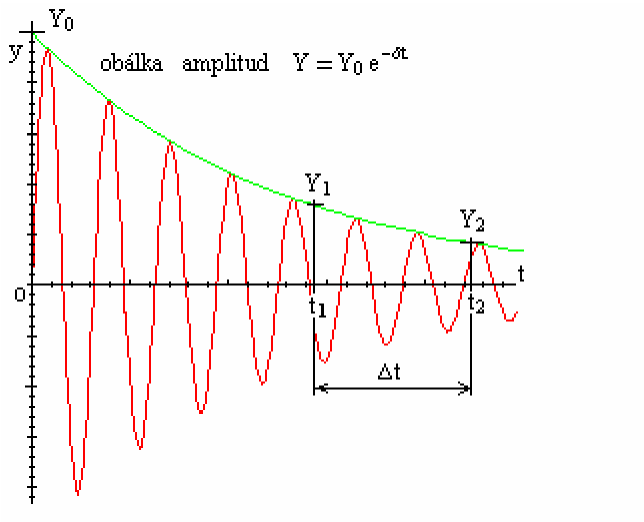
$$t_2 = -\frac{1}{\delta}\ln\frac{Y_2}{Y_0} = \frac{1}{\delta}\ln\frac{Y_0}{Y_2} = t_1\frac{\ln\frac{Y_0}{Y_2}}{\ln\frac{Y_0}{Y_1}} \quad .$$

Po dosazení číselných hodnot získáme

$$t_2 = 10\frac{\ln\frac{3}{0{,}3}}{\ln\frac{3}{1}} = 10\frac{\ln 10}{\ln 3} \cong 21 \ \text{s} \quad .$$

<u>Příklad 3.5.3.</u>
Za jak dlouhou dobu Δt se energie kmitavého pohybu zvonící ladičky s frekvencí f_1 = 600 Hz zmenší milionkrát ($n = 10^6$ krát), je-li konstanta tlumení ladičky $\delta = 0{,}48 \ \text{s}^{-1}$?

<u>Řešení:</u>



Celková energie kmitavého pohybu ladičky je v libovolném okamžiku rovna:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}KY^2 \quad ,$$

kde Y je obálka amplitud tlumeného kmitání, jejíž časovou závislost můžeme zapsat ve tvaru

$$Y = Y_0 e^{-\delta t} \quad .$$

Pro poměr energií ladičky v čase t_1 a t_2 platí:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}KY_1^2}{\frac{1}{2}KY_2^2} = \frac{Y_1^2}{Y_2^2} = n \quad .$$

Po úpravě získáme

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \sqrt{n}\ , \quad n = 10^6 \quad .$$

Dále

$$Y_1 = Y_0 \cdot e^{-\delta t_1}$$

a

$$Y_2 = Y_0 \cdot e^{-\delta t_2} = Y_0 e^{-\delta(t_1 + \Delta t)} = Y_1 e^{-\delta \Delta t} \quad .$$

Z této rovnice úpravou získáme

$$\frac{Y_1}{Y_2} = e^{\delta \Delta t} \quad .$$

Řešením této rovnice obdržíme hledanou dobu

$$\Delta t = \frac{1}{\delta} \ln \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{1}{\delta} \ln \sqrt{n} \quad .$$

Číselně

$$\Delta t = \frac{1}{0{,}48} \ln \sqrt{10^6} = \frac{1}{0{,}48} \ln 10^3 \cong 14{,}4 \ \ \mathrm{s} \quad .$$