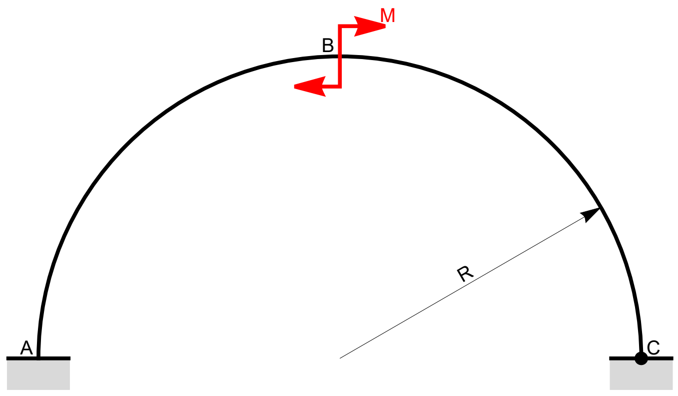
Oblouk 1

Zadání



Křivý prut je vetknutý v bodě A a podepřený v bodě C. V bodě B je zatížený momentem M.

Dáno:

R, 𝔼, J, M

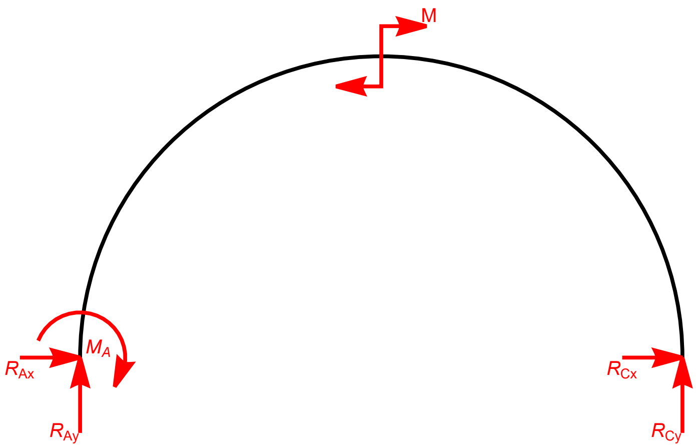
Určete:

- reakce,
- průběh ohybového momentu (vztahy i graf),
- $M_{o\,\mathrm{Max}}$

Řešení

Reakce, rovnice rovnováhy

Uvolníme, zavedeme reakce a zapíšeme rovnice rovnováhy.



$$R_{Ax} + R_{Cx} = 0, \tag{1}$$

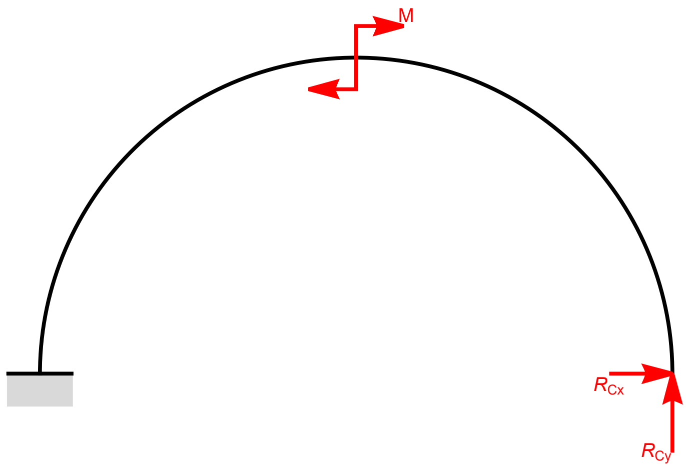
$$R_{Ay} + R_{Cy} = 0, \tag{2}$$

$$M_A + M - R_{Cy}\, 2\, R = 0. \tag{3}$$

Ve třech rovnicích rovnováhy máme pět neznámých, takže jde o *dvakrát staticky neurčitou* úlohu.

Deformační rovnice

V bodě C odstraníme vazbu a ponecháme tam reakce - viz obrázek.

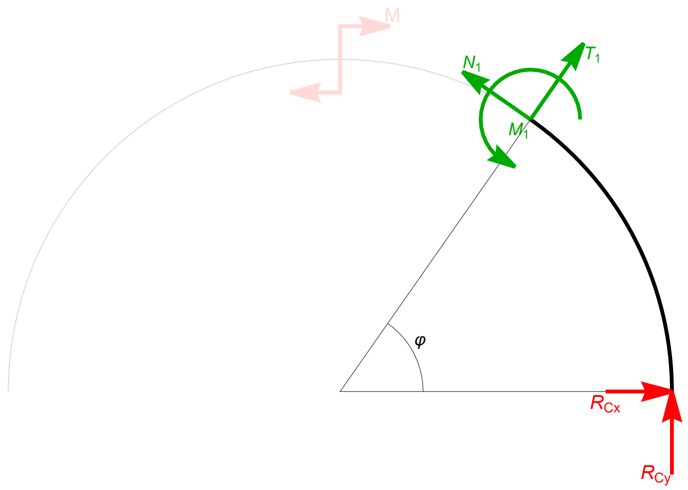


Velikost těchto reakcí musí být taková, že bod C nezmění polohu. To znamená, že musejí platit deformační rovnice

$$u_c = 0, \tag{4}$$

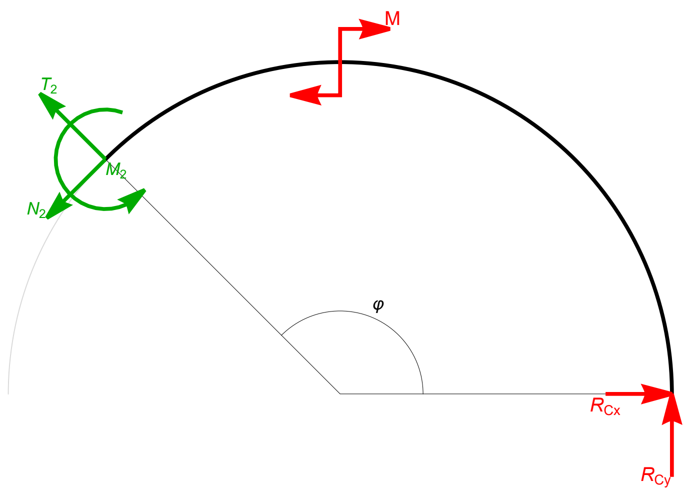
$$v_c = 0. \tag{5}$$

Vnitřní statické účinky - úsek 1



$$M_1 = -R_{Cx}\sin(\varphi) + R_{Cy}(1 - \cos(\varphi)) \tag{6}$$

Vnitřní statické účinky - úsek 2



$$M_2 = -R_{Cx}\sin(\varphi) + R_{Cy}(1 - \cos(\varphi)) + M \tag{7}$$

Vnitřní statické účinky

$$M = \begin{cases} R_{Cy}(1 - \cos(\varphi)) - R_{Cx}\sin(\varphi) & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ -R_{Cx}\sin(\varphi) + R_{Cy}(1 - \cos(\varphi)) + M & \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \end{cases} \tag{8}$$

Deformační energie

$$U = \int_0^{\pi} \frac{M^2 R}{2 \mathbb{E} J} \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_1^2 R}{2 \mathbb{E} J} \, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{M_2^2 R}{2 \mathbb{E} J} \, d\varphi, \tag{9}$$

$$U = \frac{R\left(-4\,R_{Cx}\left(2\,R_{Cy}+M\right)+\pi\,R_{Cx}^2+2\,(2+\pi)\,M\,R_{Cy}+3\,\pi\,R_{Cy}^2+\pi\,M^2\right)}{4\,\mathbb{E}\,J}. \tag{10}$$

Deformační rovnice

$$u_C = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{R_{Cx}}} = 0 \tag{11}$$

$$v_C = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{R_{Cy}}} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{R\left(2\,\pi\,R_{Cx}-4\left(2\,R_{Cy}+M\right)\right)}{4\,\mathbb{E}\,J} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{R\left(-8\,R_{Cx}+6\,\pi\,R_{Cy}+2\,(2+\pi)\,M\right)}{4\,\mathbb{E}\,J} = 0 \tag{14}$$

Soustava rovnic

$$R_{Ax}+R_{Cx} = 0 \tag{15}$$

$$R_{Ay}+R_{Cy} = 0 \tag{16}$$

$$M_A+2\,R\,R_{Cy}+M = 0 \tag{17}$$

$$\frac{R\left(2\,\pi\,R_{Cx}-4\cdot\left(2\,R_{Cy}+M\right)\right)}{4\,\mathbb{E}\,J} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{R\left(-8\,R_{Cx}+6\,\pi\,R_{Cy}+2\cdot(2+\pi)\,M\right)}{4\,\mathbb{E}\,J} = 0 \tag{19}$$

Řešení soustavy rovnic

$$M_A = \left(M\left(-16\,(R-1)+4\,\pi\,R+\pi^2\,(2\,R-3)\right)\right)/\left(3\,\pi^2-16\right) \tag{20}$$

$$R_{Ax} = -\frac{2\,(\pi-4)\,M}{3\,\pi^2-16} \tag{21}$$

$$R_{Ay} = \frac{\left(-8+2\,\pi+\pi^2\right)M}{3\,\pi^2-16} \tag{22}$$

$$R_{cx} = \frac{2\,(\pi-4)\,M}{3\,\pi^2-16} \tag{23}$$

$$R_{Cy} = -\frac{\left(-8+2\,\pi+\pi^2\right)M}{3\,\pi^2-16} \tag{24}$$

Ohybový moment

$$M = \begin{cases} \frac{(\pi-2)\,(4+\pi)\,M\,(\cos(\varphi)-1)-2\,(\pi-4)\,M\sin(\varphi)}{3\,\pi^2-16} & 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{M\,(-2\,(\pi-4)\sin(\varphi)+(\pi-2)\,(4+\pi)\cos(\varphi)+2\,(\pi-1)\,\pi-8)}{3\,\pi^2-16} & \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \end{cases} \tag{25}$$