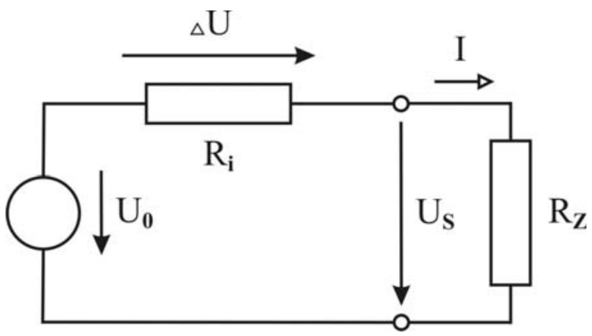
ŘEŠENÉ PŘÍKLADY K DOPLNĚNÍ VÝUKY

1. TÝDEN

Příklad 1.1

K baterii s vnitřním napětím U_0 a vnitřním odporem R_i je připojen vnější odpor R (viz obr. 1.1). Určete proud *I*, který prochází obvodem, úbytek napětí ΔU na vnitřním odporu baterie a velikost svorkového napětí U_S.

Dáno: $U_0 = 24\ V$; $R_i = 10\ \Omega$; $R = 470\ \Omega$
Určit: I ; ΔU ; U_S



Obr. 1.1

Řešení:

Proud tekoucí obvodem

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_Z} = \frac{24}{10 + 470} = \underline{\underline{0,05A}}$$

Úbytek na vnitřním odporu baterie

$$\Delta U = I \cdot R_i = 0,05 \cdot 10 = \underline{\underline{0,5V}}$$

Svorkové napětí - vnitřní napětí zmenšené o úbytek na vnitřním odporu

$$U_S = U_0 - \Delta U = 24 - 0,5 = \underline{\underline{23,5V}}$$

Příklad 1.2

Na svorkách zdroje napětí jsme naměřili při odebíraném proudu I_1 na svorkách napětí U_1 a při proudu I_2 napětí U_2. Určete vnitřní napětí U_0 a vnitřní odpor R_i zdroje.

Dáno: $I_1 = 100\ mA$; $U_1 = 12\ V$; $I_2 = 500\ mA$; $U_2 = 10\ V$
Určit: U_0 ; R_i

Řešení:

Pro napětí na svorkách v prvním případě platí: $U_1 = U_0 - R_i \cdot I_1$

a v druhém případě platí: $U_2 = U_0 - R_i \cdot I_2$

Z obou rovnic vyjádříme U_0

$$U_0 = U_1 + R_i \cdot I_1$$
$$U_0 = U_2 + R_i \cdot I_2$$

Při rovnosti levých stran můžeme napsat: $U_1 + R_i \cdot I_1 = U_2 + R_i \cdot I_2$

Z této rovnice vypočteme $R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{12-10}{0,5-0,1} = \underline{\underline{5\Omega}}$

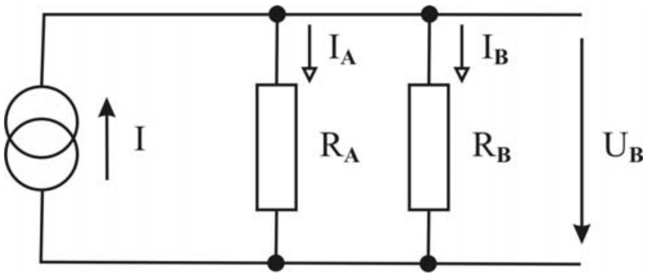
Napětí zdroje v nezatíženém stavu U_0

$U_0 = U_1 + R_i \cdot I_1$		$U_0 = U_2 + R_i \cdot I_2$
$U_0 = 12 + 5 \cdot 0,1$	nebo	$U_0 = 10 + 5 \cdot 0,5$
$\underline{\underline{U_0 = 12,5V}}$		$\underline{\underline{U_0 = 12,5V}}$

Příklad 1.3

Zdroj proudu I napájí dva paralelně zapojené odpory (viz obr. 1.2), z nichž odpor R_A je konstantní a odpor R_B je proměnný v daném rozmezí. Vyjádřete závislost proudu I_B tekoucího proměnným odporem R_B na jeho velikosti a závislost napětí na tomto proměnném odporu R_B na proudu I_B jím tekoucím.

Dáno: $I = 3$ A ; $R_A = 2\ \Omega$;
$R_B = (0$ až $\infty)\ \Omega$
Určit: $I_B = f_1(R_B)$; $U_B = f_2(I_B)$



Obr. 1.2

Řešení:

Proud I se rozdělí na proudy I_A a I_B v nepřímém poměru odporů R_A a R_B

$$\frac{I_B}{I_A} = \frac{R_A}{R_B} \Rightarrow I_B = I_A \frac{R_A}{R_B}$$

Proud I_A určíme ze vztahu

$$I_A = I - I_B = 3 - I_B$$

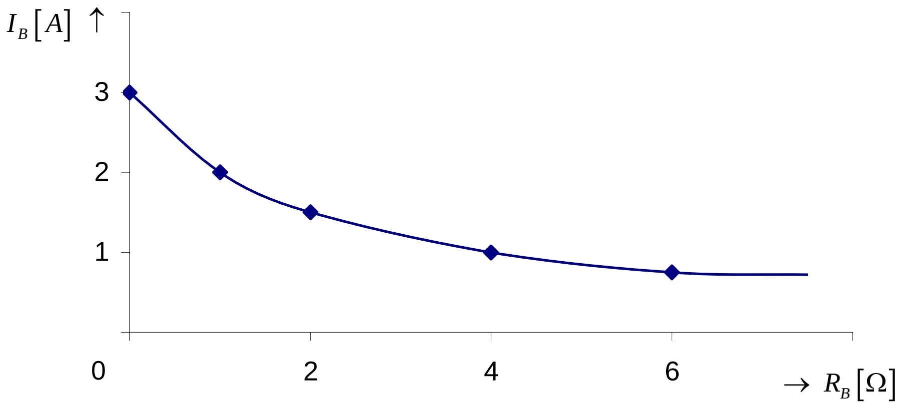
dosadíme do rovnice pro I_B a dostaneme

$$I_B = (3 - I_B)\frac{2}{R_B} \qquad \text{a po úpravě} \qquad \underline{\underline{I_B = \frac{6}{R_B + 2}}}$$

Pro vynesení závislosti $I_B = f_1(R_B)$ vypočteme několik bodů.

$R_B\,[\Omega]$	0	1	2	4	6	... ∞
$I_B\,[A]$	3	2	1,5	1	0,75	... 0

závislost je nakreslena na obr. 1.3



Obr. 1.3

Závislost $U_B = f_2(I_B)$ získáme ze vztahu

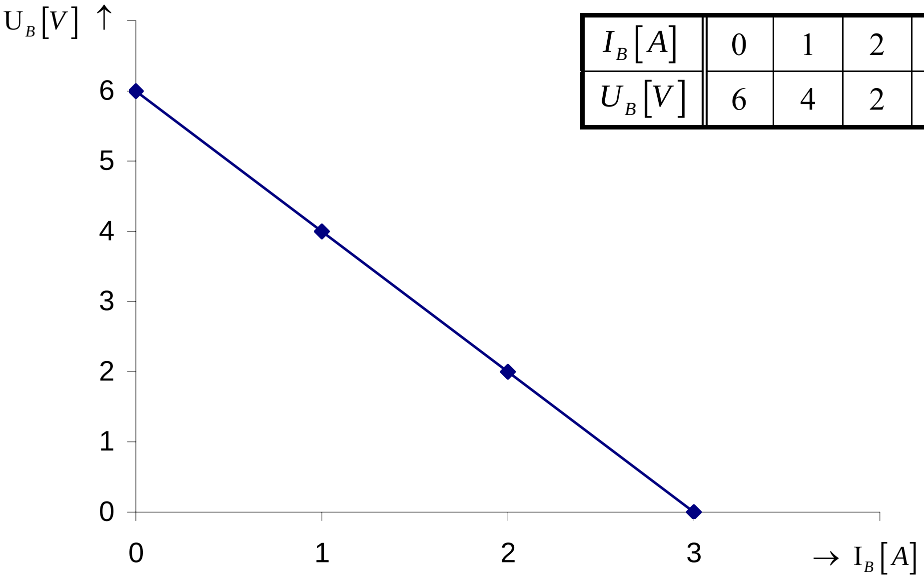
$$U_B = R_B \cdot I_B \qquad \text{za } R_B \text{ dosadíme} \qquad R_B = R_A \frac{I_A}{I_B} = R_A \frac{I - I_B}{I_B}$$

a dostaneme

$$U_B = R_A(I - I_B) = \underline{\underline{2(3 - I_B)}}$$

Pro vynesení grafu (viz obr. 1.4) vypočteme několik bodů této závislosti.

$I_B[A]$	0	1	2	3
$U_B[V]$	6	4	2	0



Obr. 1.4

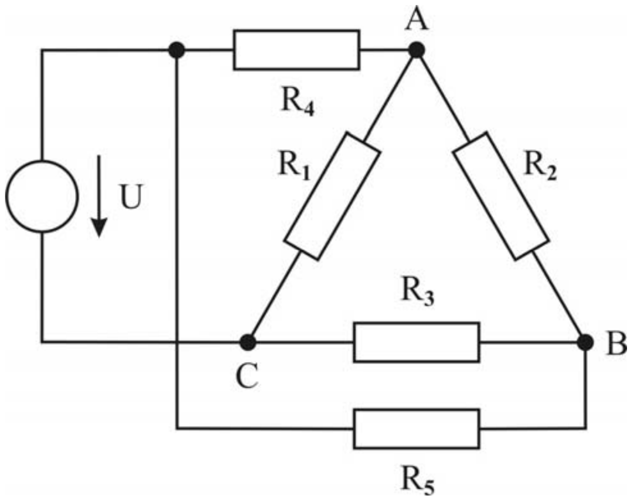
2. TÝDEN

Příklad 2.1

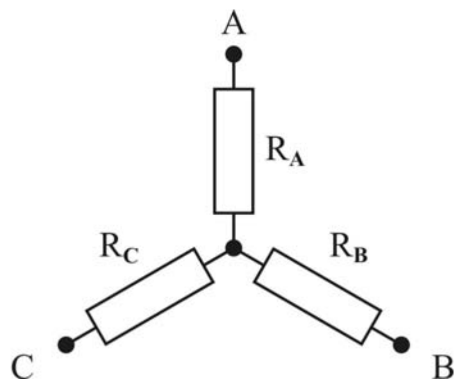
Určete, jak velkým výsledným odporem R_V bude zatížen zdroj napětí, je-li obvod zapojen podle obr. 2.1 a hodnoty odporů jsou známé.

Dáno: $R_1 = 300\ \Omega$; $R_2 = 100\ \Omega$; $R_3 = 200\ \Omega$; $R_4 = 50\ \Omega$; $R_5 = 66{,}7\ \Omega$

Určit: R_V



Obr. 2.1



Obr. 2.2

Řešení:

Trojúhelník ABC tvořený odpory R_1, R_2, R_3 transfigurujeme do hvězdy ABC tvořenou odpory R_A, R_B, R_C (viz obr. 2.2).

Odpory R_A, R_B, R_C se vypočítají ze vztahů:

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{300 \cdot 100}{600} = 50\Omega$$

$$R_B = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{100 \cdot 200}{600} = 33{,}3\Omega$$

$$R_C = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{300 \cdot 200}{600} = 100\Omega$$

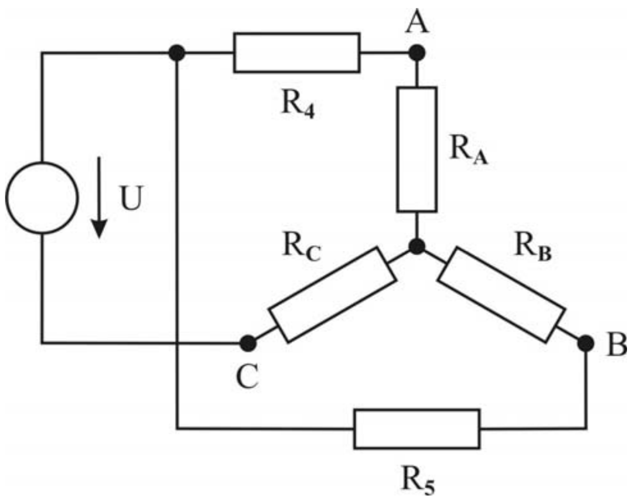
Obvod po transfiguraci je na obr. 2.3 a tentýž obvod je názorněji překreslen na obr. 2.4.

Součet odporů R_4 a R_A nahradíme odporem $R_{A4} = R_A + R_4 = 50 + 50 = 100\Omega$.

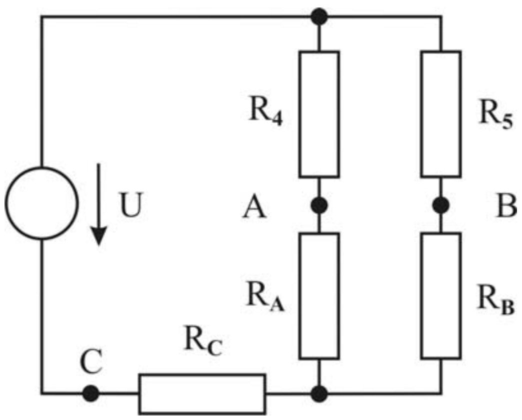
Součet odporů R_5 a R_B nahradíme odporem $R_{B5} = R_B + R_5 = 33,3 + 66,7 = 100\Omega$.

Celkový odpor paralelní kombinace odporů R_{A4} a R_{B5} vypočteme:

$$\frac{1}{R_{A4B5}} = \frac{1}{R_{A4}} + \frac{1}{R_{B5}} \qquad R_{A4B5} = \frac{R_{A4} \cdot R_{B5}}{R_{A4} + R_{B5}} = \frac{100 \cdot 100}{100 + 100} = 50\Omega$$



Obr. 2.3



Obr. 2.4

Výsledný odpor $R_V = R_C + R_{A4B5} = 50 + 100 = \underline{\underline{150\Omega}}$

Potřebujeme-li transfigurovat hvězdu na trojúhelník, použijeme následujících vztahů:

$$R_1 = R_A + R_C + \frac{R_A \cdot R_C}{R_B}$$

$$R_2 = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C}$$

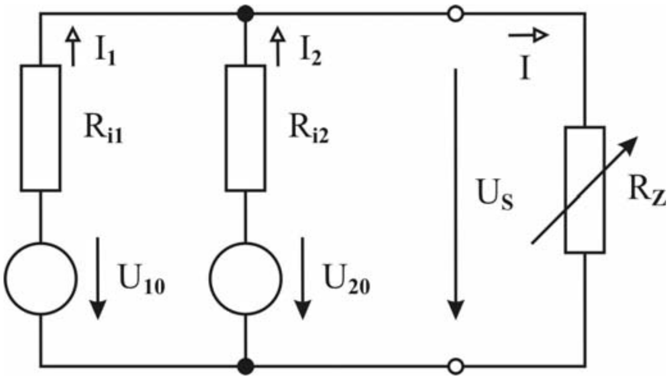
$$R_3 = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A}$$

Příklad 2.2

Do společné sítě pracují dva paralelně spojené zdroje napětí (viz. obr. 2.5). Při odebíraném proudu I je na svorkách sítě napětí U_S. Proud I je rozdělen rovnoměrně na oba zdroje s vnitřními odpory R_{i1} a R_{i2}. Krátkodobě se zvýší odběr proudu na hodnotu I'. Určete proudy I_1' a I_2' tekoucí zdroji při tomto přetížení.

Dáno: $U_S = 220\ V$; $I = 20$ A ; $I' = 40\ A$; $R_{i1} = 0{,}5\ \Omega$; $R_{i2} = 0{,}6\ \Omega$

Určit: I_1' a I_2'



Obr. 2.5

Řešení:

Pracují-li dva zdroje paralelně do společné sítě, musí mít stejná svorková napětí. Vypočteme nejprve vnitřní napětí obou zdrojů

$$U_{10} = U_S + R_{i1} \cdot I_1$$
$$U_{20} = U_S + R_{i2} \cdot I_2$$

V trvalém provozu je

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2} = \frac{20}{2} = 10A$$

po dosazení do předchozích rovnic

$$U_{10} = 220 + 0,5 \cdot 10 = 225V$$
$$U_{20} = 220 + 0,6 \cdot 10 = 226V$$

Při přetížení musí znovu platit rovnost svorkových napětí obou zdrojů. Vnitřní napětí se nezměnila a proto můžeme psát:

$$U_{10} - R_{i1} \cdot I_1' = U_{20} - R_{i2} \cdot I_2'$$

Zdroje dodávají do sítě proud:

$$I' = I_1' + I_2'$$

Z této rovnice vypočteme I_1' a dosadíme do předchozí rovnice

$U_{10} - R_{i1}\left(I - I_2'\right) = U_{20} - R_{i2} \cdot I_2'$ odtud vypočteme I_2'

$$I_2' = \frac{U_{20} - U_{10} + R_{i1} \cdot I'}{R_{i1} + R_{i2}} = \frac{226 - 225 + 0,5 \cdot 40}{0,5 + 0,6} = \underline{\underline{19A}}$$

$$I_1' = I' - I_2' = 40 - 19 = \underline{\underline{21A}}$$

Povšimněte si, že zdroj s menším vnitřním odporem je zatížen větším proudem.

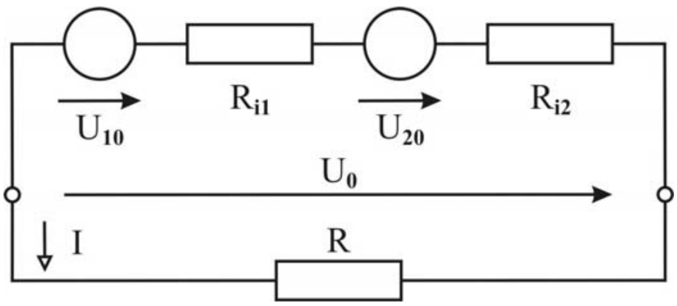
Příklad 2.3

Máme k dispozici dva zdroje napětí. První z nich má vnitřní napětí U_{10} a vnitřní odpor R_{i1}, druhý U_{20} a R_{i2}. Jak velké bude výsledné napětí U_0, spojíme-li oba zdroje do série (viz obr. 2.6) a jak velký proud poteče spotřebičem s odporem *R*. Jak se změní poměry v případě, že dojde k opačnému zapojení druhého zdroje (viz obr. 2.7)

Dáno: $U_{10} = 24\ V$; $U_{20} = 6\ V$; $R_{i1} = 3\ \Omega$; $R_{i2} = 2\ \Omega$; $R = 55\ \Omega$

Určit: U_0 ; I ; U_0' ; I'

Řešení:



Obr. 2.6

Při sériovém řazení zdrojů platí pro výsledné napětí U_0

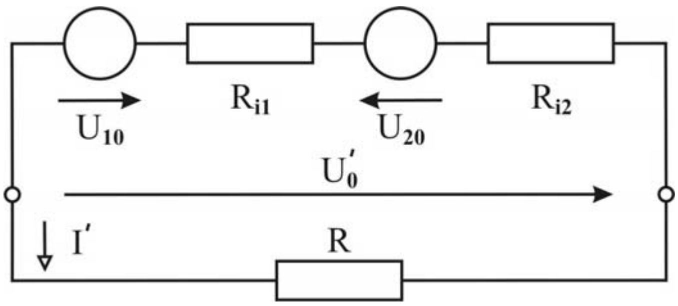
$$U_0 = U_{10} + U_{20} = 24 + 6 = \underline{\underline{30V}}$$

a výsledný vnitřní odpor R_i

$$R_i = R_{i1} + R_{i2} = 3 + 2 = 5\Omega$$

Proud *I* tekoucí zátěží *R*

$$I = \frac{U_0}{R_i + R} = \frac{30}{5+55} = \underline{\underline{0,5A}}$$



Obr. 2.7

V případě chybného zapojení druhého zdroje bude výsledné napětí

$$U_0' = U_{10} - U_{20} = 24 - 6 = \underline{\underline{18V}}$$

a proud do zátěží (vnitřní odpor R_i se nezmění)

$$I' = \frac{U_0'}{R_i + R} = \frac{18}{60} = \underline{\underline{0,3A}}$$

3. TÝDEN

Příklad 3.1

Potřebujeme měřit v síti s napětím U. Máme k dispozici voltmetr s rozsahem r_V a vnitřním odporem R_V při tomto rozsahu. Určete velikost předřadného odporu R_P a konstantu voltmetru k_V po zvětšení rozsahu, je-li počet dílků na stupnici d.

Dáno: $U = 220\ V$; $r_V = 60\ V$; $R_V = 2000\ \Omega$ při rozsahu 60 V ; $d = 120$ dílků

Určit: R_P ; k_V

Řešení:

Předřadné odpory jsou vyráběny s hodnotami stejnými jako mají vnitřní odpory voltmetrů, proto upravíme nový rozsah na nejblíže vyšší násobek základního rozsahu tj. na 240 V $\left(n = \frac{240}{60} = 4\right)$.

Velikost předřadného odporu

$$R_P = (n-1)R_V = (4-1)\cdot 2000 = \underline{\underline{6000\Omega}}$$

konstanta voltmetru je

$$k_V = \frac{k_V}{d} = \frac{240}{120} = \underline{\underline{2V\,/\,dílek}}$$

Poznámka:

Vnitřní odpor voltmetru se udává též hodnotou odporu vztaženého na 1 V měřícího rozsahu tedy např. $5000\,\Omega/V$. Má-li voltmetr měřící rozsah $12V$ je $R_V = 5000\cdot 12 = 60000\Omega$.

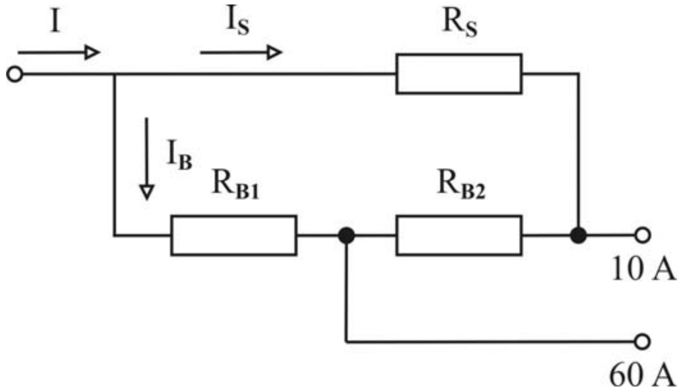
Příklad 3.2

Vypočtěte hodnoty odporů R_{B1} a R_{B2} kombinovaného bočníku pro zvětšení rozsahů r_{A1} a r_{A2}, má-li základní měřící systém plnou výchylku při proudu I_S je-li odpor systému R_S (viz obr. 3.1)

Dáno: $r_{A1} = 10\ A$; $r_{A2} = 60\ A$; $R_S = 5\ \Omega$; $I_S = 12\ mA$

Určit: R_{B1} ; R_{B2}

Řešení:



Obr. 3.1

Pro určení velikosti bočníku platí vztah $R_B = \frac{R_S}{n-1}$, který aplikujeme na tento případ.

a) Pro rozsah 10 A

$$n = \frac{r_{A1}}{I_S} = \frac{10}{12 \cdot 10^{-3}} = 833,3$$

Bočník je tvořen odpory R_{B1} a R_{B2}

$$R_{B1} + R_{B2} = \frac{R_S}{n-1} = \frac{5}{833,3-1} = 0,006\Omega$$

b) Pro rozsah 60 A

$$n = \frac{r_{A2}}{I_S} = \frac{60}{12 \cdot 10^{-3}} = 5000$$

V tomto případě se odpor R_{B2} přičítá k odporu R_S

$$R_{B1} = \frac{R_S + R_{B2}}{n-1} = \frac{5 + R_{B2}}{5000-1}$$

Pro dvě neznámé R_{B1} a R_{B2} máme dvě rovnice

$$R_{B1} + R_{B2} = 0,006 \qquad\qquad R_{B1} = \frac{5 + R_{B2}}{4999}$$

druhou rovnici dosadíme do první a vypočteme R_{B2}

$$\frac{5 + R_{B2}}{4999} + R_{B2} = 0,006 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R_{B2} = 0,005\Omega}}$$

Velikost R_{B1} určíme dosazením za R_{B2} do prvních rovnic

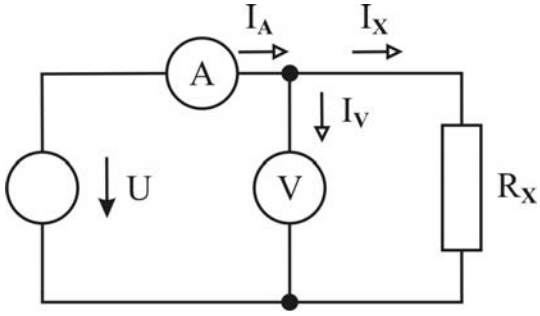
$$R_{B1} = 0,006 - R_{B2} = 0,006 - 0,005 = \underline{\underline{0,001\Omega}}$$

Příklad 3.3

Neznámý odpor R_X byl změřen přístroji zapojenými podle obr. 3.2. Určete hodnotu R_X jestliže měl voltmetr rozsah r_V, počet dílků na stupnici d_1 a vnitřní odpor R_V. Při měření ukazoval výchylku α_V. Ampérmetr měl rozsah r_A a počet dílků na stupnici d_2. Při měření ukazoval výchylku α_A.

Dáno: $r_V = 12\ V$; $d_1 = 120$ dílků ; $R_V^{/} = 200\ \Omega/V$; $\alpha_V = 86$ dílků ; $r_A = 0{,}2\ A$; $d_2 = 100$ dílků ; $\alpha_A = 51$ dílků

Určit: R_X



Obr. 3.2

Řešení:

Nejprve vypočteme konstantu ampérmetru k_A a proud ampérmetrem I_A

$$k_A = \frac{r_A}{d_2} = \frac{0,2}{100} = 0,002\ A/\,dílek$$

$$I_A = \alpha_A \cdot k_A = 51 \cdot 0,002 = 0,102 A$$

Abychom určili proud tekoucí voltmetrem, musíme znát změřené napětí U_X. Vypočteme konstantu voltmetru k_V

$$k_V = \frac{r_V}{d_1} = \frac{12}{120} = 0,1\ V/\,dílek$$

$$U_X = \alpha_V \cdot k_V = 86 \cdot 0,1 = 8,6V$$

Pro určení proudu voltmetrem I_V musíme znát vnitřní odpor voltmetru R_V

$$R_V = R_V^{/} \cdot r_V = 200 \cdot 12 = 2400\Omega$$

$$I_V = \frac{U_X}{R_V} = \frac{8,6}{2400} = 0,0036A$$

Proud I_X tekoucí neznámým odporem

$$I_X = I_A - I_V = 0,1020 - 0,0036 = 0,0984A$$

Neznámý odpor R_X vypočteme

$$R_X = \frac{U_X}{I_X} = \frac{8,6}{0,0984} = \underline{\underline{87,4\Omega}}$$

Poznámka: Porovnejte, jak se liší výsledek, jestliže nebudete uvažovat proud tekoucí voltmetrem.

$$R_X = \frac{U_X}{I_A} = \frac{8,6}{0,102} = \underline{\underline{84,3\Omega}}$$

Příklad 3.4

Na zdroj s napětím U jsou zapojeny do série odpory R_1, R_2, R_3 (viz. obr. 3.3). Určete proud I tekoucí ze zdroje a úbytky napětí U_1, U_2, U_3 na jednotlivých odporech.

Dáno: $U = 60$ V ; $R_1 = 90\ \Omega$; $R_2 = 50\ \Omega$; $R_3 = 60\ \Omega$

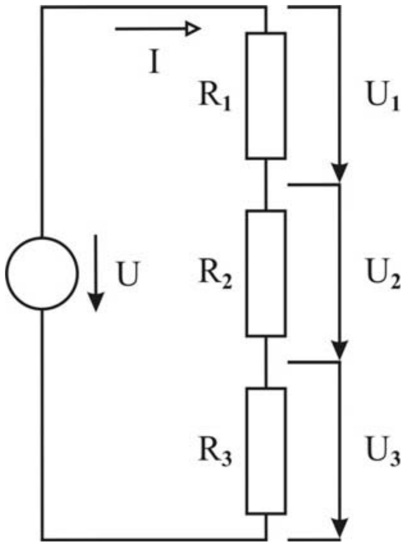
Určit: I ; U_1 ; U_2 ; U_3

Řešení:

Abychom mohli určit proud I tekoucí ze zdroje, musíme nejprve znát celkový odpor obvodu R

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 90 + 50 + 60 = 200\Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{60}{200} = \underline{\underline{0,3A}}$$



Obr. 3.3

Úbytky napětí na jednotlivých spotřebičích

$$U_1 = R_1 I = 90 \cdot 0,3 = \underline{\underline{27V}}$$

$$U_2 = R_2 I = 50 \cdot 0,3 = \underline{\underline{15V}}$$

$$U_3 = R_3 I = 60 \cdot 0,3 = \underline{\underline{18V}}$$

Podle druhého Kirchhoffova zákona můžeme zkontrolovat výpočet

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = 27 + 15 + 18 = 60V$$

4. TÝDEN

Příklad 4.1

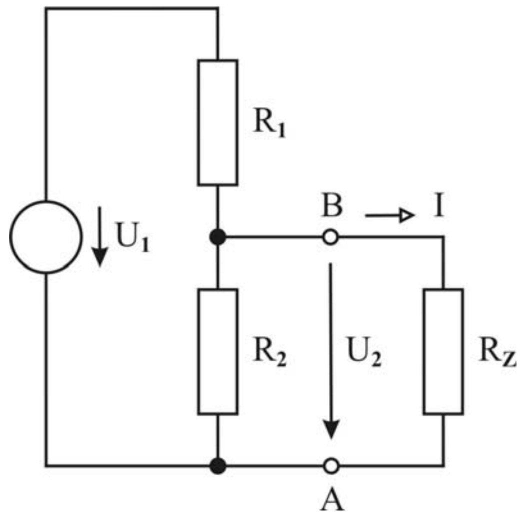
Na zdroj napětí U_1 se zanedbatelným vnitřním odporem R_i připojme dělič napětí tvořený odpory R_1 a R_2 (viz obr. 4.1). Dělič je zatížen odporem R_Z. Nahraďte dělič napětí z hlediska výstupních svorek ideálním zdrojem napětí U_0 v sérii s vnitřním odporem R_K. Určete velikost výstupního napětí U_2.

Dáno: $U_1 = 10\ V$; $R_1 = 500\ \Omega$; $R_2 = 1000\ \Omega$; $R_Z = 1200\ \Omega$;

Určit: U_{20} ; R_K ; U_2

Řešení:

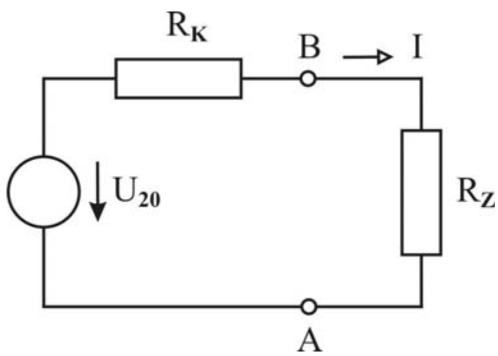
Podle Theveninova teorému je možno jakýkoli lineární obvod nahradit z hlediska výstupních svorek náhradním zdrojem napětí U_{20} v sérii s vnitřním odporem R_K. Náhradní napětí U_{20} je napětí na výstupních svorkách v nezatíženém stavu (pro I = 0). V nezatíženém stavu se napětí rozdělí v poměru odporů



Obr. 4.1

$$U_{20} = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \frac{1000}{500 + 1000} = \underline{\underline{6,67V}}$$

a náhradní vnitřní odpor R_K je odpor, který by se v nezatíženém stavu objevil na výstupních svorkách, kdybychom zdroje napětí zkratovali a zdroje proudu rozpojili. V našem případě je R_K dáno paralelní kombinací R_1 a R_2.



Obr. 4.2

$$R_K = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{500 \cdot 1000}{500 + 1000} = \underline{\underline{334\Omega}}$$

Náhradní schéma je na obr. 4.2 a proud I

$$I = \frac{U_{20}}{R_K + R_Z} = \frac{6,67}{334 + 1200} = 0,00435A$$

Úbytek napětí ΔU na odporu R_K $\qquad \Delta U = R_K \cdot I = 334 \cdot 0,00435 = 1,45V$

Výstupní napětí U_2 při zatížení odporem R_Z $\qquad U_{20} = U_{20} - \Delta U = 6,67 - 1,45 = \underline{\underline{5,22V}}$

Příklad 4.2

Tři zdroje napětí U_1, U_2 a U_3 jsou připojeny na obvod složený z odporů R_1, R_2, R_3 a R_4 podle obr. 4.3. Vypočtěte metodou superpozice napětí U_4 na odporu R_4.

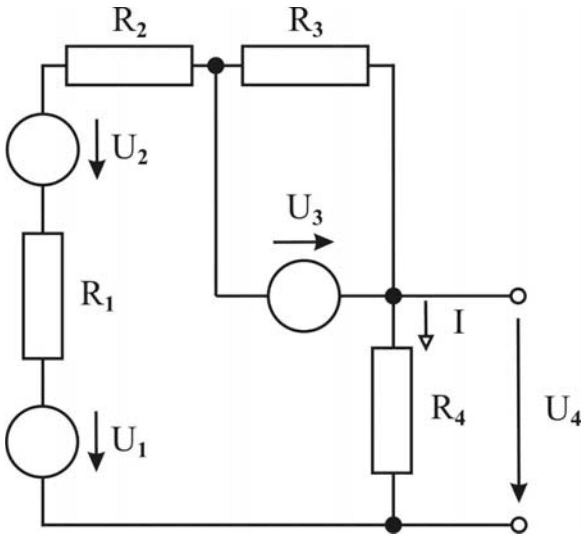
Dáno: $U_1 = 9\ V$; $U_2 = 6\ V$; $U_3 = 3\ V$; $R_1 = 200\ \Omega$; $R_2 = 100\ \Omega$; $R_3 = 600\ \Omega$; $R_4 = 400\ \Omega$
Určit: U_4

Řešení:

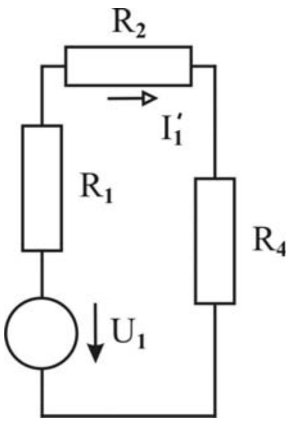
Při řešení postupujeme tak, jako by v obvodu byl vždy pouze jeden zdroj (ostatní zdroje napětí jsou zkratovány a zdroje proudu rozpojeny) a proudy vyvolané jednotlivými zdroji se sčítají. Tedy proud I odporem R_4 je dán součtem proudů I_1', I_2' a I_3' vyvolanými napětími U_1, U_2 a U_3.

Určíme proud I_1' vyvolaný zdrojem napětí U_1 (upravený obvod na obr. 4.4)

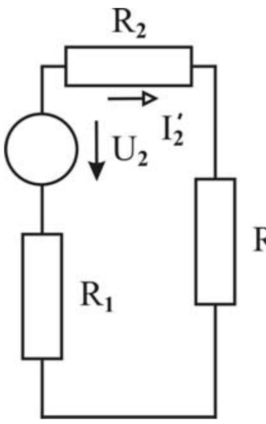
$$I_1' = \frac{U_1}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{9}{200 + 100 + 400} = 0,0128A$$



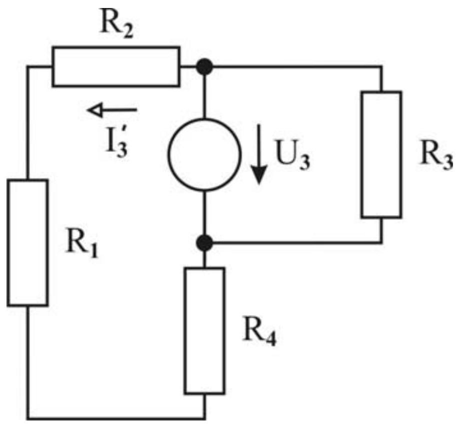
Obr. 4.3



Obr. 4.4



Obr. 4.5



Obr. 4.6

Proud I_2' vyvolaný zdrojem U_2 (obr. 4.5) $\quad I_2' = \frac{U_2}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{6}{200 + 100 + 400} = 0,0086A$

Proud I_3' vyvolaný zdrojem U_3 (obr. 4.6) $\quad I_3' = \frac{U_3}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{3}{200 + 100 + 400} = 0,0043A$

Proud jdoucí odporem R_4 působením všech zdrojů

$$I = I_1' + I_2' - I_3' = 0,0128 + 0,0086 - 0,0043 = 0,0171A$$

Napětí U_4 na odporu R_4 $\quad U_4 = R_4 \cdot I = 400 \cdot 0,0171 = \underline{\underline{6,84V}}$

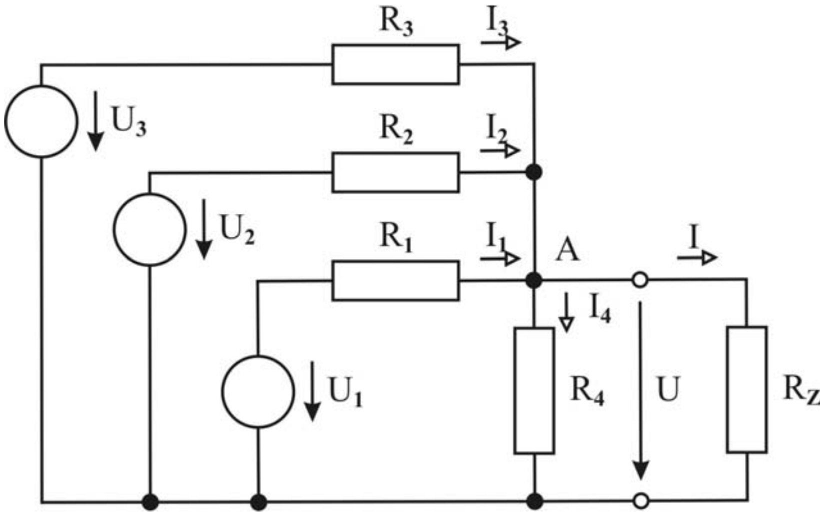
Příklad 4.3

Jak velké bude výstupní napětí U sčítacího obvodu podle obr. 4.7 v nezatíženém stavu ($U = U_0$ při $I = 0$) a jak se změní výstupní napětí v případě, že obvod zatížíme proudem I.

Dáno: $U_1 = 1\ V$; $U_2 = 1{,}6\ V$; $U_3 = 2\ V$; $R_1 = 2\ \mathrm{k\Omega}$; $R_2 = 2\ \mathrm{k\Omega}$; $R_3 = 1\ \mathrm{k\Omega}$; $R_4 = 5\ \mathrm{k\Omega}$
Určit: U ; U_0

Řešení:

Pro řešení tohoto obvodu použijeme metodu uzlových napětí, která využívá k popisu obvodu prvního Kirchhofova zákona. Celý obvod je popsán jednou rovnicí. Bod A zvolíme za referenční uzel a platí



Obr. 4.7

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I = 0$$

po dosazení prvků obvodu:

$$\frac{U_1 - U}{R_1} + \frac{U_2 - U}{R_2} + \frac{U_3 - U}{R_3} - \frac{U}{R_4} - I = 0$$

Pro nezatížený stav, kdy $I = 0$ a $U = U_0$

$$\frac{U_1 - U_0}{R_1} + \frac{U_2 - U_0}{R_2} + \frac{U_3 - U_0}{R_3} - \frac{U_0}{R_4} = 0$$

Z této rovnice po úpravě vypočteme U_0

$$U_0 = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{1}{1 \cdot 10^3} + \frac{1{,}6}{2 \cdot 10^3} + \frac{2}{2 \cdot 10^3}}{\frac{1}{1 \cdot 10^3} + \frac{1}{2 \cdot 10^3} + \frac{1}{2 \cdot 10^3} + \frac{1}{5 \cdot 10^3}} = \underline{\underline{1{,}27V}}$$

Po zatížení proudem I klesne výstupní napětí

$$\frac{U_1 - U}{R_1} + \frac{U_2 - U}{R_2} + \frac{U_3 - U}{R_3} - \frac{U}{R_4} - I = 0$$

$$U = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} - I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{1}{1 \cdot 10^3} + \frac{1{,}6}{2 \cdot 10^3} + \frac{2}{2 \cdot 10^3} - 0{,}5 \cdot 10^{-3}}{\frac{1}{1 \cdot 10^3} + \frac{1}{2 \cdot 10^3} + \frac{1}{2 \cdot 10^3} + \frac{1}{5 \cdot 10^3}} = \underline{\underline{1{,}05V}}$$

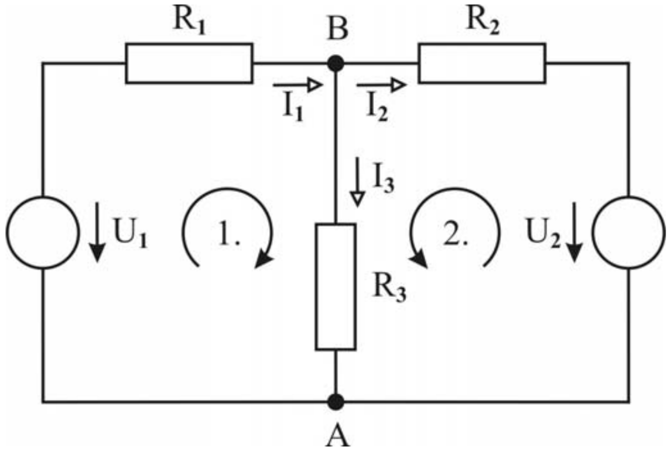
Z výsledku je patrno značné snížení výstupního napětí při zatížení. Bude vhodnější volit menší hodnoty odporů ve sčítacím obvodu.

5. TÝDEN

Příklad 5.1

Na obr. 5.1 je nakreslen obvod se dvěma zdroji napětí U_1 a U_2. Vypočtěte napětí U_{AB} mezi body A a B a proudy I_1, I_2 a I_3 jdoucí jednotlivými odpory R_1, R_2 a R_3. Použijte:

a) metodu Kirchhoffových zákonů
b) metodu smyčkových proudů
c) metodu uzlových napětí
d) metodu superpozice
e) Theveninův teorém



Obr. 5.1

Dáno: $U_1 = 10\ V$; $U_2 = 20\ V$;
$R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 20\ \Omega$;

Určit: I_1 ; I_2 ; I_3 ; U_{AB}

Řešení:

a) Metodou Kirchhoffových zákonů

Pro zvolené proudy v uzlu B platí první Kirchhoffův zákon $I_1 - I_2 - I_3 = 0$
Pro zvolený oběh smyček platí podle druhého Kirchhoffova zákona

1. smyčka $R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_1 = 0$ 2. smyčka $-R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_2 = 0$

Po úpravě a dosazení

$$\begin{aligned} I_1 \quad -I_2 \quad -I_3 &= 0 \\ 10I_1 \quad +20I_3 &= 10 \\ -10I_2 \quad +20I_3 &= 200 \end{aligned}$$

Determinant soustavy
$$D_S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 10 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & 20 \end{vmatrix} = 500$$

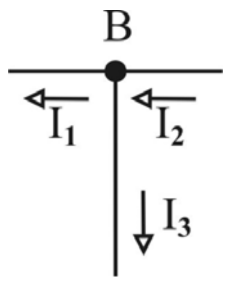
Determinant pro I_1
$$D_{I_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 10 & 0 & 20 \\ 20 & -10 & 20 \end{vmatrix} = -100 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{D_{I_1}}{D_S} = \frac{-100}{500} = \underline{\underline{-0,2A}}$$

Determinant pro I_2
$$D_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 10 & 10 & 20 \\ 0 & 20 & 20 \end{vmatrix} = -400 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{D_{I_2}}{D_S} = \frac{-400}{500} = \underline{\underline{-0,8A}}$$

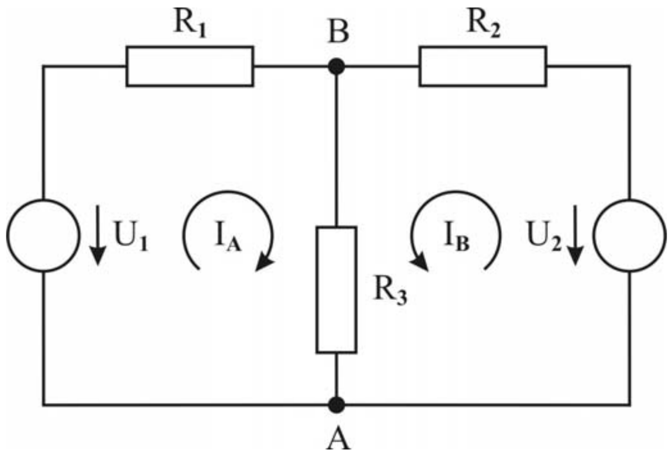
Determinant pro I_3
$$D_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 20 \end{vmatrix} = 300 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{D_{I_3}}{D_S} = \frac{300}{500} = \underline{\underline{0,6A}}$$

Proud je kladný, směr I_3 je tedy správný. Napětí mezi A a B je dáno Ohmovým zákonem.

$U_{AB} = R_3 \cdot I_3 = 20 \cdot 0,6 = \underline{\underline{12V}}$ Bod A je záporný a bod B je kladný



Obr. 5.2



Správné směry proudů jsou na obr. 5.2

Obr. 5.3

Řešení:

b) metodou smyčkových proudů

Označení smyčkových proudů je nakresleno na obr. 5.3. Směr proudů I_A a I_B ve smyčkách je volen souhlasný se směrem oběhu v předchozím řešení.

Pro smyčkový proud I_A můžeme psát $R_1 I_A + R_3 \left(I_A + I_B \right) - U_1 = 0$

Pro smyčkový proud I_B platí $R_2 I_B + R_3 \left(I_A + I_B \right) - U_2 = 0$

po úpravě a dosazení

$$30 I_A + 20 I_B = 10$$
$$20 I_A + 30 I_B = 20$$

Při řešení metody smyčkových proudů nám stačí dvě rovnice, jejichž řešením jsou proudy I_A, I_B. Řešíme opět pomocí determinantů.

Determinant soustavy $D_S = \begin{vmatrix} 30 & 20 \\ 20 & 30 \end{vmatrix} = 500$

Determinant pro I_A $D_{I_A} = \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 30 \end{vmatrix} = -100 \quad \Rightarrow \quad I_A = \dfrac{-100}{500} = -0,2A$

Determinant pro I_B $D_{I_B} = \begin{vmatrix} 30 & 10 \\ 20 & 20 \end{vmatrix} = 400 \quad \Rightarrow \quad I_B = \dfrac{400}{500} = 0,8A$

Napětí mezi body A a B je dáno $\mathrm{U}_{AB} = R_3 \cdot \left(I_A + I_B \right) = 20 \cdot \left(-0,2 + 0,8 \right) = \underline{\underline{12V}}$

Proudy odpory $I_1 = I_A = \underline{\underline{-0,2A}}, \; I_2 = -I_B = \underline{\underline{-0,8A}}, \; I_3 = I_A + I_B = -0,2 + 0,8 = \underline{\underline{0,6A}}$

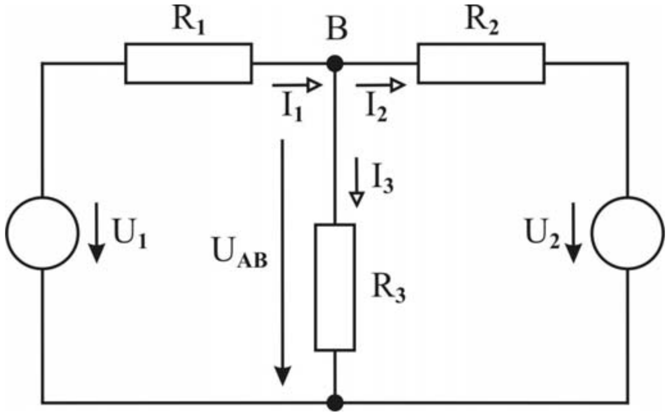
Řešení:

c) metodou uzlových napětí (viz. obr. 5.4)

V tomto případě nám stačí jedna rovnice. Pro uzel B platí

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\frac{U_1 - U_{AB}}{R_1} - \frac{U_{AB} - U_2}{R_2} - \frac{U_{AB}}{R_3} = 0$$



Obr. 5.4

Z této rovnice vypočteme U_{AB}

$$U_{AB} = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{10}{10} + \frac{20}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}} = \underline{\underline{12V}}$$

Proudy jednotlivými odpory vypočteme z druhého Kirchhoffova zákona

$$U_1 - U_{AB} - R_1 I_1 = 0 \qquad I_1 = \frac{U_1 - U_{AB}}{R_1} = \frac{10 - 12}{10} = \underline{\underline{-0,2A}}$$

$$U_2 - U_{AB} + R_2 I_2 = 0 \qquad I_2 = -\frac{U_2 - U_{AB}}{R_2} = -\frac{20 - 12}{10} = \underline{\underline{-0,8A}}$$

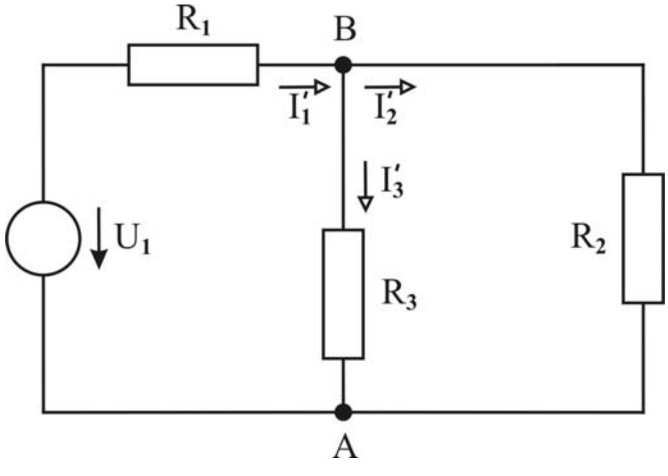
$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{12}{20} = \underline{\underline{0,6A}}$$

Řešení:

d) metoda superpozice

Při řešení postupujeme tak, jako by v obvodu byl pouze vždy jeden zdroj (ostatní zdroje napětí jsou zkratována a zdroje proudu rozpojeny) a proudy vyvolané jednotlivými zdroji se sčítají. Nejprve budeme uvažovat zdroj U_1. Schéma nakreslené na obr. 5.1 se zjednoduší na schéma nakreslené na obr. 5.5.

Abychom určili I_1' vypočteme celkový odpor R_C' zapojený na zdroj U_1.



Obr. 5.5

$$R_C^{/} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 10 + \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = \underline{\underline{16.\bar{6}\Omega}}$$

Proud $I_1^{/} = \frac{U_1}{R_C^{/}} = \frac{10}{16,\bar{6}} = 0,6A$

Proud $I_2^{/}$ a $I_3^{/}$ se rozdělí v nepřímém poměru odporů R_2 a R_3

$$\frac{I_3^{/}}{I_2^{/}} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{10}{20}$$

a platí $I_1^{/} = I_2^{/} + I_3^{/} = 0,6A$

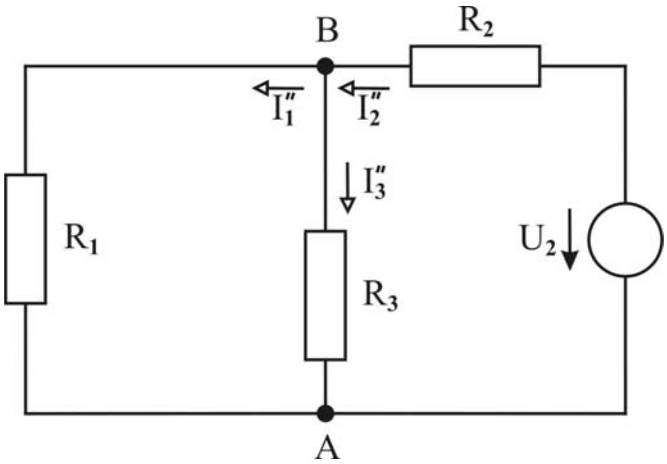
Z těchto dvou rovnic vypočteme $I_3^{/} = 0,2A$ a $I_2^{/} = 0,4A$

Nyní budeme uvažovat zdroj U_2 (viz obr. 5.6)

Abychom určili proud $I_2^{//}$, vypočteme celkový odpor $R_C^{//}$ připojený na zdroj U_2.

$$R_C^{//} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 10 + \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = 16,6\Omega$$

$$I_2^{//} = \frac{U_2}{R_C^{//}} = \frac{20}{16,6} = 1,2A$$



Obr. 5.6

Proudy $I_1^{//}$ a $I_3^{//}$ se rozdělí v nepřímém poměru odporů

$$\frac{I_3^{//}}{I_1^{//}} = \frac{R_1}{R_3} = \frac{10}{20} \qquad \text{a platí} \qquad I_2^{//} = I_1^{//} + I_3^{//} = 1,2A$$

Řešením těchto dvou rovnic dostaneme $I_3^{//} = 0,4A$ a $I_1^{//} = 0,8A$.

Proud tekoucí odporem R_3 je $I_3 = I_3^{/} + I_3^{//} = 0,2 + 0,4 = \underline{\underline{0,6A}}$

a napětí U_{AB} $U_{AB} = R_3 \cdot I_3 = 20 \cdot 0,6 = \underline{\underline{12V}}$

proud I_1 $I_1 = I_1^{/} - I_1^{//} = 0,6 - 0,8 = \underline{\underline{-0,2A}}$

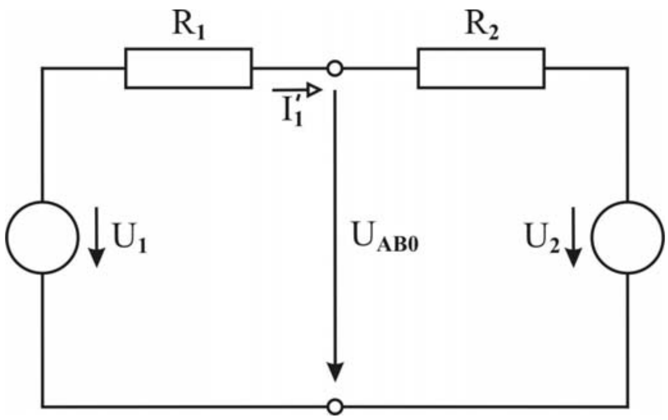
proud I_2 $I_2 = I_2^{/} - I_2^{//} = 0,4 - 1,2 = \underline{\underline{-0,8A}}$

Výsledky jsou opět shodné.

Řešení:

e) metoda Theveninova teorému

Při řešení Theveninovým teorémem budeme považovat odpor R_3 za zátěž připojenou na svorky A a B. Nalezneme nejprve napětí U_{AB0}, které by bylo na svorkách A a B v nezatíženém stavu (viz obr. 5.7).



Obr. 5.7

Podle obr. 5.7 můžeme psát rovnici

$$R_1 \cdot I' + R_2 \cdot I' + U_2 - U_1 = 0$$

Z této rovnice vypočteme I

$$I' = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} = \frac{10-20}{10+10} = -0,5A$$

Opět podle obr. 5.7 můžeme psát

$$R_1 \cdot I' + U_{AB0} - U_1 = 0 \qquad \text{nebo} \qquad R_2 \cdot I' - U_{AB0} + U_2 = 0$$

Vypočteme U_{AB0}

$$U_{AB0} = U_1 - R_1 \cdot I' = 10 - 10(-0,5) = 15V$$

nebo z druhé rovnice

$$U_{AB0} = U_2 - R_2 \cdot I' = 20 + 10(-0,5) = 15V$$

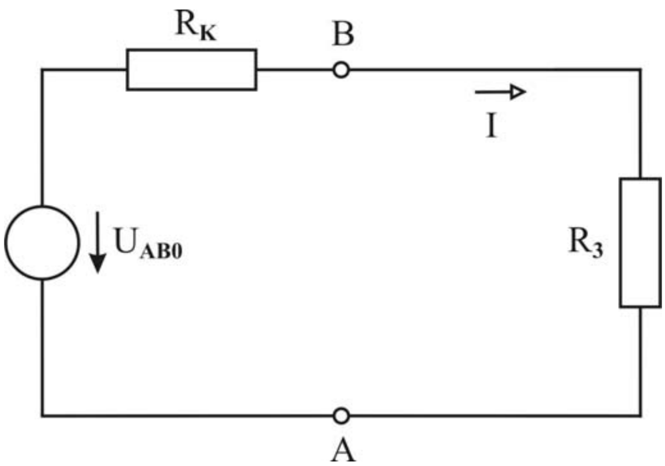
Náhradní odpor R_K, který se jeví na svorkách AB při zkratovaných zdrojích napětí

$$R_K = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 10}{10+10} = 5\Omega$$

Můžeme tedy nakreslit náhradní obvod viz obr. 5.8.

Proud tekoucí do zátěže R_3 je

$$I = \frac{U_{AB0}}{R_K + R_3} = \frac{15}{25} = 0,6A$$



Obr. 5.8

Na odporu R_K bude úbytek napětí ΔU

$$\Delta U = R_K \cdot I = 5 \cdot 0,6 = 3V$$

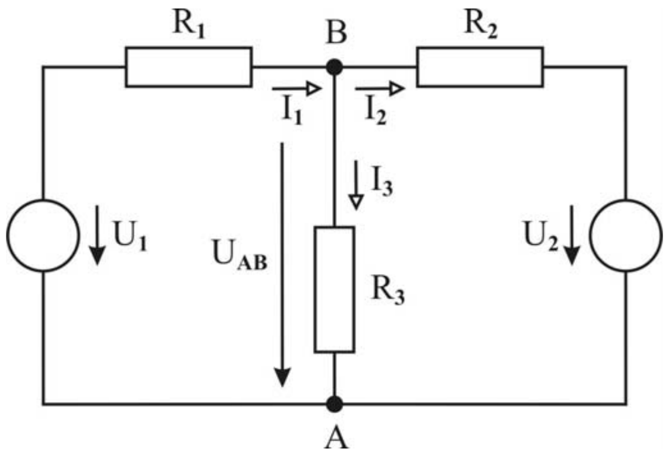
$$U_{AB} = U_{AB0} - \Delta U = 15 - 3 = \underline{\underline{12V}}$$

Proud jednotlivými odpory vypočteme (viz obr. 5.9) z druhého Kirchhoffova zákona

$$R_1 I_1 + U_{AB} - U_1 = 0$$

Z této rovnice vypočteme I_1

$$I_1 = \frac{U_1 - U_{AB}}{R_1} = \frac{10-12}{10} = \underline{\underline{-0,2A}}$$



Obr. 5.9

Pro druhou smyčku platí

$$R_2 I_2 - U_{AB} + U_2 = 0$$

Z této rovnice vypočteme I_2 a I_3

$$I_2 = \frac{U_{AB} - U_2}{R_2} = \frac{12-20}{10} = \underline{\underline{-0,8A}}$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{12}{20} = \underline{\underline{0,6A}}$$

Z uvedených výpočtů je vidět, že obvod lze řešit libovolnou metodou, avšak každá metoda nevede k cíli stejně rychle.

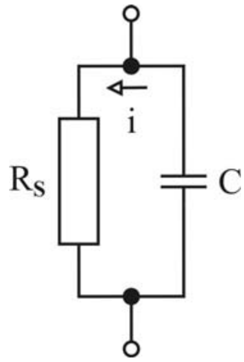
6. TÝDEN

Příklad 6.1

Určete svodový odpor R_S kondenzátoru s kapacitou C, jestliže na něm bylo elektrostatickým voltmetrem (vnitřní odpor voltmetru můžeme považovat za nekonečně velký) změřeno napětí U_1 a po uplynutí T minut pokleslo napětí na hodnotu U_2.

Dáno: $C = 10\mu F$; $U_1 = 15\ V$; $U_2 = 10\ V$; $T = 5$ minut

Určit: R_S



Obr. 6.1

Řešení:

Reálný kondenzátor se svodovým odporem R_S můžeme nahradit ideálním kondenzátorem s kapacitou C a paralelně připojeným odporem R_S (viz. obr. 6.1)

Pro obvod na obr. 6.1 platí rovnice $R_S \cdot i + u_C = 0$

kde u_C je okamžitá hodnota napětí na kondenzátoru.

Pro proud obvodem platí

$i = i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$ a po dosazení dostaneme diferenciální rovnici $R_S C\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$

Řešíme separací proměnných $$\frac{-R_S \cdot C}{u_C} \cdot du_C = dt$$

Řešení diferenciální rovnice vyjde ve tvaru $u_C = K \cdot e^{-\frac{t}{R_S C}} = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ kde $\tau = R_S \cdot C$ je časová konstanta.

Konstantu vypočteme z počátečních podmínek pro čas $t = 0$ (tj. v čase, kdy na kondenzátoru bylo změřeno napětí U_1) je

$U_C = U_1$ a můžeme psát $U_c = U_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

v čase $t = T$ je $U_C = U_2$ a platí $U_2 = U_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Z této rovnice vypočteme R_S.

$$\frac{T}{\tau} = -\ln\frac{U_2}{U_1} = \ln\frac{U_1}{U_2} \Rightarrow \tau = \frac{T}{\ln\frac{U_1}{U_2}} \Rightarrow R_S = \frac{T}{C \cdot 2{,}3\log\frac{U_1}{U_2}}$$

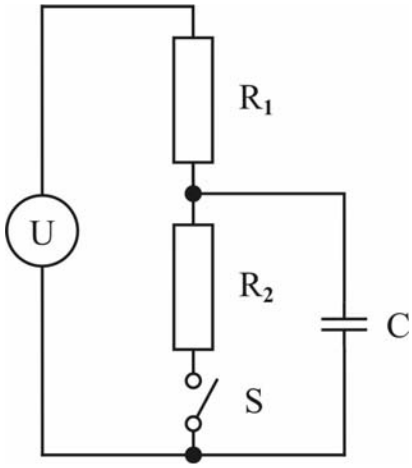
a po dosazení $$R_S = \frac{5 \cdot 60}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}3\log\frac{15}{10}} = \underline{\underline{74 M\Omega}}$$

Příklad 6.2

Kondenzátor s kapacitou C je připojen na dělič napětí tvořený odpory R_1 a R_2, které jsou připojeny přes spínač S na stejnosměrné napětí U. V daném časovém okamžiku se spínač S rozepne. Určete časový průběh napětí u_C na kondenzátoru a časovou konstantu τ .

Dáno: $U = 12\ V$; $R_1 = 2\ k\Omega$; $R_2 = 1\ k\Omega$; $C = 1\mu F$

Určit: $u_C = f(t)$; τ



Obr. 6.2

Řešení:

Při sepnutém spínači S je v ustáleném stavu na kondenzátoru napětí

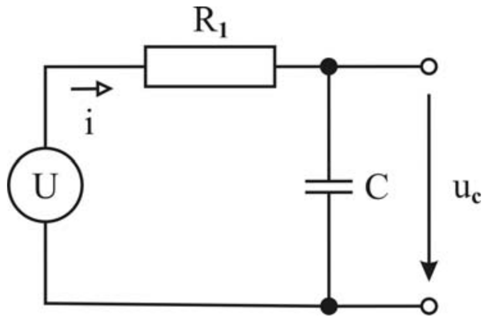
$$u_C = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Toto napětí je na kondenzátoru na počátku přechodového děje v čase t = 0.

$$u_C(0) = u\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Po rozepnutí spínače S se kondenzátor nabije z napětí U přes odpor R_1 (viz.obr. 6.3). Pro obvod na obr. 6.3 platí diferenciální rovnice

$$R_1 \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = U$$



Obr. 6.3

Rovnici řešíme separací proměnných

$$R_1 \cdot C \cdot \frac{1}{U - u_C} \cdot du_C = dt$$

Řešení dostaneme ve tvaru

$$e^{-\frac{t}{R_1 C}} = K(U - u_C)$$

v čase t = 0 je $u_C = u_C(0) = U\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ po dosazení dostaneme $K = \dfrac{1}{U - U\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}}$

po dosazení konstanty dostaneme řešení $u_C = f(t)$

$$\underline{\underline{u_C = U(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}) + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}}}}$$

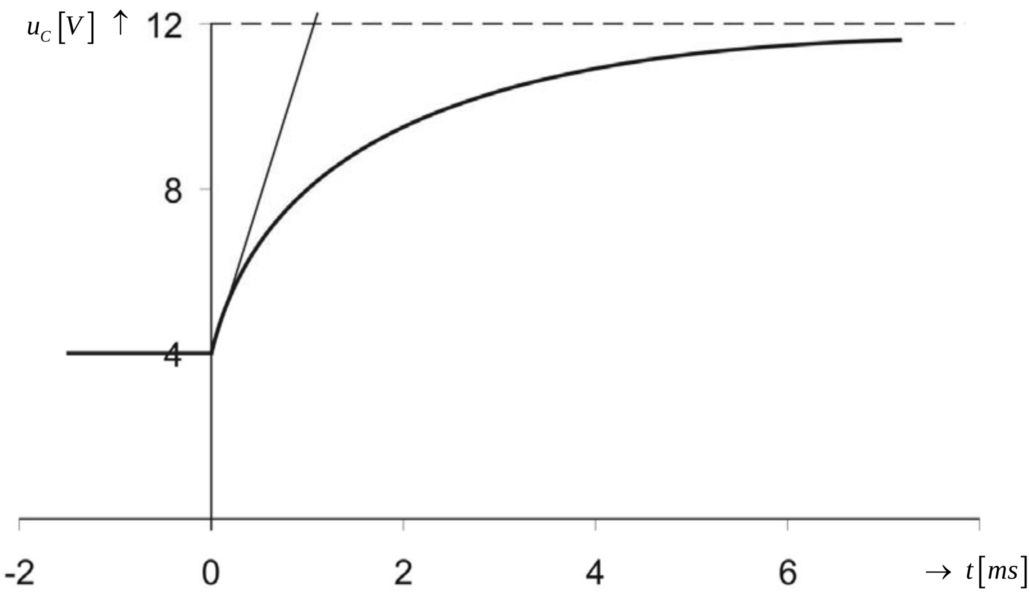
Na počátku přechodového děje (t = 0) je napětí na kondenzátoru

$$u_C = U\frac{R_2}{R_1+R_2} = 12\frac{1000}{2000+1000} = 4V$$

v čase $t = \infty$ je $u_C = U = 12V$

Časová konstanta τ $\tau = R_1 \cdot C = 2\cdot 10^3 \cdot 1\cdot 10^{-6} = \underline{\underline{2ms}}$

Průběh napětí u_C je zakreslen na obr. 6.4

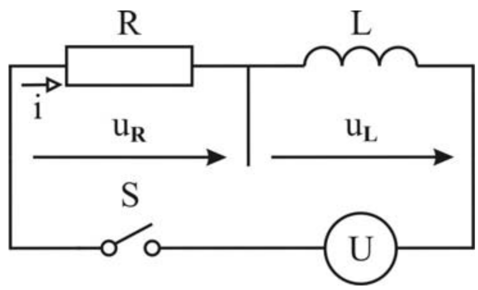


Obr. 6.4

Příklad 6.3

Určete časový průběh proudu i tekoucího sériovým obvodem s odporem R a indukčností L při připojení stejnosměrného napětí U. Určete časovou konstantu obvodu τ a časový průběh napětí na odporu u_R a na indukčnosti u_L.

Dáno: $U = 24\ V$; $R = 20\ \Omega$; $L = 1{,}2H$
Určit: $i = f(t)$; $u_R = f_1(t)$; $u_L = f_2(t)$



Obr. 6.5

Řešení:

Pro sériový obvod (dle obr. 6.5) můžeme napsat diferenciální rovnici

$R \cdot i + L\dfrac{di}{dt} = U$ po separaci $dt = L\dfrac{1}{U - R \cdot i}di$

Řešení této rovnice je $e^{-\frac{R}{L}t} = K(U - R \cdot i)$

Konstantu K určíme z počátečních podmínek

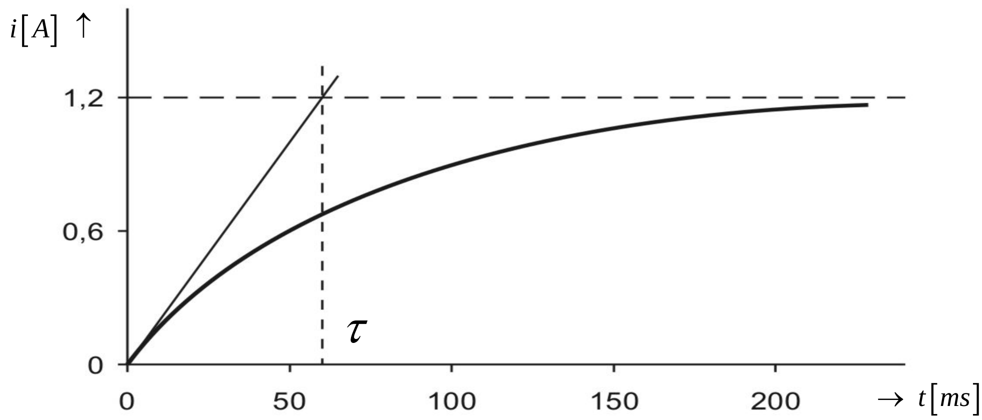
pro $t = 0$ je $i = 0$ pak $K \cdot U = 1 \Rightarrow K = \dfrac{1}{U}$ po dosazení $e^{-\frac{R}{L}t} = \dfrac{1}{U}(U - R \cdot i)$

z této rovnice určíme průběh i $\quad i = \dfrac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

Časová konstanta $\quad \tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{1{,}2}{20} = 0{,}06 = 60ms$

Proud i po dosazení konkrétních hodnot $\quad i = \dfrac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \dfrac{24}{20}(1 - e^{-\frac{t}{0{,}06}}) = 1{,}2(1 - e^{-\frac{t}{0{,}06}})$

Časový průběh je zakreslen na obr. 6.6.

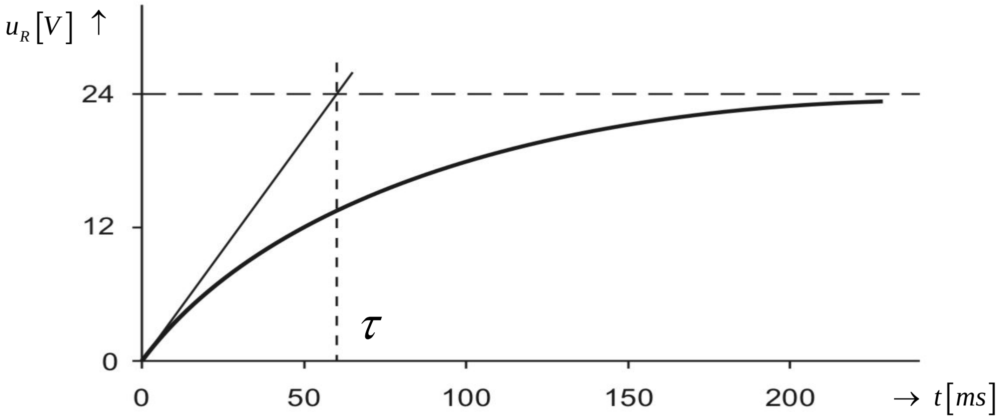


Obr. 6.6

Časový průběh napětí na odporu R vypočteme

$$u_R = R \cdot i = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 24(1 - e^{-\frac{t}{0,06}})$$

Časový průběh napětí na odporu R je vynesen na obr. 6.7.

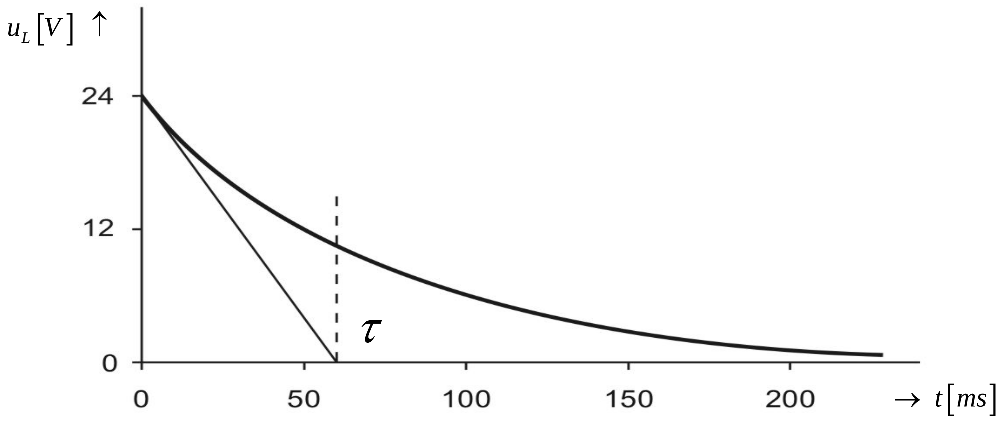


Obr. 6.7

Časový průběh napětí na indukčnosti L vypočteme

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{1}{\tau} = U - e^{-\frac{t}{\tau}} = 24 \cdot e^{-\frac{t}{0,06}}$$

Časový průběh napětí na indukčnosti L je vynesen na obr. 6.8.



Obr. 6.8

7. TÝDEN

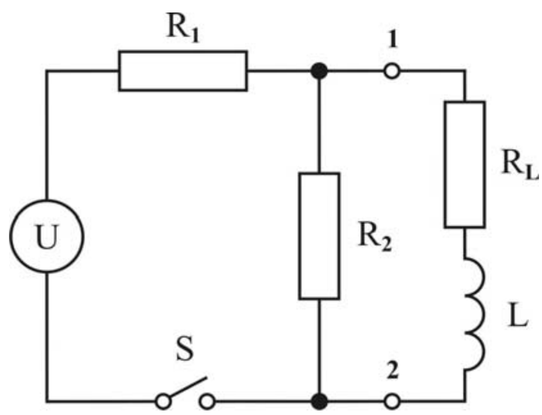
Příklad 7.1

Cívka relé má indukčnost L a ohmický odpor R_L. Cívka je zapojena do série s odporem R_1 a paralelně k odporu R_2. Celá kombinace (viz. obr. 7.1) je zapojena přes spínač S na stejnosměrné napětí U. Kotva relé se přitáhne při proudu i_1 a odpadne při proudu i_2. Za jakou dobu t_1 relé po zapnutí kotvu přitáhne a za jakou dobu t_2 po vypnutí kotva odpadne?

Dáno: $U = 24\ V$; $L= 6H$; $R_L = 200\,\Omega$; $R_1 = 600\,\Omega$; $R_2 = 300\,\Omega$; $i_1 = 18$ mA ; $i_2 = 6$ mA
Určit: t_1 ; t_2

Řešení:

Nejprve nahradíme obvod nalevo od svorek 1, 2 náhradním zdrojem napětí U_0 v sérii s náhradním odporem R_i. Náhradní napětí je dáno napětím na svorkách 1, 2 při odpojené zátěži (napětí naprázdno).



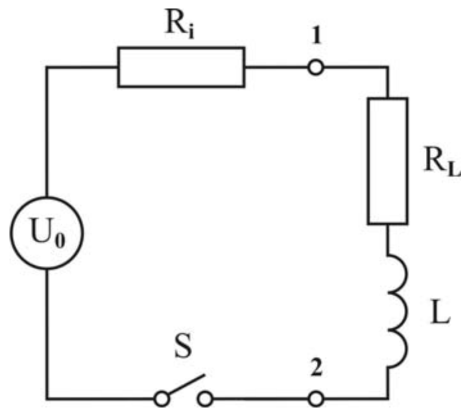
Obr. 7.1

$$U_0 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 24\frac{300}{600+300} = 8V$$

Náhradní odpor R_i vypočteme jako odpor mezi svorkami 1, 2 při zkratovaném zdroji U.

$$R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{300 \cdot 600}{300+600} = 200\Omega$$

Náhradní obvod je nakreslen na obr. 7.2



Obr. 7.2

Určíme velikost ustáleného proudu v čase $t = \infty$

$$I_\infty = \frac{U_0}{R_L + R_i} = \frac{8}{200+200} = 0,02 = 20mA$$

Časová konstanta obvodu τ_1 při připojení obvodu na napětí

$$\tau_1 = \frac{L}{R} = \frac{6}{200+200} = 0,015s$$

Průběh proudu v sériovém obvodu *RL* je dán vztahem (viz. předchozí příklad)

$$i = I_\infty (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$$

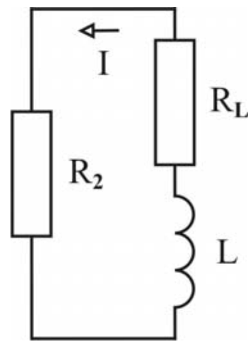
Proud i_1 v obvodu v čase t_1 $\qquad i_1 = I_\infty (1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}})$

z této rovnice vypočteme t_1 $\qquad t_1 = \tau_1 \ln \dfrac{I_\infty}{I_\infty - i_1} = 2{,}3\tau_1 \log \dfrac{I_\infty}{I_\infty - i_1}$

Po dosazení dostaneme čas, který uplyne od okamžiku připojení obvodu na napětí do okamžiku, kdy přitáhne relé.

$$t_1 = 2{,}3 \cdot 0{,}015 \cdot \log \frac{20 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3} - 18 \cdot 10^{-3}} = 0{,}0345 s = \underline{\underline{34{,}5 ms}}$$

Po vypnutí můžeme nakreslit náhradní obvod podle obr. 7.3. Indukčnost se chová jako zdroj napětí, který protlačí proud přes součet odporů $R_L + R_2 = R$



Obr. 7.3

Pro obvod na obr. 7.3 můžeme psát diferenciální rovnici

$$u_L + u_R = L \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0$$

řešení této diferenciální rovnice dostaneme ve tvaru $i = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

Konstantu K určíme z počátečních podmínek, pro t = 0 je $i = I_\infty \Rightarrow K = I_\infty$ po dosazení do předchozí rovnice

$$i = I_\infty \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Časová konstanta

$$\tau_2 = \frac{L}{R} = \frac{L}{R_L + R_2} = \frac{6}{200 + 300} = 0{,}012 s$$

proud i_2 v obvodu v čase t_2 je

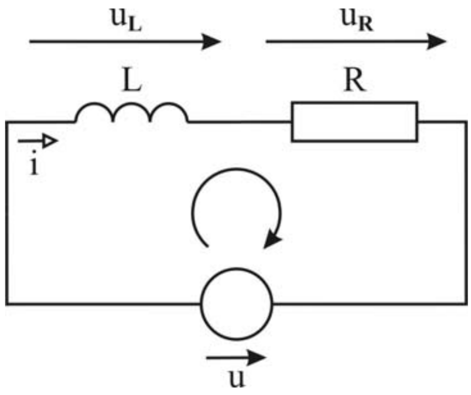
$$i_2 = I_\infty \cdot e^{-\frac{t_2}{\tau_2}}$$

Z této rovnice vypočteme čas, který uplyne od okamžiku odepnutí obvodu od napětí do okamžiku, kdy kotva relé odpadne

$$t_2 = 2{,}3 \cdot \tau_2 \cdot \log \frac{I_\infty}{i_2} = 2{,}3 \cdot 0{,}012 \cdot \log \frac{20 \cdot 10^{-3}}{6.10^{-3}} = 0{,}0148 s = \underline{\underline{14{,}8 ms}}$$

Příklad 7.2

Najděte časový průběh proudu ve schématu podle obr. 7.4, je-li v čase t = 0 připojen zdroj o hodnotě *U*. Počáteční podmínka $i(0) = 0$



Obr. 7.4

Řešení:

$-u_L + u_R - u = 0 \qquad u_L = -\frac{d\phi}{dt} \qquad \phi = L \cdot i$

$-u_L + u_R = u \qquad u_L = -\frac{d(L \cdot i)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$

$$L\frac{di}{dt} + R \cdot i = u$$

$L \cdot i' + R \cdot i = u$ p.p. $i'(0) = 0$

$$L \cdot (I_P - i(0)) + R \cdot I = \frac{u}{p}$$

$$I \cdot (L_P + R) = \frac{u}{p}$$

$$I = \frac{u}{p(L_P + R)} = \frac{\frac{u}{R}}{p(\frac{L}{R}p + 1)}$$

$$i(t) = L_{-1}\{I\} = \frac{u}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}}) = \underline{\underline{\frac{u}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}}$$

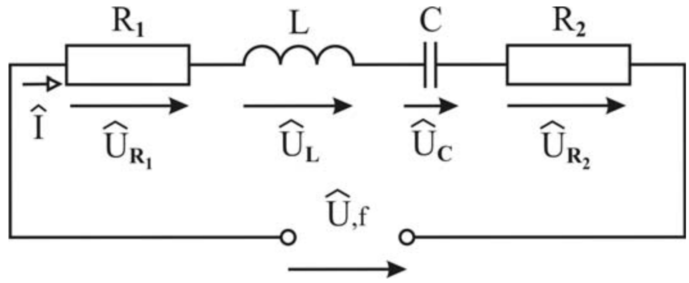
8. TÝDEN

Příklad 8.1

Sériově řazené prvky *R, L, C* jsou připojeny ke střídavému napětí *U* s frekvencí *f* podle obr. 8.1. Vypočtěte proud $\hat{I}$, úbytek napětí na jednotlivých prvcích $\widehat{U}_{R_1}$, $\widehat{U}_L$, $\widehat{U}_C$, $\widehat{U}_{R_2}$. Nakreslete fázový diagram.

Dáno: $U = 220\ V$; $f = 50$ Hz ; $R_1 = 100\,\Omega$; $L = 0{,}5$ H ; C= 15 μF ; $R_2 = 50\,\Omega$

Určit: $\hat{I}$, $\widehat{U}_{R_1}$, $\widehat{U}_L$, $\widehat{U}_C$, $\widehat{U}_{R_2}$



Obr. 8.1

Řešení:

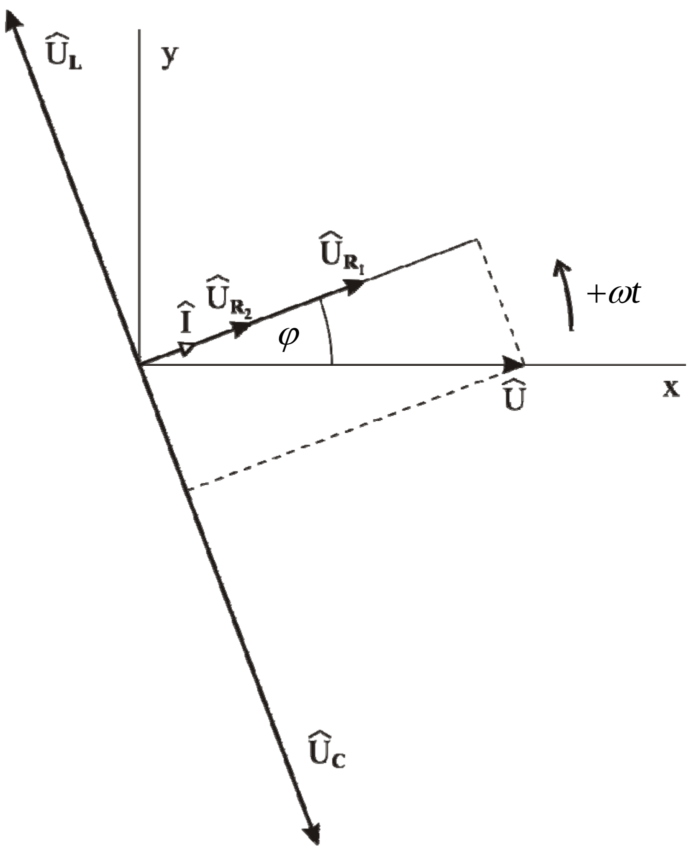
Celková impedance sériově zapojených prvků v obvodu

$$\widehat{Z} = R_1 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R_2 =$$

$$= 100 + j \cdot 314 \cdot 0{,}5 - j \cdot \frac{1}{314 \cdot 15 \cdot 10^{-6}} + 50 =$$

$$= (150 - j \cdot 55{,}3)\,\Omega$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314\ rad \cdot s^{-1}$$



Obr. 8.2

Proud tekoucí obvodem

$$\hat{I} = \frac{\widehat{U}}{\widehat{Z}} = \frac{220}{150 - j55{,}3} = \frac{220(150 + j55{,}3)}{150^2 + 55{,}3^2} =$$

$$= (1{,}29 + j0{,}48)\,A$$

$$\widehat{U} = U \cdot e^{j0^\circ} = 220V$$

Všechny fázorové diagramy kreslíme v předem zvolených měřítcích napětí a proudů.

$$I = \sqrt{1{,}29^2 + 0{,}48^2} = 1{,}38A$$

Fázor napětí $\widehat{U}$ jsme položili do reálné osy a převedeme fázor $\hat{I}$ do exponenciálního tvaru:

$$\varphi = arctg\frac{0{,}48}{1{,}29} = 20{,}4^\circ$$

$$\underline{\underline{\hat{I} = 1{,}38 \cdot e^{j20{,}4^\circ} A}}$$

Napětí na jednotlivých prvcích jsou

$$\widehat{U}_{R_1} = R_1 \cdot \hat{I} = 100 \cdot 1,38 \cdot e^{j20,4^\circ} = \underline{\underline{138 \cdot e^{j20,4^\circ} V}}$$

$$\widehat{U}_L = j\omega C \cdot \hat{I} = j314 \cdot 0,5 \cdot 1,38 \cdot e^{j20,4^\circ} = \underline{\underline{216,7 \cdot e^{j110,4^\circ} V}}$$

$$\widehat{U}_C = \frac{1}{j\omega L} \cdot \hat{I} = -j\frac{1}{314 \cdot 15 \cdot 10^{-6}} \cdot 1,38 \cdot e^{j20,4^\circ} = \underline{\underline{293 \cdot e^{-j69,6^\circ} V}}$$

$$\widehat{U}_{R_2} = R_2 \cdot \hat{I} = 50 \cdot 1,38 \cdot e^{j20,4^\circ} = \underline{\underline{69 \cdot e^{j20,4^\circ} V}}$$

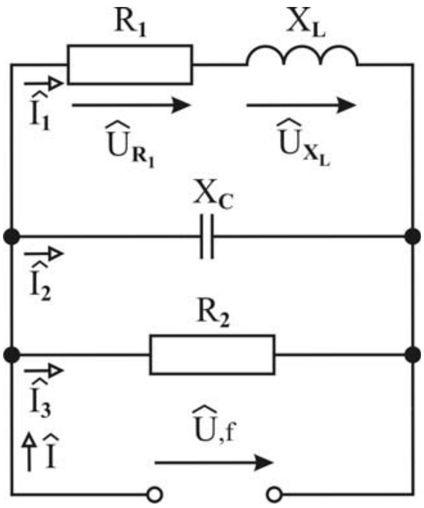
Fázový diagram je nakreslen na obr. 8.2.

Příklad 8.2

Obvod dle obr. 8.3 je napájen střídavým napětím U s frekvencí f. Vypočtěte celkový proud $\hat{I}$, proudy $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3$ v jednotlivých paralelních větvích a úbytky napětí na jednotlivých prvcích R_1 a X_L $\left(\widehat{U}_{R_1}, \widehat{U}_{X_L}\right)$**.** Nakreslete fázový diagram

Dáno: $U = 220\ V$; $X_C = 318,5\ \Omega$; $R_1 = 50\,\Omega$; $X_L = 157\ \Omega$; $R_2 = 150\,\Omega$

Určit: $\hat{I}, \widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3, \widehat{U}_{R_1}, \widehat{U}_{X_L}$



Obr. 8.3

Řešení:

Fázor napětí $\widehat{U}$ položíme do reálné osy a vypočteme proudy jednotlivými větvemi:

$$\widehat{U} = U \cdot e^{j0^\circ} = 220V\ (v\ ose\ x)$$

$$\widehat{I}_1 = \frac{\widehat{U}}{R_1 + jX_L} = \frac{220}{50 + j157} = \frac{220(50 - j157)}{50^2 + 157^2} = \left(0,4 - j1,27\right)A$$

$$\left|\widehat{I}_1\right| = \sqrt{0,4^2 + 1,27^2} = 1,33A \qquad \varphi_1 = arctg\frac{-1,27}{0,4} = -72,5^\circ$$

$$\widehat{I}_1 = 1,33 \cdot e^{-j72,5^\circ} A$$

$$\widehat{I}_2 = \frac{\widehat{U}}{-jX_C} = j\frac{220}{318,5} = j0,69 = \underline{\underline{0,69 \cdot e^{j90^\circ} A}}$$

$$\widehat{I}_3 = \frac{\widehat{U}}{R_2} = \frac{220}{150} = \underline{\underline{1,47A}}$$

Celkový proud je dán fázovým součtem jednotlivých proudů

$$\widehat{I} = \widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 + \widehat{I}_3$$

$$\widehat{I} = 1,33(\cos 72,5^\circ - j\sin 72,5^\circ) + j0,69 + 1,47 = 0,4 - j1,27 + j0,69 + 1,47 = (1,87 - j0,58)A$$

$$I = \sqrt{1,87^2 + 0,58^2} = 1,96A \qquad \varphi = arctg\frac{-0,58}{1,87} = -17,2^\circ$$

$$\widehat{I} = 1,96 \cdot e^{-j17,2^\circ} A$$

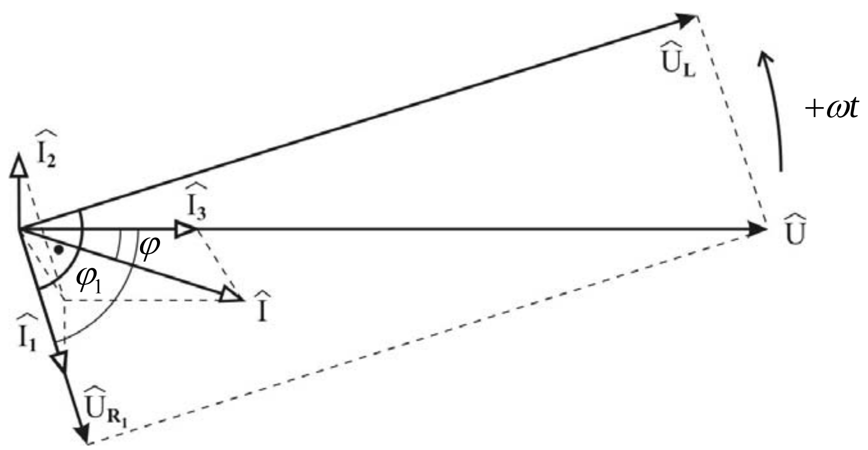
Proud $\widehat{I}$ můžeme také spočítat z Ohmova zákona pomocí výsledné impedance $\widehat{Z}$ obvodu.

$$\frac{1}{\widehat{Z}}=\frac{1}{R_1+jX_L}+\frac{1}{-jX_C}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{50+j157}+j\frac{1}{318,5}+\frac{1}{150}=$$

$$=0,0018-j0,0058+j0,00314+0,0066=0,0084-j0,0027$$

$$\widehat{I}=\widehat{U}\cdot\frac{1}{\widehat{Z}}=220\left(0,0084-j0,0027\right)=\left(1,87-j0,58\right)A$$
$$\widehat{U}_{R_1}=R_1\cdot\widehat{I}_1=50\cdot1,33\cdot e^{-j72,5^\circ}=\underline{\underline{66,5\cdot e^{-j72,5^\circ}A}}$$
$$\widehat{U}_{X_L}=jX_L\cdot\widehat{I}_1=j157\cdot1,33\cdot e^{-j72,5^\circ}=\underline{\underline{208,8\cdot e^{-j17,5^\circ}A}}$$

Fázový diagram z vypočtených hodnot je na obr. 8.4



Obr. 8.4

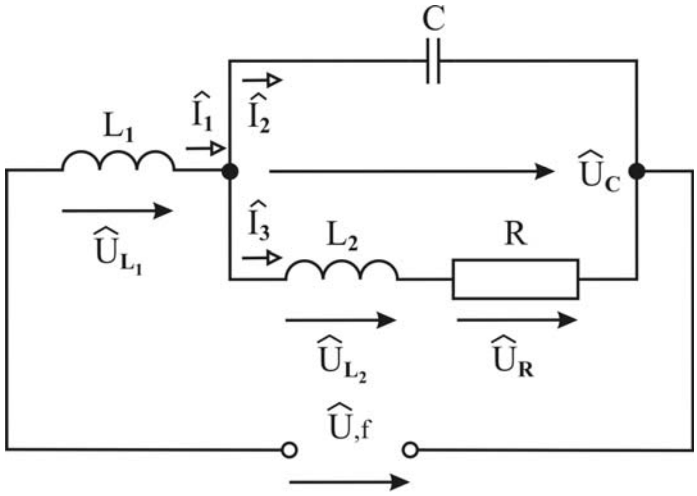
9. TÝDEN

Příklad 9.1

Daný obvod dle obr. 9.1 se sérioparalelním řazením impedancí je napájen střídavým napětím U s frekvencí *f*. Vypočtěte všechny proudy a napětí. Nakreslete fázový diagram. Řešte metodou Kirchoffových zákonů.

Dáno: $U = 220\ V$; $f = 50$ Hz ; $L_1 = 20\ mH$; $L_2 = 100\ mH$; $R = 10\,\Omega$; C= 15 μF

Určit: $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3, \widehat{U}_{L_1}, \widehat{U}_C, \widehat{U}_{L_2}, \widehat{U}_R$



Obr. 9.1

Řešení:

Dle 1. Kirchhoffova zákona platí $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2 + \widehat{I}_3$

Dle 2. Kirchhoffova zákona

$$\frac{1}{j\omega C}\cdot\widehat{I}_2 - R\widehat{I}_3 - j\omega L_2\widehat{I}_3 = 0$$

$$j\omega L_1\widehat{I}_1 + j\omega L_2\widehat{I}_3 + R\widehat{I}_3 - \widehat{U} = 0$$

Po dosazení získáme soustavu 3 rovnic pro výpočet $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3$

$\widehat{U} = U\cdot e^{j0^\circ} = 220$ … napětí U položíme do reálné osy

$$\begin{array}{rrrcl}
\widehat{I}_1 & -\widehat{I}_2 & -\widehat{I}_3 & = & 0 \\
 & -j\dfrac{1}{314\cdot 15\cdot 10^{-6}}\widehat{I}_2 & -(10+j314\cdot 0{,}1)\widehat{I}_3 & = & 0 \\
j314\cdot 0{,}02\widehat{I}_1 & & +(j314\cdot 0{,}1+10)\widehat{I}_3 & = & 220
\end{array}$$

a po úpravě

$$\begin{array}{rrrcl}
\widehat{I}_1 & -\widehat{I}_2 & -\widehat{I}_3 & = & 0 \\
 & -j212{,}3\widehat{I}_2 & -(10+j31{,}4)\widehat{I}_3 & = & 0 \\
j6{,}28\widehat{I}_1 & & +(10+j31{,}4)\widehat{I}_3 & = & 220
\end{array}$$

Řešením těchto rovnic dostaneme proudy ve složkovém tvaru a po úpravě v exponenciálním tvaru.

$$\widehat{I}_1 = 1{,}55 - j4{,}69 = \underline{\underline{4{,}94\cdot e^{-j71{,}7^\circ}A}}$$

$$\widehat{I}_2 = 0{,}06 + j0{,}9 = \underline{\underline{0{,}9\cdot e^{j87{,}0^\circ}A}}$$

$$\widehat{I}_3 = 1{,}49 - j5{,}6 = \underline{\underline{5{,}72\cdot e^{-j75{,}1^\circ}A}}$$

$$I_1 = \sqrt{1,55^2 + 4,69^2} = 4,94A \qquad \varphi_1 = arctg\frac{-4,69}{1,55} = -71,7°$$

$$I_2 = \sqrt{0,06^2 + 0,9^2} = 0,9A \qquad \varphi_2 = arctg\frac{0,9}{0,06} = 87°$$

$$I_3 = \sqrt{1,49^2 + 5,6^2} = 5,72A \qquad \varphi_3 = arctg\frac{-5,6}{1,49} = -75,1°$$

Napětí na jednotlivých prvcích:

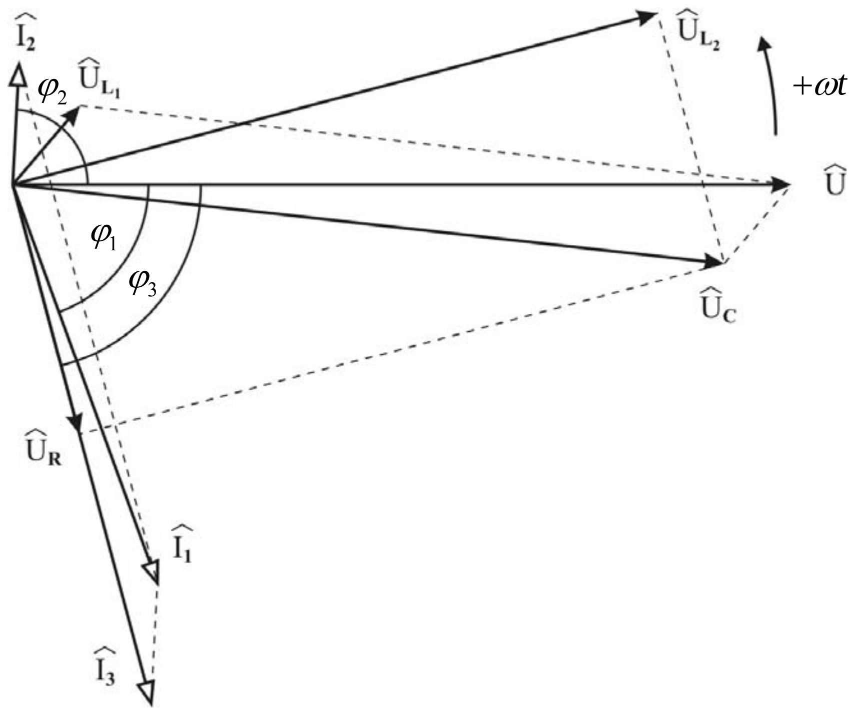
$$\widehat{U}_{L_1} = j\omega L_1 \cdot \widehat{I}_1 = j \cdot 314 \cdot 0,02 \cdot 4,94 \cdot e^{-j71,7°} = \underline{\underline{31,02 \cdot e^{j18,3°} V}}$$

$$\widehat{U}_C = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \widehat{I}_2 = -j\frac{1}{314 \cdot 15 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,91 \cdot e^{j87°} = \underline{\underline{191 \cdot e^{-j3°} V}}$$

$$\widehat{U}_{L_2} = j\omega L_2 \cdot \widehat{I}_3 = j \cdot 314 \cdot 0,1 \cdot 5,72 \cdot e^{-j75,1°} = \underline{\underline{181,8 \cdot e^{j14,9°} V}}$$

$$\widehat{U}_R = R \cdot \widehat{I}_3 = 10 \cdot 5,79 \cdot e^{-j75,1°} = \underline{\underline{57,9 \cdot e^{-j75,1°} V}}$$

Fázový diagram daného obvodu je na obr. 9.2



Obr. 9.2

Příklad 9.2

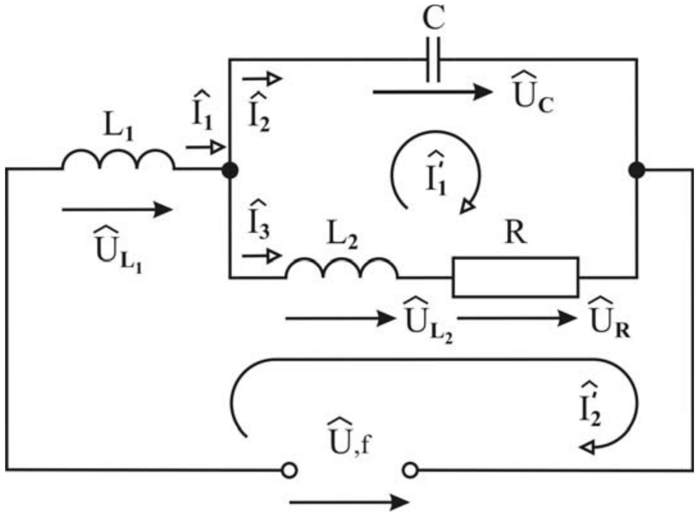
Obvod z příkladu 3 řešte metodou smyčkových proudů.

Dáno: $U = 220\ V$; $f = 50$ Hz ; $L_1 = 20\ mH$; $L_2 = 100\ mH$; $R = 10\,\Omega$; C= 15 μF

Určit: $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3$

Řešení:

Smyčkové proudy jsou vyznačeny na obr. 9.2



Obr. 9.3

Rovnice pro smyčkové proudy $\widehat{I}_1'$ a $\widehat{I}_2'$

$$\frac{1}{j\omega C}\cdot\widehat{I}_1' + R\left(\widehat{I}_1' - \widehat{I}_2'\right) +$$

$$+ j\omega L_2\left(\widehat{I}_1' - \widehat{I}_2'\right) = 0$$

$$j\omega L_1\widehat{I}_2' + j\omega L_2\left(\widehat{I}_2' - \widehat{I}_1'\right) + R\left(\widehat{I}_2' - \widehat{I}_1'\right) - \widehat{U} = 0$$

$\widehat{U} = U\cdot e^{j0^0} = 220$ jsme položili do reálné osy

$$\left(10 - j180{,}9\right)\widehat{I}_1' + \left(-10 - j31{,}4\right)\widehat{I}_2' = 0$$

$$\left(-10 - j31{,}4\right)\widehat{I}_1' + \left(10 + j37{,}7\right)\widehat{I}_2' = 220$$

Řešením těchto rovnic dostaneme proudy I_1' a I_2' ve složkovém tvaru a po převedení do exponenciálního tvaru jsou

$$\widehat{I}_1' = 0{,}91\cdot e^{j86{,}2°}A \qquad \widehat{I}_2' = 4{,}94\cdot e^{-j71{,}7°}A$$

Proudy jednotlivými větvemi jsou

$$\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2' = \underline{\underline{4{,}94\cdot e^{-j71{,}7°}A}} \qquad \widehat{I}_2 = \widehat{I}_1' = \underline{\underline{0{,}9\cdot e^{j87°}A}}$$

$$\widehat{I}_3 = \widehat{I}_2' - \widehat{I}_1' = 1{,}55 - j4{,}69 - 0{,}06 - j0{,}91 = \left(1{,}49 - j5{,}59\right)A$$

$$\widehat{I}_2' = 4{,}94\left(\cos 71{,}7° - j\sin 71{,}7°\right) = \left(1{,}55 - j4{,}69\right)A$$

$$\widehat{I}_1' = 0{,}9\left(\cos 87° + j\sin 87°\right) = 0{,}06 + j0{,}9A$$

$$I_3 = \sqrt{1{,}49^2 + 5{,}59^2} = 5{,}72A \qquad \varphi_3 = arctg\frac{5{,}59}{1{,}49} = 75{,}1°$$

$$\widehat{I}_3 = \underline{\underline{5{,}72\cdot e^{-j75{,}1°}A}}$$

Výpočet úbytků napětí $\widehat{U}_{L_1}, \widehat{U}_C, \widehat{U}_{L_2}, \widehat{U}_R$ je stejný jako v příkladu 3.

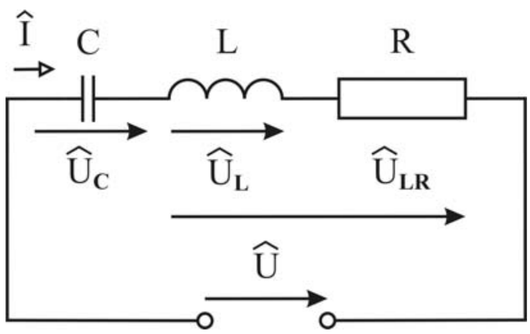
10. TÝDEN

Příklad 10.1

Kondenzátor s kapacitou C a cívka s vlastní indukčností L a ohmickým odporem R jsou zapojeny do série a připojeny na střídavé napětí U. Při jakém kmitočtu f_r (rezonanční kmitočet) je napětí U a proud v obvodu ve fázi (případ sériové rezonance)? Jaká bude pro tento případ výsledná impedance Z_r , proud v obvodu I_r a napětí na kondenzátoru U_C a na svorkách cívky U_{LR}? (Viz. obr. 10.1).

Dáno: C= 30 μF ; $L = 25\ H$; $R = 500\,\Omega$; $U = 220\ V$

Určit: $f_r, Z_r, I_r, U_C, U_{LR}$



Obr. 10.1

Řešení:

Pro případ sériové rezonance je $U_L = U_C$ (viz. fázový diagram na obr. 10.2).

Rezonanční frekvence je dána Thomsonovým vztahem

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{25\cdot 30\cdot 10^{-6}}} = \underline{\underline{5{,}81Hz}}$$

Impedance při rezonanci je rovna ohmickému odporu obvodu

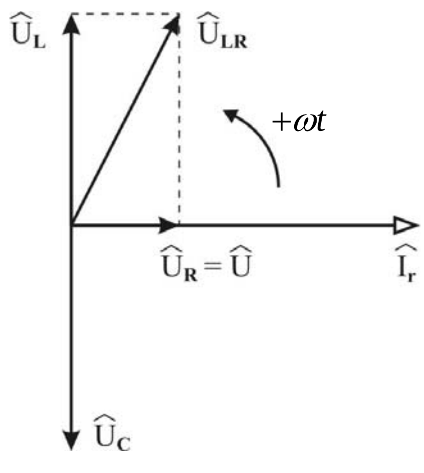
$$Z_r = R = \underline{\underline{500\Omega}}$$

$$I_r = \frac{U}{R} = \frac{220}{500} = \underline{\underline{0{,}44A}}$$

$$U_C = \frac{1}{\omega_r \cdot C}\cdot I_r = \frac{0{,}44}{36{,}5\cdot 30\cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{401{,}8V}}$$

$$\omega_r = 2\pi f_r = 36{,}5 rad\cdot s^{-1}$$

$$U_{LR} = \sqrt{R^2 + \omega_r^2 L^2}\cdot I_r = \sqrt{500^2 + \left(36{,}5\cdot 25\right)^2}\cdot 0{,}44 = \underline{\underline{457{,}8V}}$$



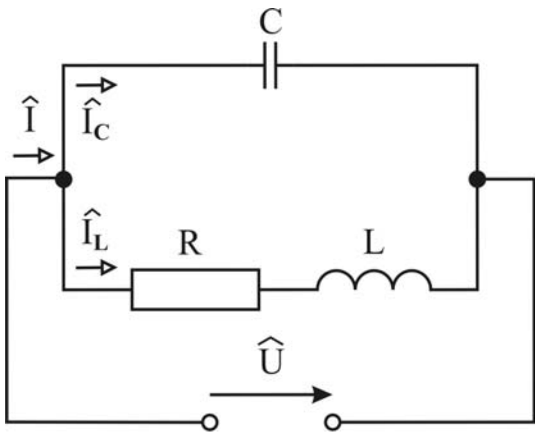
Obr. 10.2

Příklad 10.2

Kondenzátor s kapacitou C a cívka s odporem R a indukčností L jsou zapojeny paralelně a připojeny na střídavé napětí dle obr. 10.3. Při jakém kmitočtu f_r (rezonanční kmitočet) je napětí U a proud v obvodu I ve fázi (případ paralelní rezonance)? Jaká bude pro tento případ výsledná impedance Z, proud v obvodu I , proud v kondenzátoru I_C a proud v cívce I_L? Nakreslete fázový diagram odpovídající rezonanci.

Dáno: C= 8 μF ; $L = 1\ H$; $R = 50\,\Omega$; $U = 220V$

Určit: f_r, Z_r, I_r, I_C, I_L



Obr. 10.3

Řešení:

Fázový diagram, odpovídající obvodu na obr. 10.3, pro případ paralelní rezonance je na obr. 10.4 (opět napětí $\widehat{U}$ a proud $\widehat{I} = \widehat{I_r}$ jsou ve fázi).

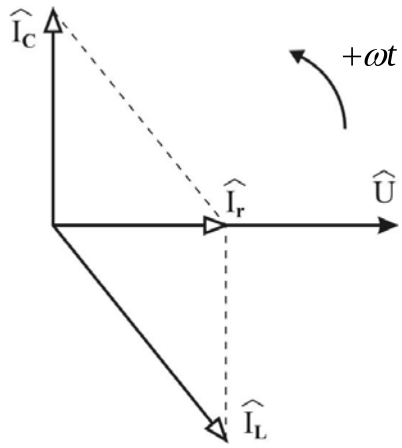
$\widehat{I} = \widehat{I_C} + \widehat{I_L} = \widehat{U} \cdot j\omega C + \dfrac{\widehat{U}}{R + j\omega L}$ a po úpravě

$$\widehat{I} = \widehat{U} \cdot \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + \widehat{U} j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

$\widehat{U} = U \cdot e^{j0°}$ … fázor napětí U položíme do reálné osy

$\hat{I} = I \cdot e^{j0°}$, musí být $\omega C - \dfrac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0$

(rezonance), z toho to vztahu vypočteme ω_r



Obr. 10.4

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} - \left(\frac{50}{1}\right)^2} = 350 rad \cdot s^{-1}$$

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{350}{2\pi} = \underline{\underline{55{,}7 Hz}}$$

Z reálné složky proudu $\widehat{I}$:

$$Z_r = \frac{R^2 + \omega_r^2 L^2}{R} = \frac{50^2 + 350^2 \cdot 1^2}{50} = \underline{\underline{2500\Omega}} \qquad I_r = \frac{U}{Z_r} = \frac{220}{2500} = \underline{\underline{0{,}088A}}$$

$$I_C = U \cdot \omega_r \cdot C = 220 \cdot 350 \cdot 8 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{0{,}616A}}$$

$$I_L = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega_r^2 L^2}} = \frac{220}{\sqrt{50^2 + 350^2 \cdot 1^2}} = \underline{\underline{0{,}622A}}$$

Příklad 10.3

Na trojfázovou symetrickou síť s nulovým vodičem 3x380/220V s kmitočtem f jsou připojeny spotřebiče podle obr. 10.5. Vypočtěte proudy v jednotlivých fázích (*U, V, W*) $\widehat{I_U}, \widehat{I_V}, \widehat{I_W}$ a proud v nulovém vodiči $\widehat{I_N}$. Nakreslete fázový diagram.

Dáno: $\widehat{U}_U = 220 \cdot e^{j0°} V$; $\widehat{U}_V = 220 \cdot e^{-j120°} V$; $\widehat{U}_W = 220 \cdot e^{j120°} V$; f= 50 Hz ; R = 100 Ω ; $L = 1\ H$; C= 20 μF

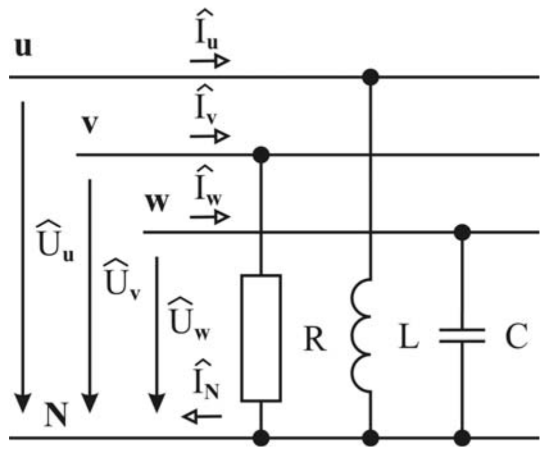
Určit: $\widehat{I_U}, \widehat{I_V}, \widehat{I_W}, \widehat{I_N}$

Řešení:

Proudy tekoucí jednotlivými fázemi

$$\widehat{I_U} = \frac{\widehat{U}_U}{j\omega L} = \frac{220 \cdot e^{j0^0}}{j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 1} = \underline{\underline{0,7 \cdot e^{-j90°} A}} = -j0,7A$$

$$\widehat{I_V} = \frac{\widehat{U}_V}{R} = \frac{220 \cdot e^{-j120^0}}{100} = \underline{\underline{2,2 \cdot e^{-j120°} A}} =$$
$$= 2,2\left(\cos 120° - j \sin 120°\right) = \left(-1,1 - j1,9\right) A$$



Obr. 10.5

$$\widehat{I_W} = \widehat{U}_W \cdot j\omega C = 220 \cdot e^{j120°} \cdot j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 20 \cdot 10^{-6} =$$
$$\underline{\underline{1,38 \cdot e^{j210°} A}} = 1,38\left(\cos 210° + j \sin 210°\right) =$$
$$= \left(-1,2 - j0,68\right) A$$

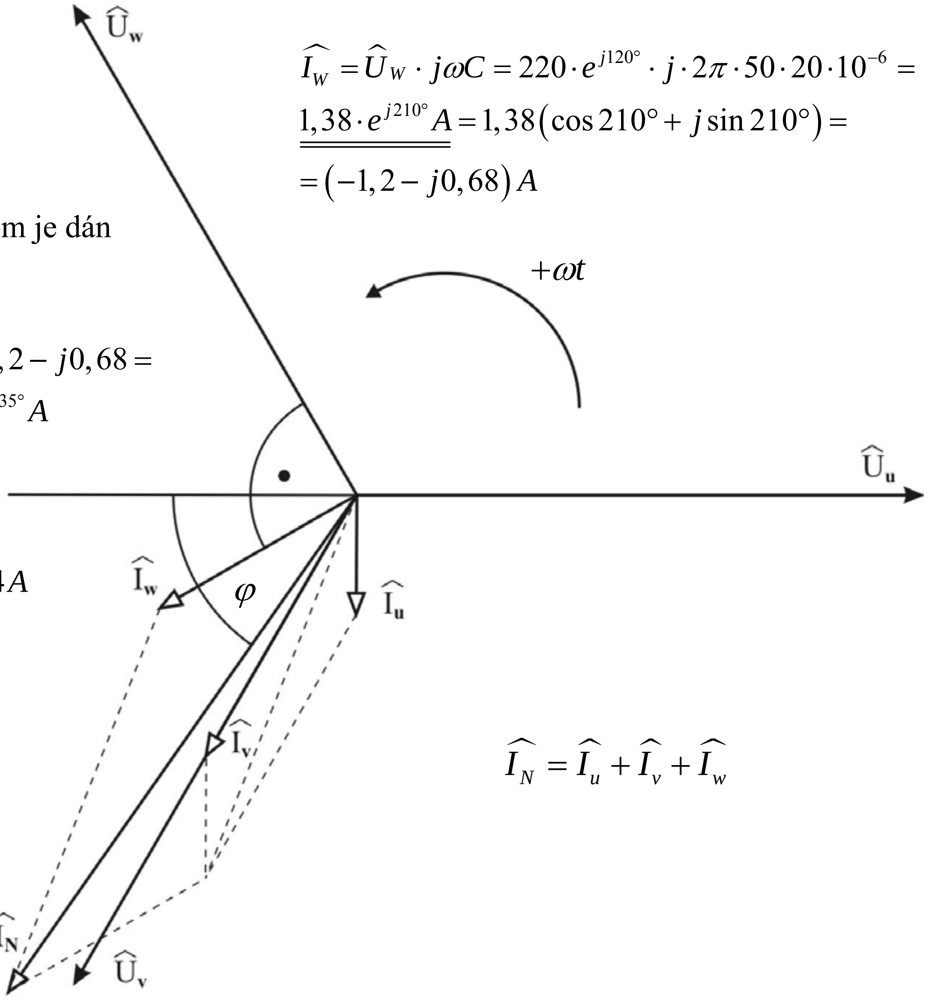
Proud nulovým vodičem je dán

$$\widehat{I_N} = \widehat{I_U} + \widehat{I_V} + \widehat{I_W} =$$
$$= -j0,7 - 1,1 - j1,9 - 1,2 - j0,68 =$$
$$= -2,3 - j3,28 = 4 \cdot e^{j235°} A$$

$$\widehat{I_N} = \sqrt{2,3^2 + 3,28^2} = 4A$$

$$\varphi = arctg\,\frac{3,28}{2,3} = 55°$$

Fázový diagram je nakreslen na obr. 10.6



Obr. 10.6

11. TÝDEN

Příklad 11.1

Je dán trojfázový obvod z příkladu 10.3. Jak se změní napětí na jednotlivých spotřebičích $\widehat{U}_R, \widehat{U}_L, \widehat{U}_C$ a proudy $\widehat{I_U}, \widehat{I_V}, \widehat{I_W}$, přeruší-li se nulový vodič? (viz. obr. 11.1)

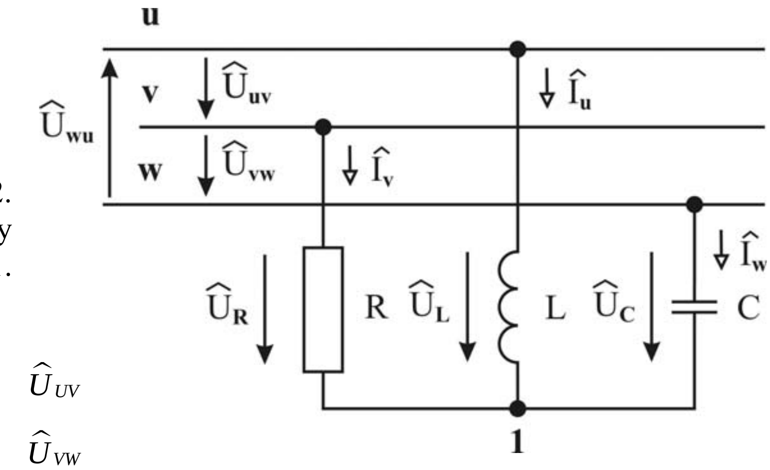
Dáno: $\widehat{U}_{UV} = 380 \cdot e^{j0°} V$; $\widehat{U}_{VW} = 380 \cdot e^{-j120°} V$; $\widehat{U}_{WU} = 380 \cdot e^{j120°} V$; C= 20 μF ; L = 1 H ; R = 100 Ω ; f = 50 Hz

Určit: $\widehat{I_U}, \widehat{I_V}, \widehat{I_W}, \widehat{U}_R, \widehat{U}_L, \widehat{U}_C$

Řešení:

Napíšeme rovnice dle 2. Kirchhoffova zákona pro smyčky U - V a V - W a rovnici dle 1. Kirchhoffova zákona pro uzel 1

$$\begin{aligned}
j\omega \widehat{I_U} \quad -R\widehat{I_V} \qquad\qquad &= \widehat{U}_{UV} \\
R\widehat{I_V} \quad -\frac{1}{j\omega C}\widehat{I_W} &= \widehat{U}_{VW} \\
\widehat{I_U} \quad +\widehat{I_V} \quad +\widehat{I_W} &= 0
\end{aligned}$$



Obr. 11.1

$$\begin{aligned}
j314\widehat{I_U} \quad -100\widehat{I_V} \qquad\qquad &= 380 && (1) \\
100\widehat{I_V} \quad +j159,2\widehat{I_W} &= 380 \cdot e^{-j120°} && (2) \\
\widehat{I_U} \quad +\widehat{I_V} \quad +\widehat{I_W} &= 0 && (3)
\end{aligned}$$

Řešíme soustavu 3 rovnic o neznámých $\widehat{I_U}, \widehat{I_V}, \widehat{I_W}$

$$\mathrm{Z}(1): \ \widehat{I_U} = \frac{380 + 100\widehat{I_V}}{j314}$$

$$\mathrm{Z}(2): \ \widehat{I_W} = \frac{380 \cdot e^{-j120°} - 100\widehat{I_V}}{j159,2}$$

Dosadíme do (3) a vypočteme $\widehat{I_V}$

$$\frac{380 + 100\widehat{I_V}}{j314} + \widehat{I_V} + \frac{380(\cos 120° - j\sin 120°) - 100\widehat{I_V}}{j159,2} = 0$$

$$-j1,21 - j0,318\widehat{I_V} + \widehat{I_V} + j1,193 - 2,067 + j0,628\widehat{I_V} = 0$$

$$\widehat{I_V} = \frac{2,067 + j0,017}{1 + j0,31} = \frac{2,067 + j0,017 - j0,64 + 0,0053}{1 + 0,096} = 2,07 - j0,62 = \underline{\underline{2,16 \cdot e^{-j16,7°} A}}$$

$$I_V = \sqrt{2,07^2 + 0,62^2} = 2,16A \qquad \varphi_V = arctg\frac{-0,62}{2,07} = -16,7°$$

Dosazením do vztahů pro $\widehat{I_U}$ a $\widehat{I_W}$ dostaneme

$$\widehat{I_U} = \frac{380 + 207 - j62}{j314} = -j1,87 - 0,197 = \underline{\underline{1,88 \cdot e^{j264°} A}}$$

$$I_U = \sqrt{1,87^2 + 0,197^2} = 1,88A \qquad \varphi_U = arctg\frac{-1,87}{-0,197} = 264°$$

$$\widehat{I_W} = j1,193 - 2,067 + j0,628(2,07 - j0,62) = -1,678 + j2,492 = 3 \cdot e^{j124°} A$$

$$\widehat{U}_R = R \cdot \widehat{I_V} = 100 \cdot 2,16 \cdot e^{-j16,7°} = \underline{\underline{216 \cdot e^{-j16,7°} V}}$$

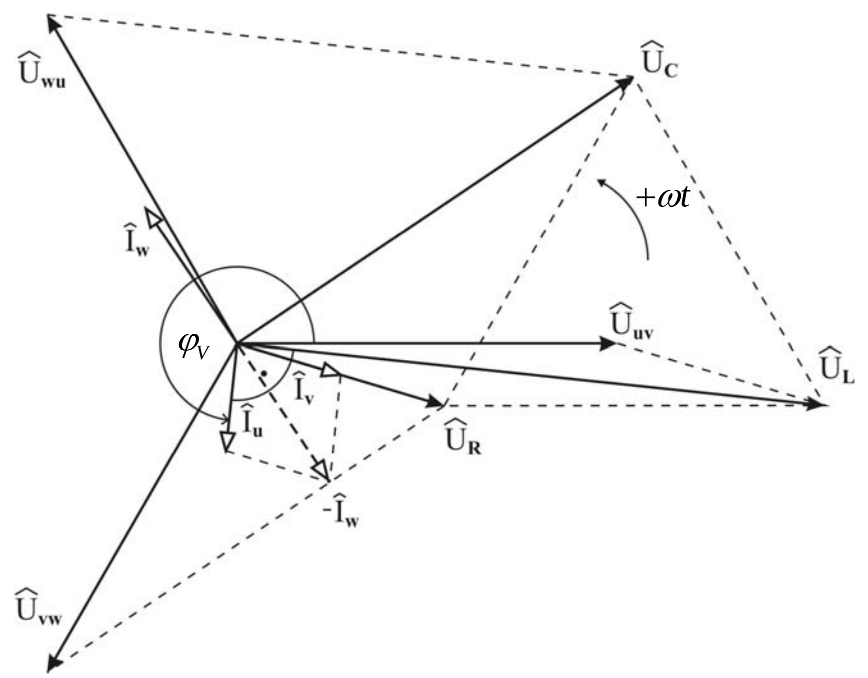
$$\widehat{U}_L = j\omega L \cdot \widehat{I_U} = j314 \cdot 1 \cdot 1,88 \cdot e^{j264°} = \underline{\underline{590,3 \cdot e^{j354°} V}}$$

$$\widehat{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \widehat{I_W} = -j\frac{1}{314 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \cdot 3 \cdot e^{j124°} = \underline{\underline{477,7 \cdot e^{j34°} V}}$$

Porovnejte velikost těchto vypočtených napětí s napětími, která jsou připojena na tytéž prvky v předchozím příkladě.

Výsledky můžeme zkontrolovat fázovým diagramem (obr. 11.2), nakresleným v měřítku. Musí platit (dle obr. 11.1):

$$\widehat{I_U} + \widehat{I_V} + \widehat{I_W} = 0$$
$$\widehat{U}_{UV} = \widehat{U}_L - \widehat{U}_R$$
$$\widehat{U}_{VW} = \widehat{U}_R - \widehat{U}_C$$
$$\widehat{U}_{WU} = \widehat{U}_C - \widehat{U}_L$$



Obr. 11.2

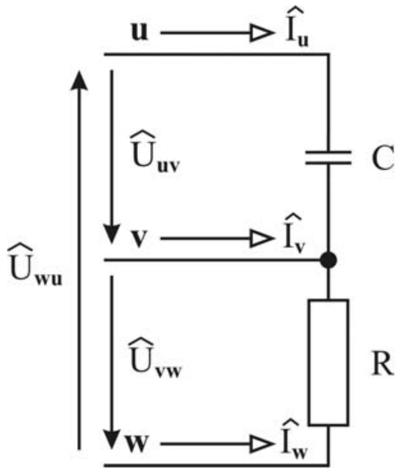
Příklad 11.2

Na trojfázovou symetrickou síť s kmitočtem f bez nulového vodiče jsou připojeny spotřebiče podle obr. 11.3. Vypočtěte proudy v jednotlivých fázích (U, V, W) $\widehat{I_U}, \widehat{I_V}, \widehat{I_W}$. Nakreslete fázový diagram.

Dáno: $\widehat{U}_{UV} = 380 \cdot e^{j0°} V$; $\widehat{U}_{VW} = 380 \cdot e^{-j120°} V$; $\widehat{U}_{WU} = 380 \cdot e^{j120°} V$; f = 50 Hz ; C= 8 μF ; $R = 50\,\Omega$

Určit: $\widehat{I_U}, \widehat{I_V}, \widehat{I_W}$

Řešení:



Obr. 11.3

Nejprve vypočteme proudy jdoucí jednotlivými fázemi

$$\widehat{I_U} = \widehat{U}_{UV} \cdot j\omega C = 380 \cdot j314 \cdot 8 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{0{,}95 \cdot e^{j90°}}} = j0{,}95A$$

$$\widehat{I_W} = -\frac{\widehat{U}_{VW}}{R} = -\frac{380 \cdot e^{-j120°}}{50} = \underline{\underline{7{,}6 \cdot e^{j60°}}} = (3{,}8 + j6{,}58)A$$

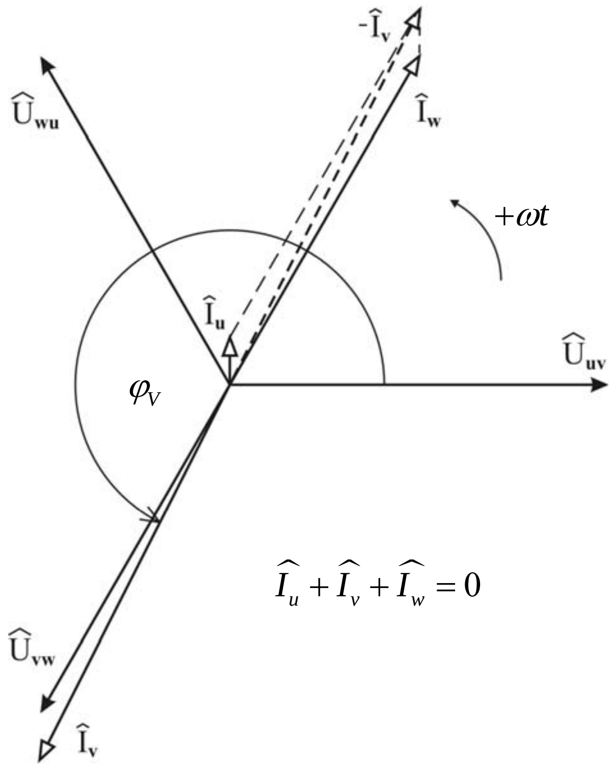
$$\widehat{I_V} = -\widehat{I_U} - \widehat{I_W} = -j0{,}95 - 3{,}8 - j6{,}58 = -3{,}8 - j7{,}53 =$$
$$= \underline{\underline{8{,}43 \cdot e^{j243{,}1°} A}}$$

kde

$$I_V = \sqrt{3{,}8^2 + 7{,}53^2} = 8{,}43A$$

$$\varphi_V = arctg\frac{-7{,}53}{-3{,}8} = 243{,}2°$$

Fázový diagram je nakreslen na obr. 11.4



Obr. 11.4

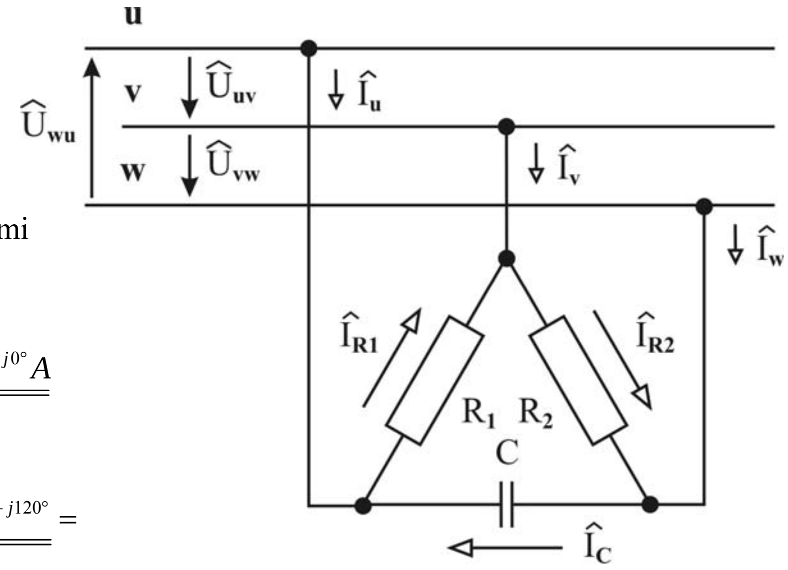
Příklad 11.3

Na trojfázovou symetrickou síť s kmitočtem f bez nulového vodiče jsou připojeny spotřebiče $R_1, R_2, C,$ zapojené do trojúhelníku, podle obr. 11.5. Vypočtěte proudy v jednotlivých fázích (*U, V, W*) $\widehat{I_U}, \widehat{I_V}, \widehat{I_W}$. Nakreslete fázový diagram.

Dáno: $\widehat{U}_{UV} = 380 \cdot e^{j0°} V$; $\widehat{U}_{VW} = 380 \cdot e^{-j120°} V$; $\widehat{U}_{WU} = 380 \cdot e^{j120°} V$; f = 50 Hz ; C= 10 μF ; R_1 = 70 Ω ; R_2 = 50 Ω

Určit: $\widehat{I_U}, \widehat{I_V}, \widehat{I_W}$

Řešení:



Obr. 11.5

Proudy tekoucí jednotlivými prvky

$$\hat{I}_{R1} = \frac{\widehat{U}_{UV}}{R_1} = \frac{380}{70} = 5,43 = \underline{\underline{5,43 \cdot e^{j0°} A}}$$

$$\hat{I}_{R2} = \frac{\widehat{U}_{VW}}{R_2} = \frac{380}{50} \cdot e^{-j120°} = \underline{\underline{7,6 \cdot e^{-j120°}}} =$$
$$= 7,6\left(\cos 120° - j \sin 120°\right) = \left(-3,8 - j6,58\right) A$$

$$\widehat{I_C} = \widehat{U}_{WU} \cdot j\omega C = 380 \cdot e^{j120°} \cdot j \cdot 314 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{1,19 \cdot e^{j210°}}} = \left(-1,03 - j0,59\right) A$$

$$\widehat{I_U} = \hat{I}_{R1} - \widehat{I_C} = 5,43 + 1,03 + j0,59 = 6,46 + j0,59 = \underline{\underline{6,49 \cdot e^{j5,2°} A}}$$

$$I_U = \sqrt{6,46^2 + 0,59^2} = 6,49 A \qquad \varphi_U = arctg\frac{0,59}{6,46} = 5,2°$$

$$\widehat{I_V} = -\hat{I}_{R1} + \hat{I}_{R2} = -5,43 - 3,8 - j6,58 = -9,23 - j6,58 = \underline{\underline{11,33 \cdot e^{j215,5°} A}}$$

$$I_V = \sqrt{9,23^2 + 6,58^2} = 11,33 A \qquad \varphi_V = arctg\frac{-6,58}{-9,23} = 215,5°$$

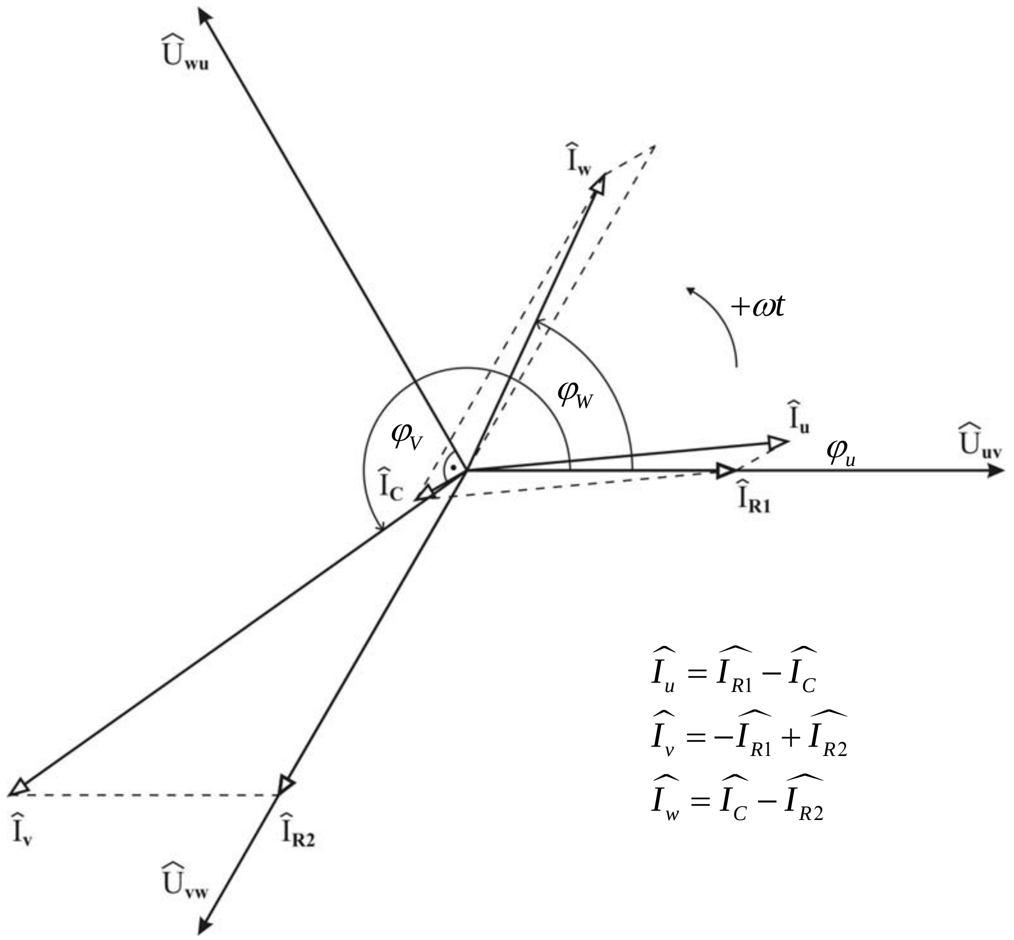
$$\widehat{I_W} = \widehat{I_C} - \hat{I}_{R2} = -1,03 - j0,59 + 3,8 + j6,58 = 2,77 + j5,99 = \underline{\underline{6,6 \cdot e^{j65,2°} A}}$$

$$I_W = \sqrt{2,77^2 + 5,99^2} = 6,6 A \qquad \varphi_W = arctg\frac{5,99}{2,77} = 65,2°$$

Výpočet je správný, jestliže platí

$$\widehat{I_U} + \widehat{I_V} + \widehat{I_W} = 6,46 + j0,59 - 9,23 - j6,58 + 2,77 + j5,99 = 0$$

Fázový diagram je nakreslený na obr. 11.6



Obr. 11.6

12. TÝDEN

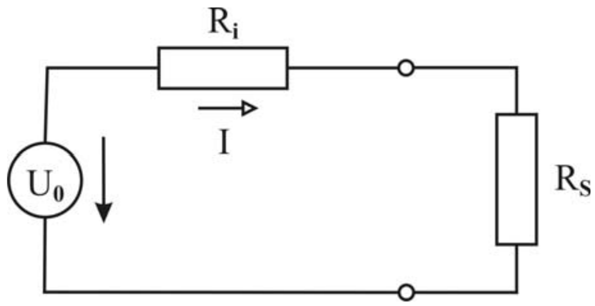
Příklad 12.1

Na akumulátor s napětím naprázdno U_0 a vnitřním odporem R_i je připojen startér. Vypočtěte odpor startéru R_S, aby odebíraný výkon P_S byl maximální.

Dáno: $U_0 = 12$ V ; $R_i = 0{,}01\,\Omega$

Určit: R_S

Řešení:



Obr. 12.1

$P_S = R_S \cdot I^2$

kde *I* je proud odebíraný startérem (obr. 12.1)

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_S} \qquad P_S = R_S \left(\frac{U_0}{R_i + R_S} \right)^2$$

Pro maximální výkon P_S bude $\dfrac{dP_S}{dR_S} = 0$

$$\frac{dP_S}{dR_S} = U_0^2 \left[\frac{(R_i + R_S)^2 - 2R_s (R_i + R_S)}{(R_i + R_S)^4} \right] = 0$$

$$(R_i + R_S)^2 - 2R_S (R_i + R_S) = 0$$

$$R_S = R_i = \underline{\underline{0{,}01\Omega}}$$

Příklad 12.2

Na svorkách jednofázového spotřebiče ukázaly měřící přístroje napětí *U*, proud *I* a činný výkon *P*. Vypočtěte zdánlivý výkon spotřebiče *S*, jeho jalový výkon *Q* a účiník $\cos\varphi$.

Dáno: $U = 220$ V ; $I = 500$ A ; $P = 88$ kW

Určit: $S, Q, \cos\varphi$

Řešení:

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 500 = 110\,000\,VA$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{88000}{220 \cdot 500} = 0{,}8$$

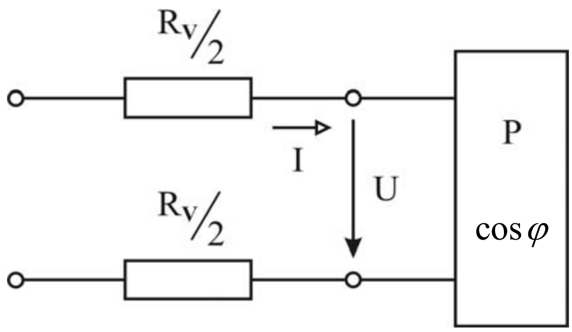
$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 220 \cdot 500 \cdot 0{,}6 = \underline{\underline{66\,000\,VA}}$$

Příklad 12.3

Zátěž o výkonu P s účiníkem $\cos\varphi$ je připojena ke zdroji vedením s odporem R_V podle obr. 12.2. Napětí na svorkách zátěže je U. Vypočtěte o kolik procent p vzrostou ztráty ve vedení, bude-li výkon přenášen s $\cos\varphi^{/}$.

Dáno: $U = 220$ V ; $R_V = 7\,\Omega$; $P = 2000$ W ; $\cos\varphi = 0{,}9$; $\cos\varphi^{/} = 0{,}8$

Určit: p /%/



Obr. 12.2

Řešení:

Ztráty ve vedení při účiníku zátěže $\cos\varphi$

$$\Delta P_V = R_V \cdot I^2 = R_V\left(\frac{P}{U\cdot\cos\varphi}\right)^2 = \frac{R_V\cdot P^2}{U^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

Ztráty ve vedení při účiníku zátěže $\cos\varphi^{/}$

$$\Delta P_V^{/} = \frac{R_V\cdot P^2}{U^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi^{/}}$$

Ztráty ve vedení vzrostou při $\cos\varphi^{/}$ o

$$p = \frac{\Delta P_V^{/} - \Delta P_V}{\Delta P_V}\cdot 100 = \frac{\dfrac{1}{\cos^2\varphi^{/}} - \dfrac{1}{\cos^2\varphi}}{\dfrac{1}{\cos^2\varphi}}\cdot 100 = \frac{\dfrac{1}{0{,}8^2} - \dfrac{1}{0{,}9^2}}{\dfrac{1}{0{,}9^2}}\cdot 100 = \underline{\underline{26{,}5\%}}$$

Příklad 12.4

Na napětí U s frekvencí f jsou připojeny spotřebiče podle obr. 12.3. Jednofázový asynchronní motor M na napětí U s jmenovitým výkonem P_n, účiníkem $\cos\varphi_n$ a účinností η, odporový vařič s příkonem P_p a dvě zářivky Z_1 a Z_2. Každá zářivka má výkon P_Z a účiník $\cos\varphi_Z$. Nakreslete fázový diagram, vypočtěte celkový proud $\widehat{I}$ a výkony (zdánlivý S, činný P, jalový Q), odebírané ze sítě.

Dáno: $P_n = 0{,}5$ kW ; $\cos\varphi_n = 0{,}7$; $\eta = 0{,}75$; $P_p = 600$ W ; $P_Z = 40$ W ; $\cos\varphi_Z = 0{,}56$; $U = 220$ V ; $f = 50$ Hz

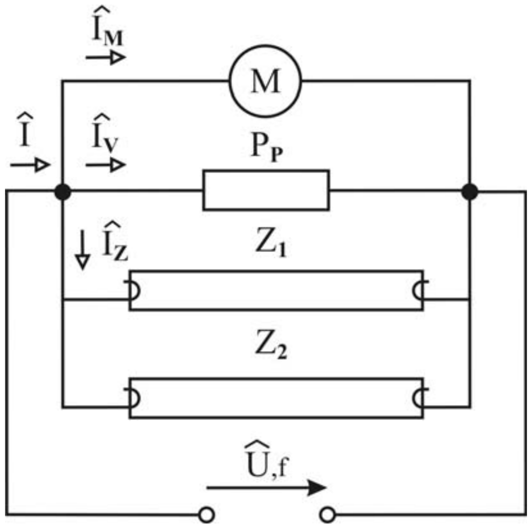
Určit: $\widehat{I}$, S, P, Q

Řešení:

Napájecí napětí $\widehat{U}$ položíme do reálné osy

$$\widehat{U} = 220 \cdot e^{j0°}$$

Proud tekoucí motorem vypočteme (motor je induktivní zátěž, proto je proud zpožděn za napětím o úhel φ_n)



Obr. 12.3

$$\widehat{I_M} = \frac{P_n}{U \cdot \cos\varphi_n \cdot \eta} \cdot e^{-j\varphi_n} = \frac{500}{220 \cdot 0,7 \cdot 0,75} \cdot e^{-j45,6°} =$$
$$= 4,33 \cdot e^{-j45,6°} A$$

$$\widehat{I_V} = \frac{P_p}{U} \cdot e^{j0^0} = \frac{600}{220} \cdot e^{j0^0} = 2,73A$$

Zářivka představuje pro síť také induktivní zátěž, proto i proud $\widehat{I_Z}$ je zpožděn za napětím o úhel φ_Z.

$$\widehat{I_Z} = 2\frac{P_Z}{U \cdot \cos\varphi_Z} \cdot e^{-j\varphi_Z} = 2\frac{40}{220 \cdot 0,56} \cdot e^{-j55,9°} = 0,65 \cdot e^{-j55,9} A$$

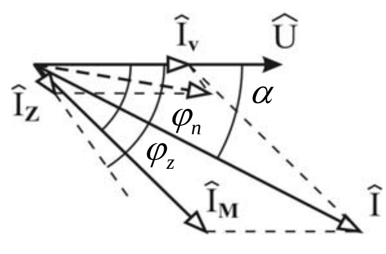
$$\widehat{I} = \widehat{I_M} + \widehat{I_V} + \widehat{I_Z} = 4,33\left(\cos 45,6° - j\sin 45,6°\right) + 2,73 + 0,65\left(\cos 55,9° - j\sin 55,9°\right) =$$
$$= 3,03 - j3,09 + 2,73 + 0,37 - j0,54 = 6,13 - j3,63 = \underline{\underline{7,12 \cdot e^{-j30,6°} A}}$$

$$I = \sqrt{6,13^2 + 3,63^2} = 7,12A \qquad \varphi = arctg\frac{-3,63}{6,13} = -30,6°$$

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 7,12 = \underline{\underline{1566,4\,VA}}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = 220 \cdot 7,12 \cdot \cos 30,6° = \underline{\underline{1348,3W}}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 220 \cdot 7,12 \cdot \sin 30,6° = \underline{\underline{797,36\,VA_r}}$$



Obr. 12.4

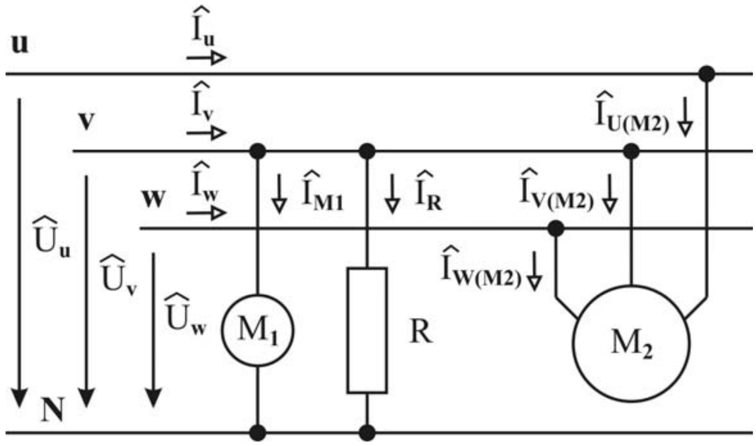
Fázový diagram je na obr. 12.4

Příklad 12.5

Na trojfázovou symetrickou síť s frekvencí f jsou připojeny spotřebiče podle obr. 12.5. Jednofázový asynchronní motor M_1 (štítkové hodnoty: výkon P_1, účinnost η_1, účiník $\cos\varphi_1$), vařič s ohmickým odporem R a trojfázový asynchronní motor M_2 (štítkové hodnoty: výkon P_2, účinnost η_2, účiník $\cos\varphi_2$). Motory jsou plně zatíženy. Vypočtěte trojfázový činný příkon P_P, odebíraný ze sítě.

Dáno: $\widehat{U}_U = 220\cdot e^{j0°}$; $\widehat{U}_V = 220\cdot e^{-j120°}$; $\widehat{U}_W = 220\cdot e^{j120°}$; f = 50 Hz ; P_1 = 250 W ; η_1 = 0,67 ; P_2 = 1 kW ; η_2 = 0,78 ; R = 90 Ω ; $\cos\varphi_1$ = 0,8 ; $\cos\varphi_2$ = 0,85

Určit: P_P



Obr. 12.5

Řešení:

Činné příkony, odebírané z jednotlivých fází:

$$P_U = \frac{1}{3}\cdot\frac{P_2}{\eta_2}$$

$$P_W = \frac{1}{3}\cdot\frac{P_2}{\eta_2}$$

$$P_V = \frac{P_1}{\eta_1} + \frac{U_V^2}{R} + \frac{1}{3}\cdot\frac{P_2}{\eta_2}$$

Celkový příkon, odebíraný ze sítě:

$$P_P = P_U + P_V + P_W = \frac{P_2}{\eta_2} + \frac{P_1}{\eta_1} + \frac{U_V^2}{R} = \frac{1000}{0,78} + \frac{250}{0,67} + \frac{220^2}{90} = \underline{\underline{2192,95W}}$$

Ke stejnému výsledku bychom mohli dojít pomocí symboliko-komplexní metody (ovšem zdlouhavějším výpočtem).

Nejdříve spočítáme proudy $\widehat{I_U}, \widehat{I_V}, \widehat{I_W}$ v jednotlivých fázích.

$$\widehat{I_U} = \widehat{I}_{U(M2)} = \frac{P_2}{3\cdot U_V\cdot\cos\varphi_2\cdot\eta_2}\cdot e^{-j\varphi_2} = \frac{1000}{3\cdot 220\cdot 0,85\cdot 0,78}\cdot e^{-j31,8°} = 2,28\cdot e^{-j31,8°}$$

$$\widehat{I_V} = \widehat{I}_{M1} + \widehat{I_R} + \widehat{I_{V(M2)}}$$

$$\widehat{I}_{M1} = \frac{P_1}{U_V \cdot \cos\varphi_1 \cdot \eta_1} \cdot e^{-j(120°+\varphi_1)} = \frac{250}{220 \cdot 0,8 \cdot 0,67} \cdot e^{-j156,9°} = 2,12 \cdot e^{-j156,9°} =$$
$$= 2,12\left(\cos 156,9° - j\sin 156,9°\right) = -1,95 - j0,83$$

$$\widehat{I_R} = \frac{U_V}{R} \cdot e^{-j120°} = \frac{220}{90} \cdot e^{-j120°} = 2,44 \cdot e^{-j120°} = 2,44\left(\cos 120° - j\sin 120°\right) = -1,22 - j2,11$$

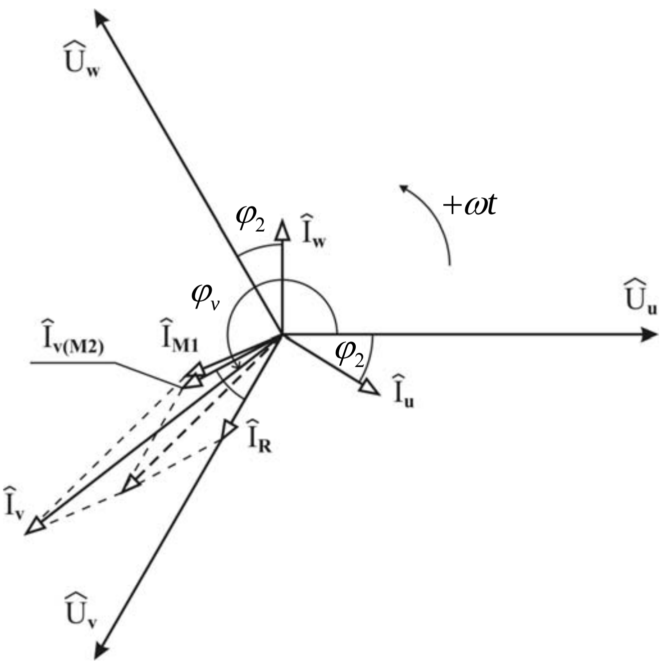
$$\widehat{I_{V(M2)}} = I_{V(M2)} \cdot e^{-j(120°+\varphi_2)} = 2,28 \cdot e^{-j151,8°} = 2,28\left(\cos 151,8° - j\sin 151,8°\right) = -2 - j1,08$$

$$I_V = -1,95 - j0,83 - 1,22 - j2,11 - 2 - j1,08 = -5,17 - j4,02 = \underline{\underline{6,55 \cdot e^{j217,9°}}}$$

$$I_V = \sqrt{5,17^2 + 4,02^2} = 6,55A \qquad \varphi_V = arctg\frac{-4,02}{-5,17} = 217,9°$$

$$\widehat{I_W} = \widehat{I_{W(M2)}} = I_{W(M2)} \cdot e^{j(120°-\varphi_2)} = 2,28 \cdot e^{j88,2°}$$

Fázový diagram je nakreslen na obr. 12.6



Obr. 12.6

Celkový výkon, odebíraný ze sítě:

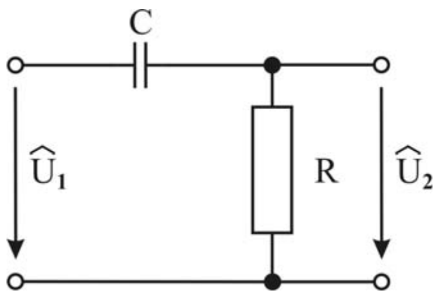
$$P = P_U + P_V + P_W = U_U \cdot I_U \cdot \cos\varphi_2 + U_V I_V \cdot \cos\varphi_V + U_W \cdot I_W \cdot \cos\varphi_2 =$$
$$= 220 \cdot 2,28 \cdot 0,85 + 220 \cdot 6,55 \cdot 0,926 + 220 \cdot 2,28 \cdot 0,85 = \underline{\underline{2187W}}$$

Výsledek vyšel přibližně stejný jako při prvním způsobu řešení, malá odchylka je způsobena zaokrouhlováním dílčích výsledků během výpočtu.

13. TÝDEN

Příklad 13.1

Určete závislost výstupního napětí $\widehat{U}_2$ na kruhové frekvenci ω obvodu nakresleného na obr. 13.1 se vstupním napětím $\widehat{U}_1$.



Obr. 13.1

Dáno: $\widehat{U}_1 = 1$ V

Určit: $\widehat{U}_2 = f(\omega)$

Řešení:

Výstupní napětí $\widehat{U}_2$ pro nezatížený obvod je

$$\widehat{U}_2 = \widehat{U}_1 \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \widehat{U}_1 \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

Označme výraz $\dfrac{1}{CR} = \omega_0$ jako tzv. vztažnou kruhovou frekvenci (poměr $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ je bezrozměrný)

$$\widehat{U}_2 = \widehat{U}_1 \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \widehat{U}_1 \frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad (1)$$

Fázor $\widehat{U}_1$ položíme do reálné osy a jeho velikost je 1 V. Závislost $\widehat{U}_2 = f(\omega)$ vyneseme do komplexní roviny, kde danému $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ odpovídá koncový bod fázoru $\widehat{U}_2$.

Například pro

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}; \qquad \text{tj. pro} \qquad \omega = \frac{\omega_0}{2} = \frac{1}{2RC} \qquad \text{bude}$$

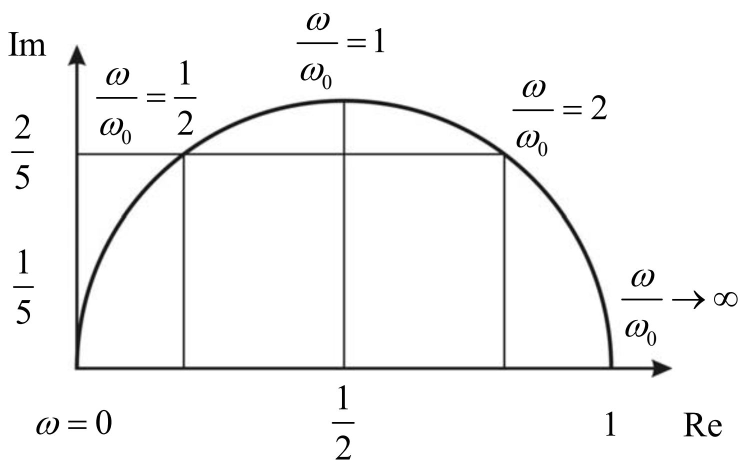
$$\widehat{U}_2 = 1 \cdot \frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + j\left(\dfrac{1}{2}\right)}{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{5} + j\frac{2}{5}$$

V následující tab. 13.1 jsou vypočtené hodnoty pro sestrojení charakteristiky $\widehat{U}_2 = f(\omega)$ v komplexní rovině.

$\frac{\omega}{\omega_0}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	∞
$\mathrm{Re}\left\{\widehat{U}_2\right\}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	1
$\mathrm{Im}\left\{\widehat{U}_2\right\}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	0

Tab. 13.1

Frekvenční charakteristika obvodu z obr. 13.1 je nakreslena na obr. 13.2. Má tvar půlkružnice.



Obr. 13.2

Na obr. 13.2 je patrné, že pro $\frac{\omega}{\omega_0} > 2$ dochází k velkému zhuštění bodů na nepatrné části oblouku frekvenční charakteristiky. Tento nedostatek odstraníme tak, že vyneseme zvlášť závislost amplitudy výstupního napětí U_2 na ω a zvlášť závislost fáze výstupního napětí na ω. Upravíme napětí $\widehat{U}_2$ v rovnici (1) na tvar

$\widehat{U}_2 = \widehat{U}_1 \cdot A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$ kde

$A(\omega)$ je absolutní hodnota (1)

$$A(\omega) = \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right]^2 + \left[\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right]^2} = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad (2\,)$$

a úhel $\phi(\omega)$

$$\phi(\omega) = arctg \frac{\dfrac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\dfrac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = arctg\,\frac{\omega_0}{\omega} \qquad (3\,)$$

pak, protože $\widehat{U}_1$ položíme do reálné osy, platí

$$\widehat{U}_2 = U_1 \cdot \frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \cdot e^{j\,arctg\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \qquad \text{pak} \qquad U_2 = U_1 \cdot \frac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad (4\,)$$

Závislosti podle rovnice (4) se říká amplitudová frekvenční charakteristika a dosazením různých hodnot $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ získáme body této charakteristiky. Např. pro

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \quad \text{je} \quad U_2 = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Další hodnoty jsou uvedeny v tab. 13.2

Závislosti podle rovnice (3) se říká fázová frekvenční charakteristika a dosazením různých hodnot $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ získáme body této charakteristiky. Např. pro

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \quad \text{je} \quad \phi(\omega) = arctg\,1 = 45°$$

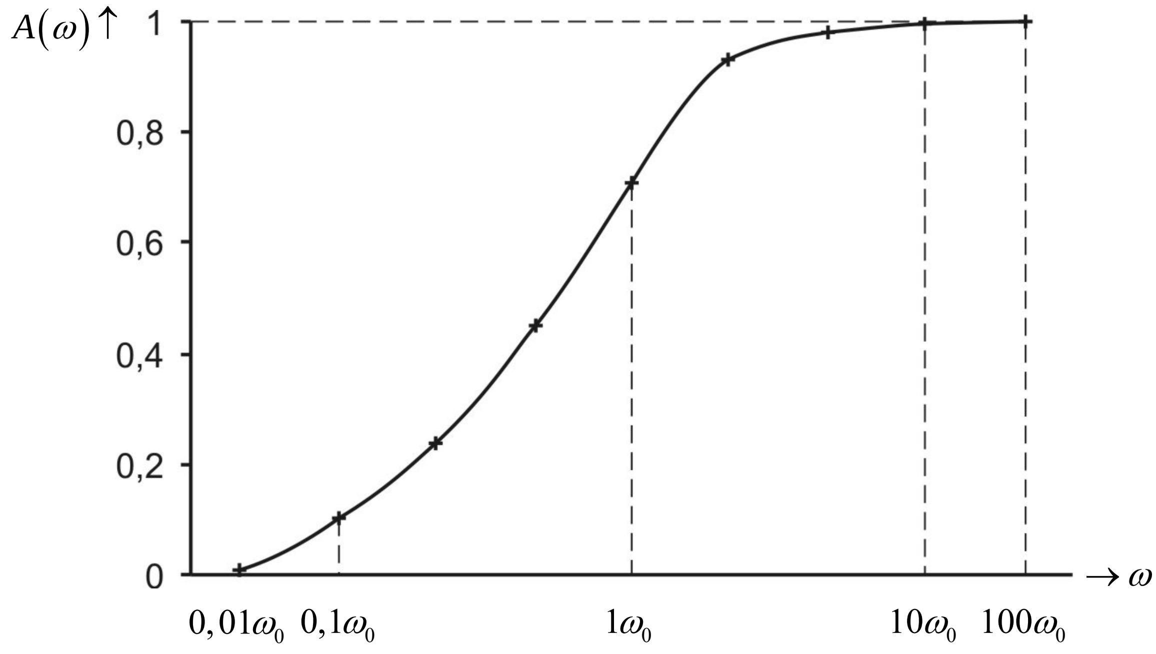
Další hodnoty jsou uvedeny v tab. 13.2

$\frac{\omega}{\omega_0}$	0,01	0,1	0,25	0,5	1	2,5	5	10	100
$A(\omega)$	0,01	0,1	0,24	0,45	0,71	0,93	0,98	0,99	1
$\phi(\omega)$	89°	84°	76°	63°	45°	22°	11°	5,7°	0,6°

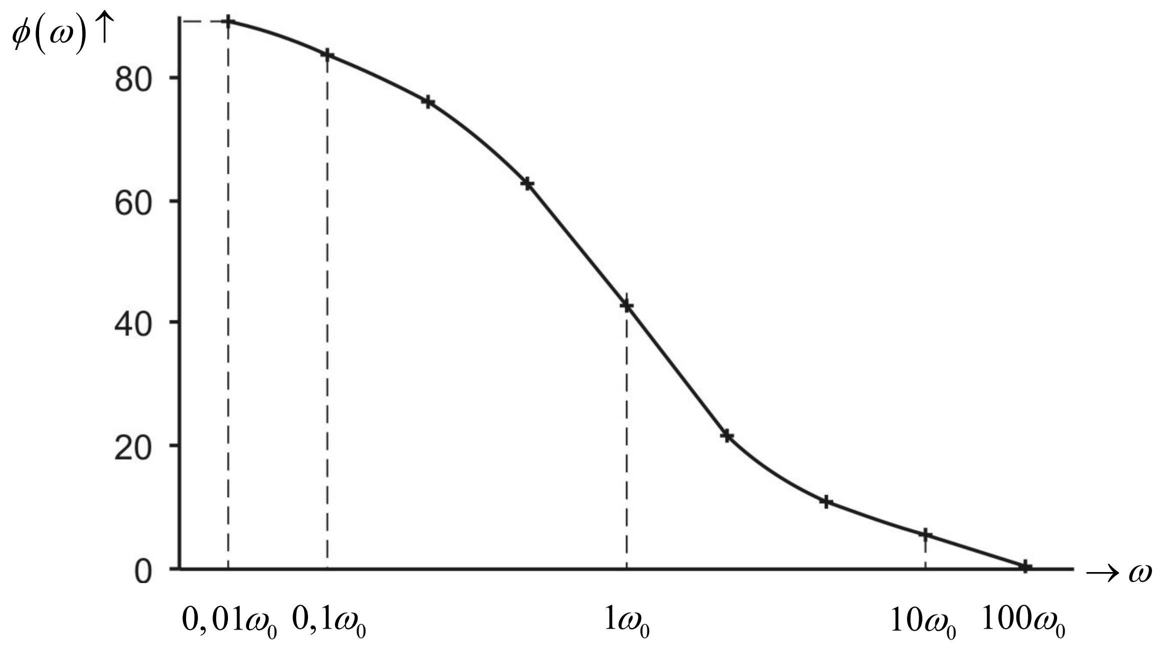
Tab. 13.2

Při vynášení těchto charakteristik pro zobrazení širokého rozsahu frekvencí použijeme pro osu, na níž vynášíme kruhovou frekvenci, logaritmickou stupnici.

Amplitudová frekvenční charakteristika je nakreslena na obr. 13.3 a fázová frekvenční charakteristika na obr. 13.4.



Obr. 13.3

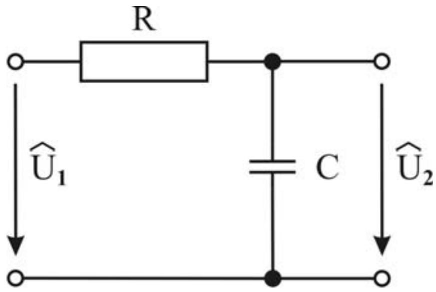


Obr. 13.4

Poznámka: Poměr výstupního napětí $\frac{U_2}{U_1} = A(\omega)$ je také nazýván přenosem obvodu.

Příklad 13.2

Určete závislost výstupního napětí $\widehat{U}_2$ na kruhové frekvenci ω obvodu nakresleného na obr. 13.5 se vstupním napětím $\widehat{U}_1$.



Obr. 13.5

Dáno: $\widehat{U}_1 = 1$ V
Určit: $\widehat{U}_2 = f(\omega)$

Řešení:

Výstupní napětí $\widehat{U}_2$ pro nezatížený obvod je

$$\widehat{U}_2 = \widehat{U}_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \widehat{U}_1 \frac{1}{1 + j\omega CR} = \widehat{U}_1 \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}$$

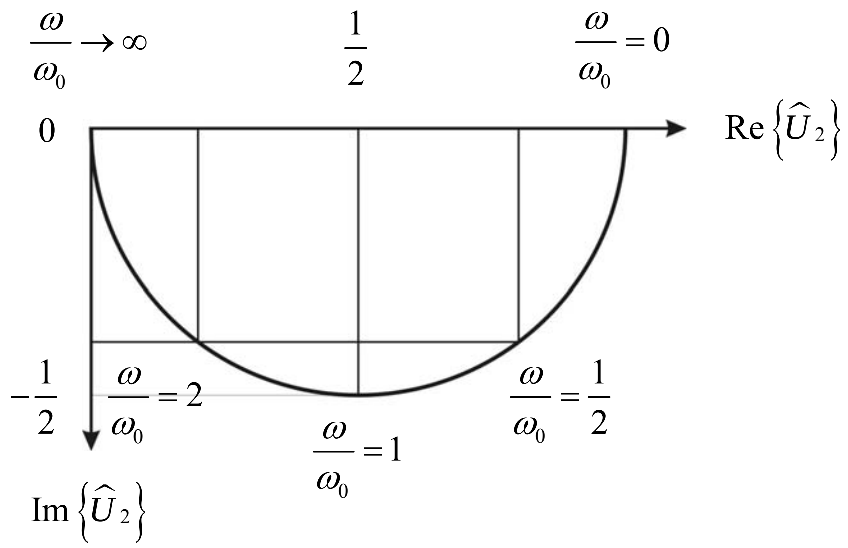
Označme opět výraz $\frac{1}{CR} = \omega_0$ jako tzv. vztažnou kruhovou frekvenci (opět proto, že poměr $\frac{\omega}{\omega_0}$ je bezrozměrný).

$$\widehat{U}_2 = \widehat{U}_1 \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - j \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right] \qquad \text{(1a)}$$

Vyneseme závislost $\widehat{U}_2 = f(\omega)$ do komplexní roviny, kde opět danému $\frac{\omega}{\omega_0}$ odpovídá bod fázoru $\widehat{U}_2$. Pro vykreslení charakteristiky vypočteme opět pro několik hodnot $\frac{\omega}{\omega_0}$ reálnou a imaginární složku napětí $\widehat{U}_2$. Fázor napětí $\widehat{U}_1$ položíme opět do reálné osy a jeho velikost je 1 V. Vypočtené hodnoty jsou uvedeny v tab. 13.3 a obr. 13.6.
ukazuje frekvenční charakteristiku v komplexní rovině.

$\frac{\omega}{\omega_0}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	∞
$\mathrm{Re}\{\widehat{U}_2\}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0
$\mathrm{Im}\{\widehat{U}_2\}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	0

Tab. 13.3



Obr. 13.6

Opět rovnici (1a) přepíšeme do tvaru

$$\widehat{U}_2 = \widehat{U}_1 \cdot A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)} \quad \text{kde} \quad A(\omega) \quad \text{po úpravě je}$$

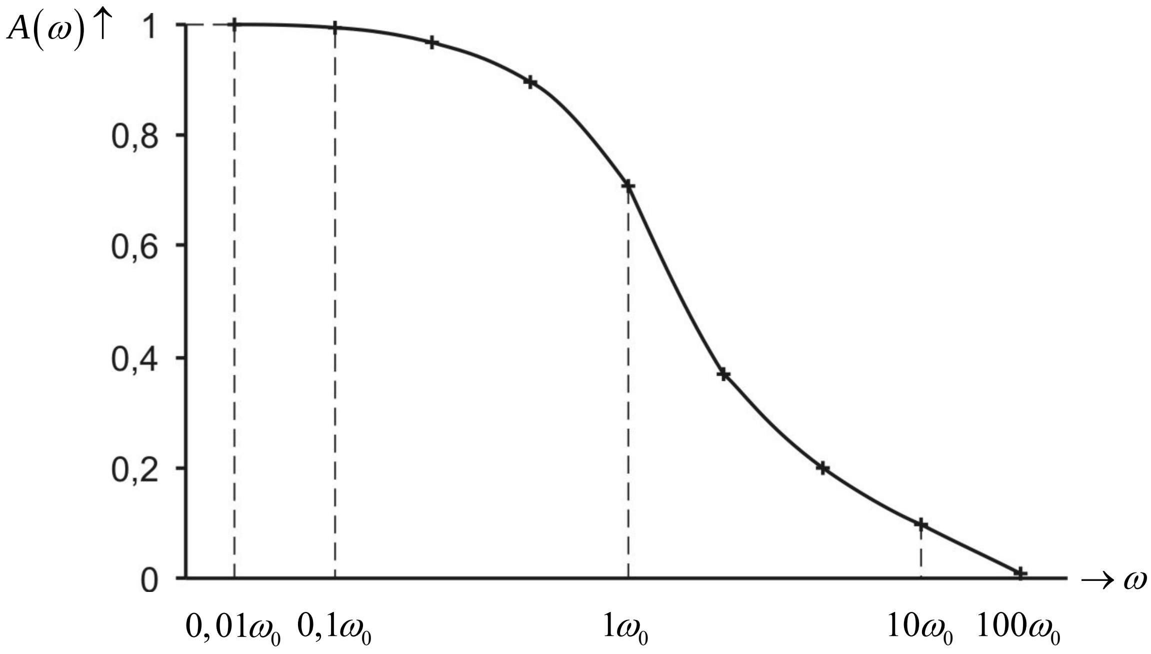
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{a} \quad \phi(\omega) = arctg\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Vypočtené hodnoty jsou uvedeny pro vybrané $\frac{\omega}{\omega_0}$ v tab. 13.4.

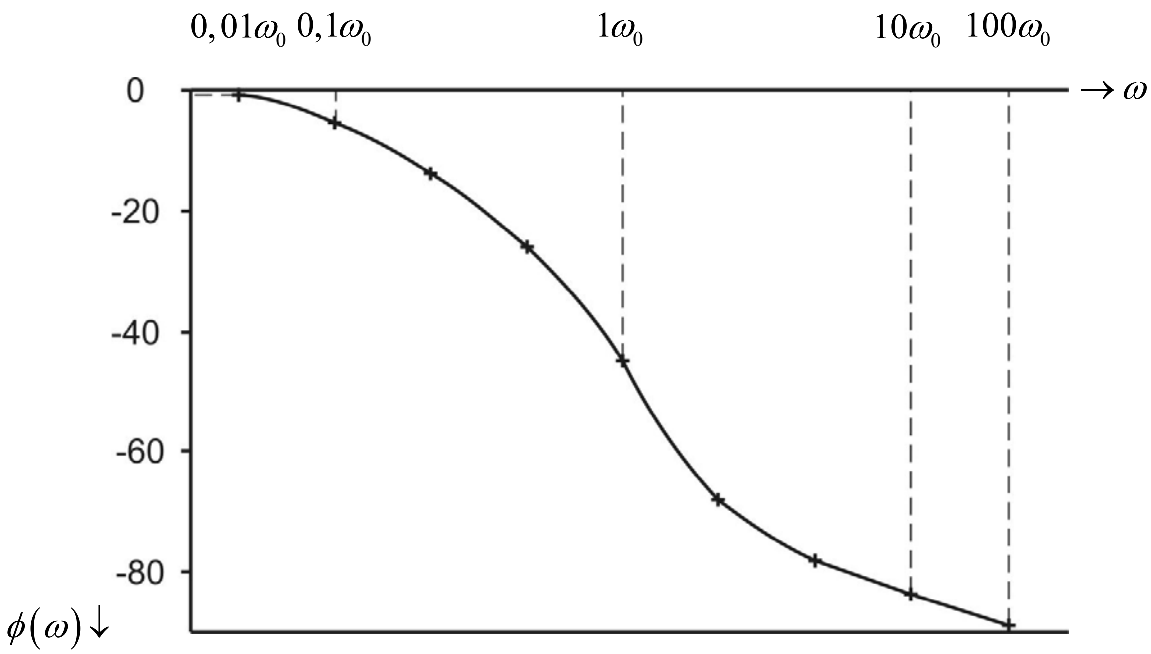
$\frac{\omega}{\omega_0}$	0,01	0,1	0,25	0,5	1	2,5	5	10	100
$A(\omega)$	1	0,99	0,97	0,9	0,71	0,37	0,2	0,1	0,01
$\phi(\omega)$	-0,6°	-5,7°	-14°	-26°	-45°	-68°	-78°	-84°	-89°

Tab. 13.4

Amplitudová frekvenční charakteristika je nakreslena na a fázová frekvenční charakteristika na obr. 13.7 a obr. 13.8.



Obr. 13.7



Obr. 13.8