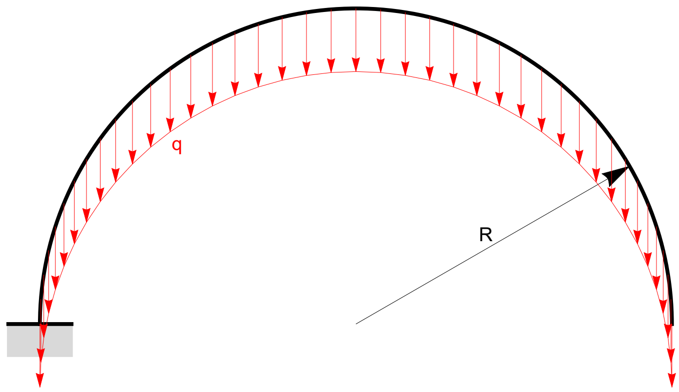
Půloblouk s vlastní tíhou

Zadání



Dáno :

$\mathbb{E}$, J, R, q

Určete :

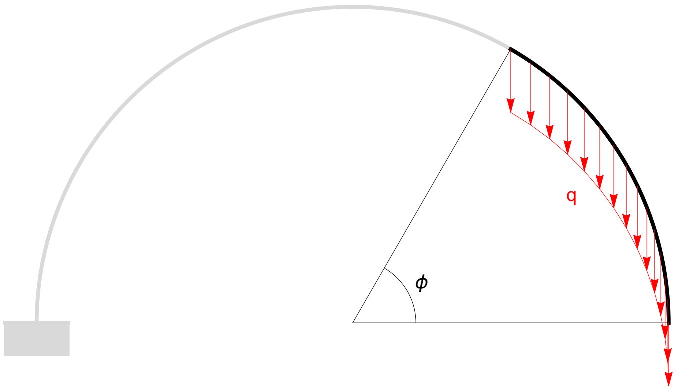
- Posuvy bodu pavého konce oblouku
- $M_{O\,Max}$

Řešení

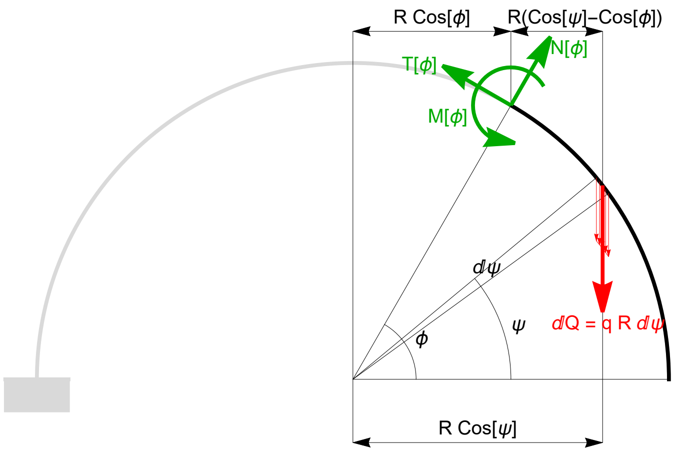
Vnitřní statické účinky

Myšlený řez provedeme na souřadnici ϕ

$$\phi \in \langle 0, \pi \rangle . \tag{1}$$



Moment na souřadnici ϕ dostaneme jako součet (integrál) momentů od elementárních sil dQ, jak ukazuje následující obrázek:



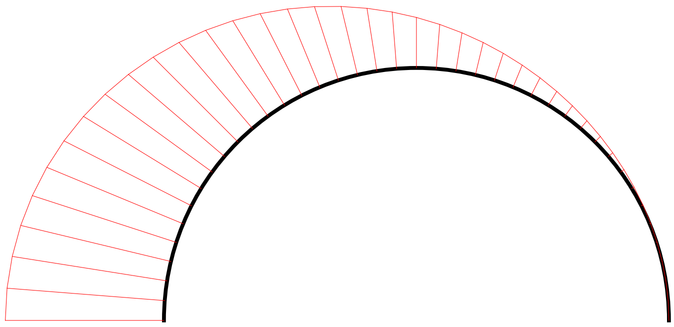
Platí tedy

$$M[\phi] = \int_0^{\phi} R\,(\mathrm{Cos}[\psi] - \mathrm{Cos}[\phi])\,dQ = \int_0^{\phi} R\,(\mathrm{Cos}[\psi] - \mathrm{Cos}[\phi])\,q\,R\,d\psi, \tag{2}$$

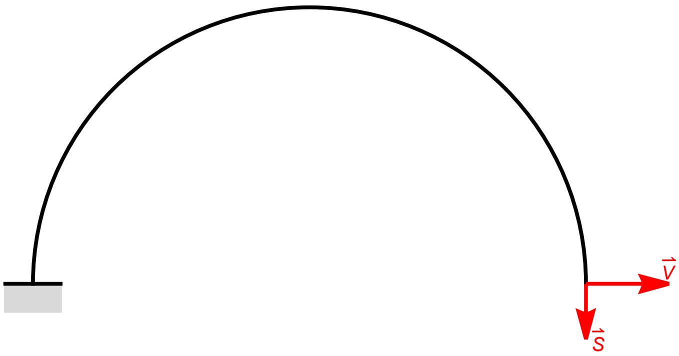
což po integraci dává tvar

$$M[\phi] = q\,R^2\,(-\phi\,\mathrm{Cos}[\phi] + \mathrm{Sin}[\phi]) . \tag{3}$$

Průběh momentu od q



Protože nás zajímají posuvy pravého konce, kde nepůsobí žádná osamělá síla, musíme tam síly doplnit (a na konci výpočtu je pak předepíšeme jako nulové). Vodorovnou sílu označíme V a svislou sílu S.



$$M = R\,S\,(1 - \mathrm{Cos}[\phi]) - R\,V\,\mathrm{Sin}[\phi]. \tag{4}$$

Ohybový moment má tedy tvar

$$M = R\,S\,(1 - \mathrm{Cos}[\phi]) - R\,V\,\mathrm{Sin}[\phi] + q\,R^2\,(-\phi\,\mathrm{Cos}[\phi] + \mathrm{Sin}[\phi]) \tag{5}$$

Deformační energie

a deformační energie U vychází

$$U = \int_0^{\pi} \frac{M^2\,R}{2\,\mathbb{E}\,J}\,d\phi, \tag{6}$$

což po integraci dává

$$U = \frac{R^3\,\left(2\,\pi^3\,q^2\,R^2 + 6\,\pi^2\,q\,R\,S + 48\,S\,(2\,q\,R - V) + 3\,\pi\,\left(5\,q^2\,R^2 + 6\,S^2 - 6\,q\,R\,V + 2\,V^2\right)\right)}{24\,J\,\mathbb{E}}. \tag{7}$$

Posuvy

$$u = \frac{\partial U}{\partial V} \mid_{V\to 0, S\to 0} = -\frac{3\,\pi\,q\,R^4}{4\,J\,\mathbb{E}}, \tag{8}$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial S} \mid_{V\to 0, S\to 0} = \frac{\left(16+\pi^2\right)\,q\,R^4}{4\,J\,\mathbb{E}}. \tag{9}$$