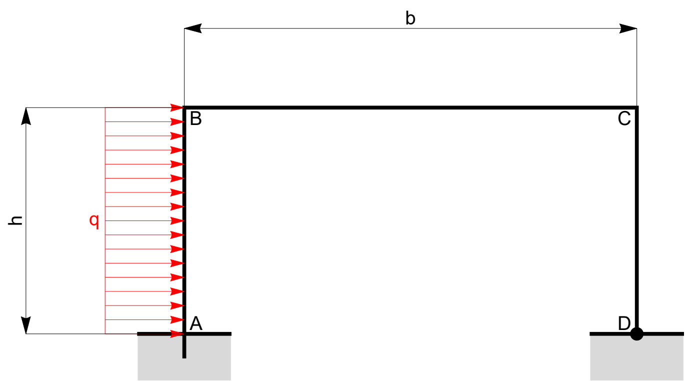
Obdelníkový prut se spojitým zatížením zleva

Zadání



Křivý prut je vetknutý v bodě A a kloubově uložený v bodě D. Segment AB je zatížený vodorovným spojitým zatížením q.

Dáno:

b, h, q, 𝔼, J

Určete:

○ reakce,

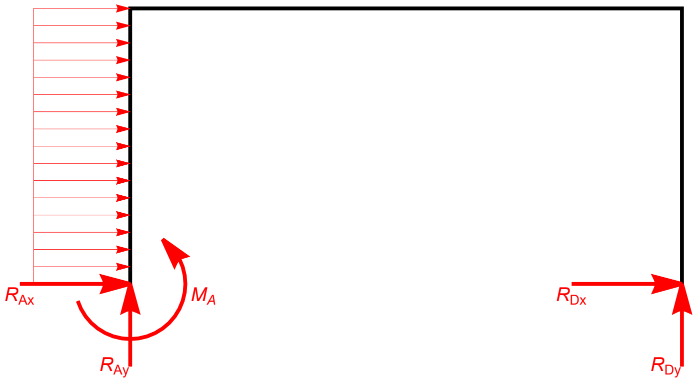
○ průběh ohybového momentu (vztahy i graf),

○ $M_{o\,\mathrm{Max}}$

Řešení

Rovnice rovnováhy

Prut uvolníme, zavedeme reakce a zapíšeme rovnice rovnováhy



$$R_{\mathrm{Ax}} + R_{\mathrm{Dx}} + q\,h = 0, \tag{1}$$

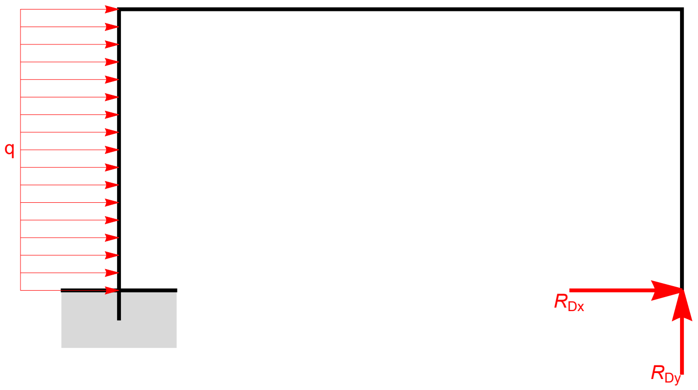
$$R_{\mathrm{Ay}} + R_{\mathrm{Dy}} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{q\,h^2}{2} - M_A - R_{\mathrm{Dy}}\,b = 0. \tag{3}$$

V těchto třech rovnicích rovnováhy je pět neznámých reakcí a úloha je proto *dvakrát staticky neurčitá*.

Deformační rovnice

Prut uvolníme v bodě D, místo vazby tam aplikujeme reakce a předepíšeme vztahy, kterými nahradíme vazbu:

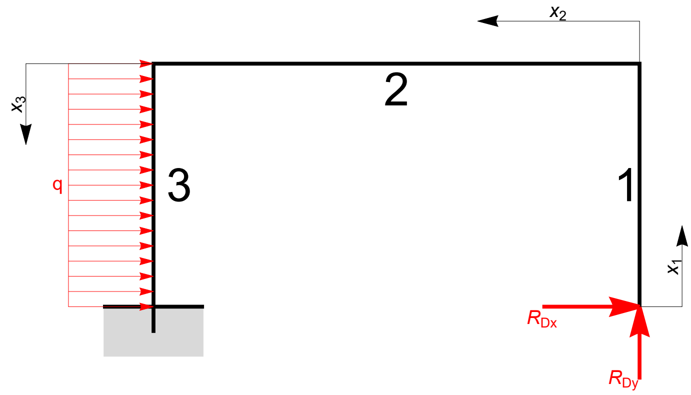


$$u_D = 0, \tag{4}$$

$$v_D = 0. \tag{5}$$

Vnitřní ohybový moment

Rozdělíme prut na tři úseky a zavedeme si v nich souřadnice podle obrázku

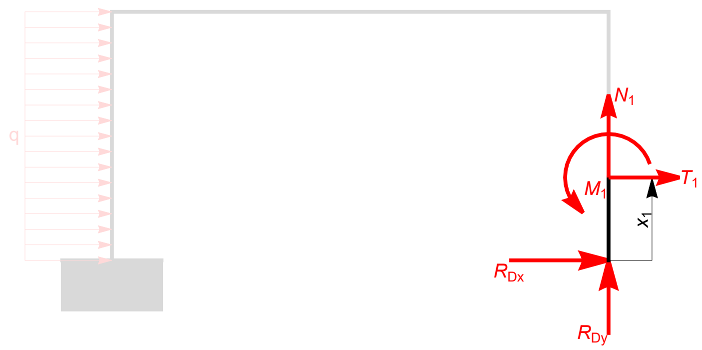


$$x_1 \in \langle 0, h \rangle, \tag{6}$$

$$x_2 \in \langle 0, b \rangle, \tag{7}$$

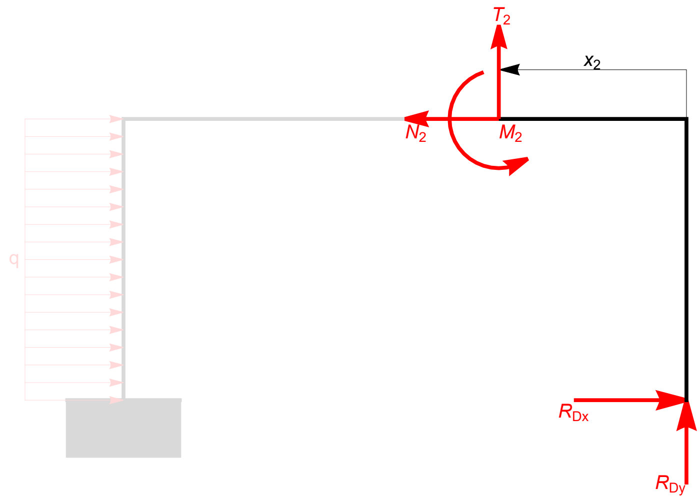
$$x_3 \in \langle 0, h \rangle. \tag{8}$$

První úsek



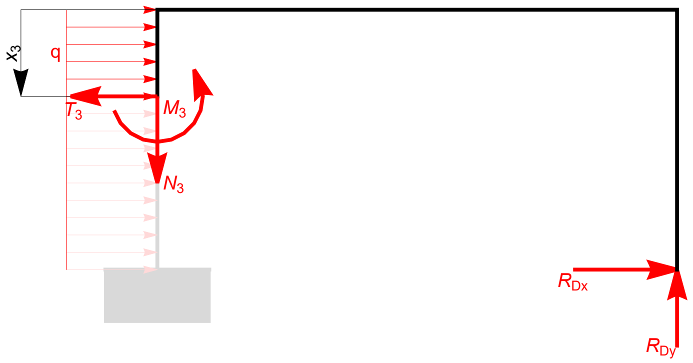
$$M_1 = x_1\,(-R_{Dx}) \tag{9}$$

Druhý úsek



$$M_2 = -h\, R_{Dx} - x_2\, R_{Dy} \tag{10}$$

Třetí úsek



$$M_3 = -b\, R_{Dy} - R_{Dx}\,(h - x_3) + \frac{q\, x_3^2}{2} \tag{11}$$

Ohybový moment

$$\mathrm{M} = \begin{cases} x_1\,(-R_{Dx}) & 0 \le x_1 \le h \\ -h\, R_{Dx} - x_2\, R_{Dy} & 0 \le x_2 \le b \\ -b\, R_{Dy} - R_{Dx}\,(h - x_3) + \frac{q\, x_3^2}{2} & 0 \le x_3 \le h \end{cases} \tag{12}$$

Deformační energie

Obecný vztah pro deformační energii

$$\mathrm{U} = \int_0^h \frac{M_1^2}{2\,\mathbb{E}\,J}\, dx_1 + \int_0^b \frac{M_2^2}{2\,\mathbb{E}\,J}\, dx_2 + \int_0^h \frac{M_3^2}{2\,\mathbb{E}\,J}\, dx_3 \tag{13}$$

dává po integraci tvar

$$\mathrm{U} = \frac{1}{120\,\mathbb{E}\,J}\Big(5\, b^2\, R_{Dx}\,\big(b\, q\,(3\, b - 4\, h) - 12\,(b - 3\, h) \\ 20\,(b^3 - 3\, b^2\, h + 6\, b\, h^2 + h^3)\, R_{Dx}^2 + b^3\,(3\, b^2\, q^2 - 20\, b\, q\, R_D \tag{14}$$

Deformační rovnice

Deformační rovnice v podobě

$$\mathrm{u_D} == \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{R_{Dx}}} == 0, \tag{15}$$

$$\mathrm{v_D} == \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{R_{Dy}}} == 0, \tag{16}$$

mají po dosazení za U tvar

$$\frac{5\,b^2\left(b\,q\,(3\,b-4\,h)-12\,(b-3\,h)\,R_{Dy}\right)+40\left(b^3-3\,b^2\,h+6\,b\,h^2+h^3\right)R_{Dx}}{120\,\mathbb{E}\,J}=0, \tag{17}$$

$$\frac{b^3\left(160\,R_{Dy}-20\,b\,q\right)-60\,b^2\,(b-3\,h)\,R_{Dx}}{120\,\mathbb{E}\,J}=0. \tag{18}$$

Soustava rovnic

Soustav rovnic rovnováhy a deformačních rovnic je tato:

$$R_{Ax}+R_{Dx}+h\,q=0 \tag{19}$$

$$R_{Ay}+R_{Dy}=0 \tag{20}$$

$$-M_A-b\,R_{Dy}+\frac{h^2\,q}{2}=0 \tag{21}$$

$$\frac{5\,b^2\left(b\,q\,(3\,b-4\,h)-12\,(b-3\,h)\,R_{Dy}\right)+40\left(b^3-3\,b^2\,h+6\,b\,h^2+h^3\right)R_{Dx}}{120\,\mathbb{E}\,J}=0 \tag{22}$$

$$\frac{b^3\left(160\,R_{Dy}-20\,b\,q\right)-60\,b^2\,(b-3\,h)\,R_{Dx}}{120\,\mathbb{E}\,J}=0 \tag{23}$$

Řešení soustavy rovnic

$$R_{Ax} = \frac{\left(3\,b^4-6\,b^3\,h-6\,b^2\,h^2-15\,b\,h^3-16\,h^4\right)\,q}{7\,b^3+6\,b^2\,h+15\,b\,h^2+16\,h^3} \tag{24}$$

$$R_{Ay} = \frac{b\,\left(b^3-15\,b^2\,h-12\,b\,h^2-8\,h^3\right)\,q}{4\,\left(7\,b^3+6\,b^2\,h+15\,b\,h^2+16\,h^3\right)} \tag{25}$$

$$M_A = \frac{\left(b^5-15\,b^4\,h+2\,b^3\,h^2+4\,b^2\,h^3+30\,b\,h^4+32\,h^5\right)\,q}{4\,\left(7\,b^3+6\,b^2\,h+15\,b\,h^2+16\,h^3\right)} \tag{26}$$

$$R_{Dx} = -\frac{b^3\,(3\,b+h)\,q}{7\,b^3+6\,b^2\,h+15\,b\,h^2+16\,h^3} \tag{27}$$

$$R_{Dy} = \frac{b\,\left(-b^3+15\,b^2\,h+12\,b\,h^2+8\,h^3\right)\,q}{4\,\left(7\,b^3+6\,b^2\,h+15\,b\,h^2+16\,h^3\right)} \tag{28}$$

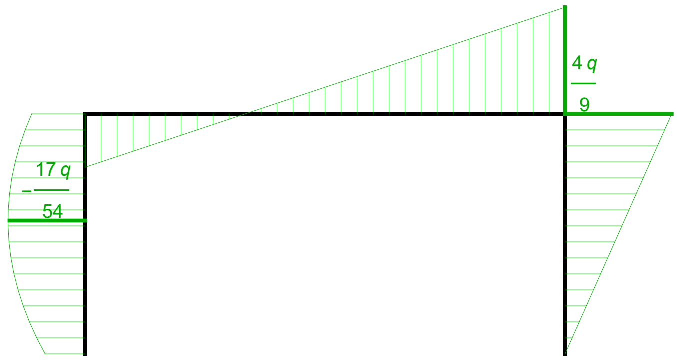
Průběh momentu

Dosadíme-li například rozměry

$$b = 2\,\mathtt{m}, \tag{29}$$

$$h = 1\,\mathtt{m}, \tag{30}$$

dostaneme tento průběh ohybového momentu po délce prutu. Na průběhu jsou vyznačené extrémy.


4 q
9
17 q
54