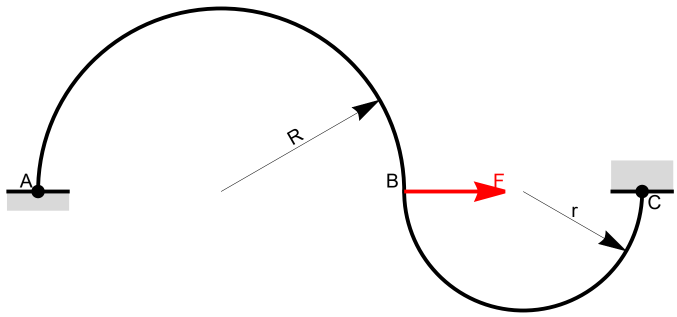
Prut tvořený dvěma půlkružnicemi

Zadání



Křivý prut je tvořený dvěma půloblouky a kloubově uložený na koncích (v bodech A a C). Zatížený je vodorovnou silou F v bodě B.

Dáno:

R, r, F, E, J

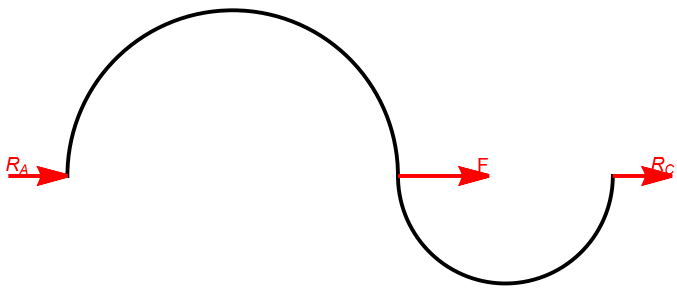
Určete:

- reakce,
- průběh ohybového momentu (vztahy i graf),
- Posuv bodu B
- M_o Max

Řešení

Rovnice rovnováhy

Zavedeme reakce a zapíšeme rovnice rovnováhy. Je na první pohled jasné, že svislé reakce musejí být nulové a proto nemusíme psát složkovou rovnici rovnováhy do svislého směru, ani momentovou rovnici rovnováhy. Situace tedy vypadá následovně



$$R_A + R_C + F = 0. \tag{1}$$

Jedná se o jednou staticky neurčitou úlohu.

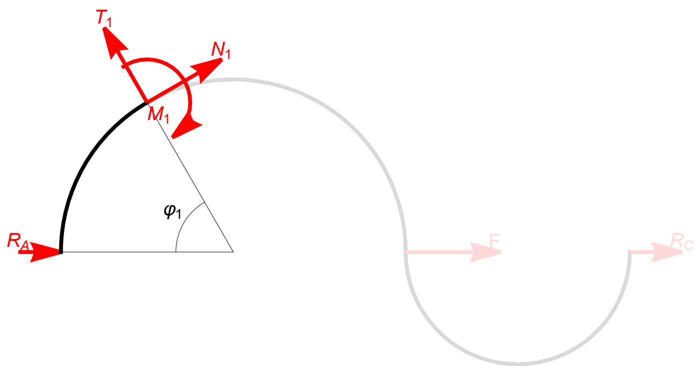
Deformační rovnice

Deformační rovnice vyjadřuje názornou skutečnost, že se vzdálenost bodů A a C nemůže změnit:

$$\delta_{AC} == 0. \tag{2}$$

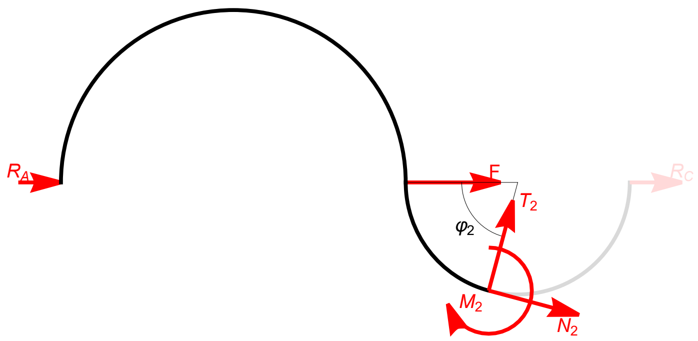
Vnitřní ohybový moment

První úsek



$$M_1 = R\, R_A \sin(\varphi_1). \tag{3}$$

Druhý úsek



$$M_2 = -(R_A + F)\, r \sin(\varphi_2). \tag{4}$$

Deformační energie

$$U = \int_0^{\pi} \frac{M_1^2 R}{2\, \mathbb{E}\, J}\, d\varphi_1 + \int_0^{\pi} \frac{M_2^2 r}{2\, \mathbb{E}\, J}\, d\varphi_2, \tag{5}$$

$$U = \frac{\pi\left(2\,F\,r^3\,R_A + R_A^2\left(r^3 + R^3\right) + F^2\,r^3\right)}{4\,\mathbb{E}\,J}, \tag{6}$$

Deformační rovnice

$$\delta_{AC} = \frac{\partial U}{\partial R_A}, \tag{7}$$

$$\delta_{AC} = \frac{\pi\left(2\,R_A\left(r^3 + R^3\right) + 2\,F\,r^3\right)}{4\,\mathbb{E}\,J} = 0, \tag{8}$$

Řešení soustavy rovnic

Soustava rovnic je tvořena jednou rovnicí rovnováhy a jednou deformační rovnicí. Řešení je

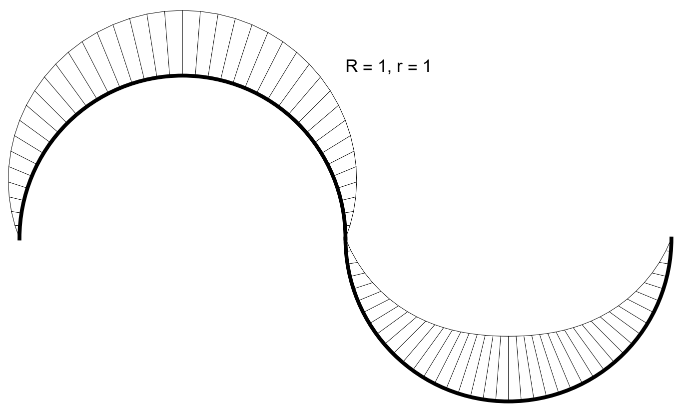
$$R_A = -\frac{F\,r^3}{r^3 + R^3} \tag{9}$$

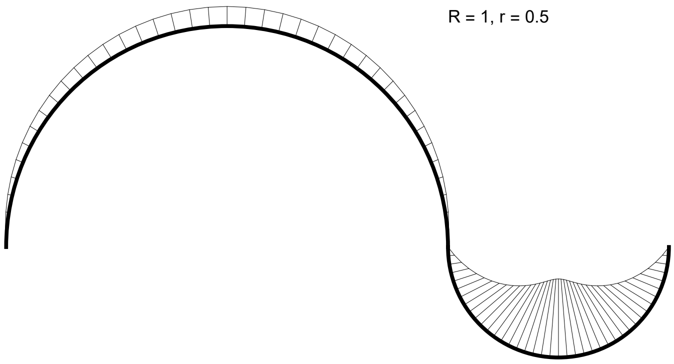
$$R_C = -\frac{F\,R^3}{r^3 + R^3} \tag{10}$$

Průběh momentu

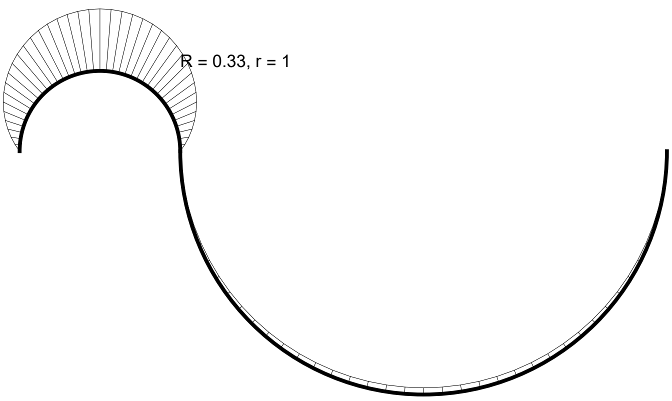
$$M = \begin{cases} -\frac{F\,r^3\,R\sin(\varphi_1)}{r^3+R^3} & 0 \le \varphi_1 \le \pi \\ r\sin(\varphi_2)\left(\frac{F\,r^3}{r^3+R^3} - F\right) & 0 \le \varphi_2 \le \pi \end{cases} \tag{11}$$

Průběhy momentů pro různé hodnoty R a r:





R = 1, r = 0.5



R = 0.33, r = 1