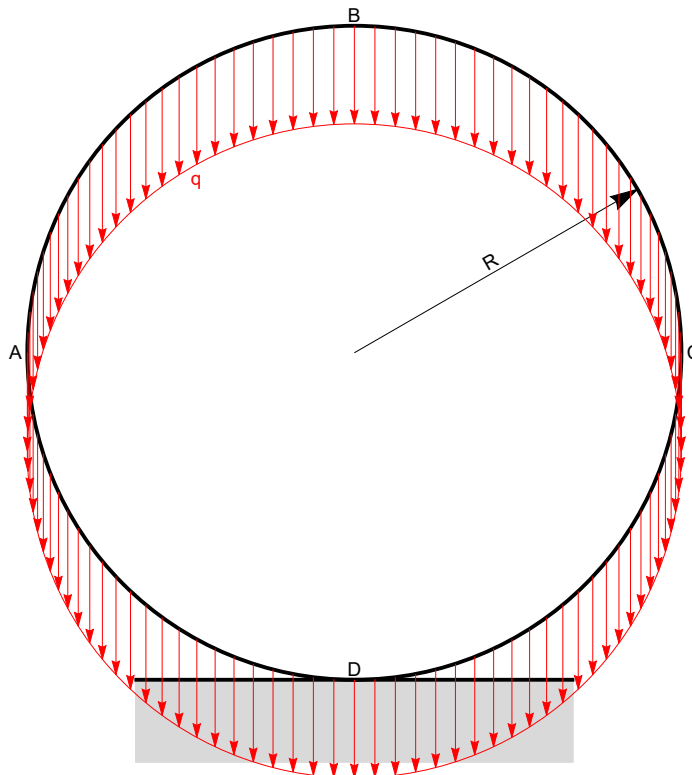


Obruč s tíhou

Zadání



Obruč leží na podlaze a je zatížená vlastní tíhou

Dáno:

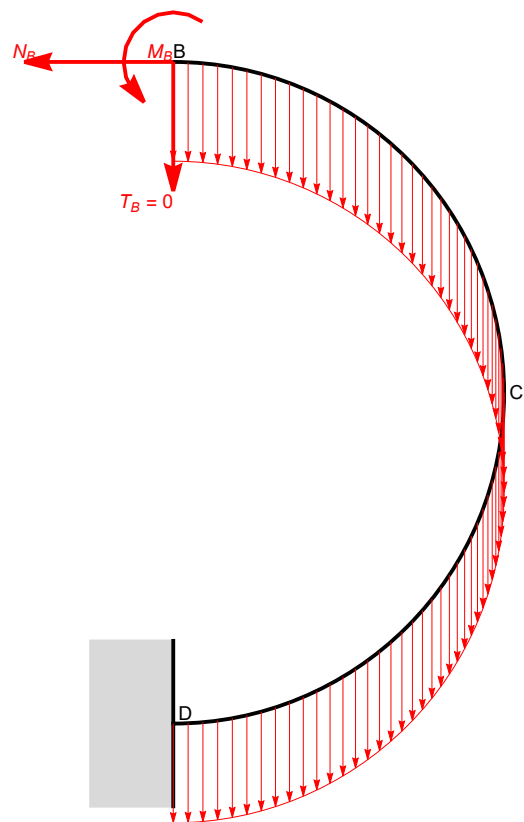
R , E , J , q

Určete:

- δ_{AC}
- δ_{BD}
- průběh ohybového momentu (vztahy i graf),

Řešení

Využijeme symetrie zadání a budeme řešit pouze polovinu rámu. V místech, kde jsme odstranili druhou polovinu, musíme pak předepsat odpovídající deformační podmínky, nebo aplikovat vhodné vazby. Na ose symetrie bude také nulová posouvající síla.

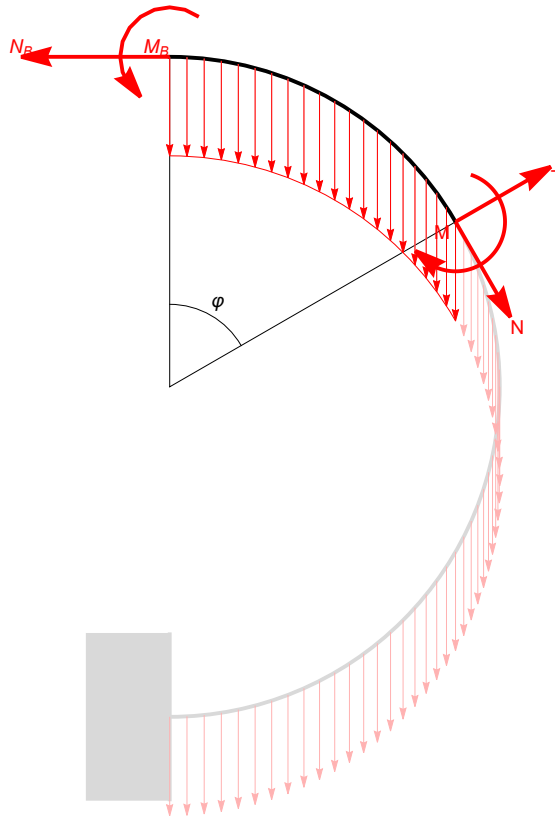


$$u_B = 0, \quad (1)$$

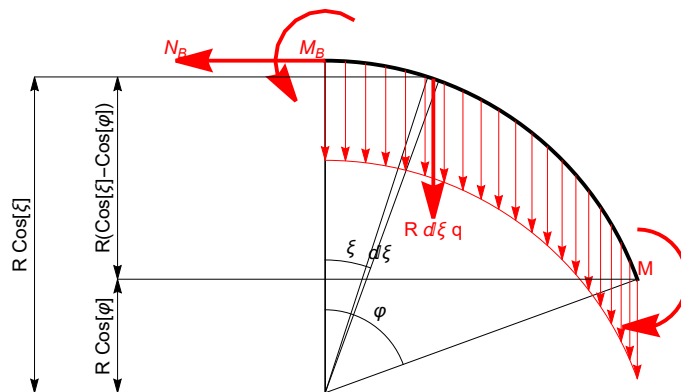
$$\varphi_B = 0. \quad (2)$$

Vnitřní ohybový moment

Zavedeme si úhlovou souřadnici φ podle obrázku.



Vnitřní moment je způsoben silou N_B , momentem M_B a spojitým zatížením. Moment od spojitého zatížení určíme jako integrál momentů od sil na nekonečně krátké úseky nosníku $d\xi$, jak znázorňuje obrázek.



$$M = M_B + N_B R (1 - \cos(\varphi)) + \int_0^\varphi R q R (\cos(\xi) - \cos(\varphi)) d\xi \quad (3)$$

Po integraci má moment tuto podobu:

$$M = M_B + R (q R (\sin(\varphi) - \varphi \cos(\varphi)) - N_B (\cos(\varphi) - 1)) \quad (4)$$

Deformační energie

Obecný vztah

$$U = \int_0^{\pi} \frac{M^2}{2 \mathbb{E} J} d\varphi \quad (5)$$

po integraci dává tvar

$$U = \frac{24 R M_B (\pi N_B + 4 q R) + 12 \pi M_B^2 + 6 R^2 N_B (3 \pi N_B + (16 + \pi^2) q R) + \pi (15 + 2 \pi^2) q^2 R^4}{24 \mathbb{E} J} \quad (6)$$

Defomační rovnice

Obecný tvar deformačních rovnic

$$u_B = \frac{\partial U}{\partial N_B} = \theta \quad (7)$$

$$\varphi_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = \theta \quad (8)$$

dává po dosazení za deformační energii

$$u_B = \frac{R (4 \pi M_B + R (6 \pi N_B + (16 + \pi^2) q R))}{4 \mathbb{E} J} \quad (9)$$

$$\varphi_B = \frac{\pi M_B + \pi R N_B + 4 q R^2}{\mathbb{E} J} \quad (10)$$

Jde o dvě rovnice pro dvě neznámé N_B a M_B .

Řešení rovnic

Řešením rovnic získáme hodnoty neznámých N_B a M_B

$$N_B = -\frac{1}{2} \pi q R \quad (11)$$

$$M_B = \frac{(\pi^2 - 8) q R^2}{2 \pi} \quad (12)$$

Vnitřní ohybový moment

Dosadíme do vztahu pro moment a získáme

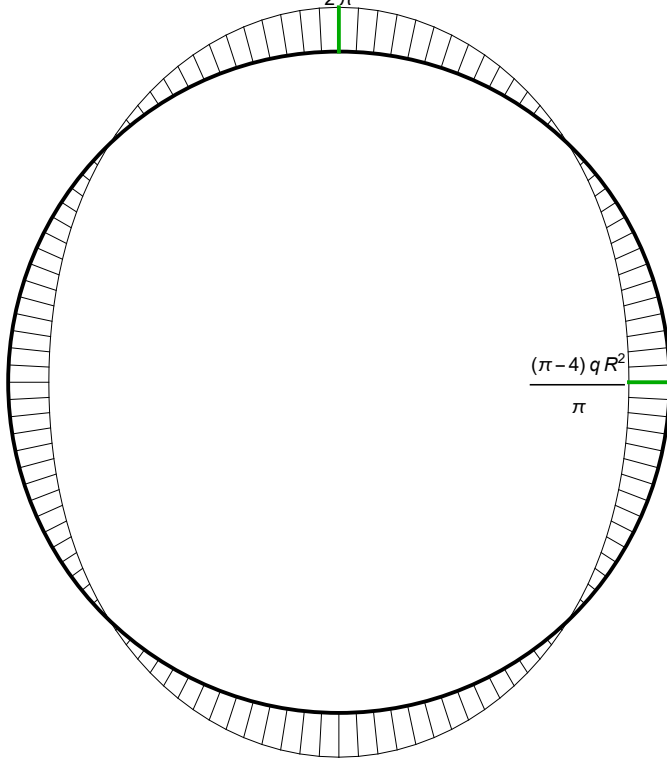
$$M = \frac{q R^2 (2 \pi \sin(\varphi) + \pi (\pi - 2 \varphi) \cos(\varphi) - 8)}{2 \pi} \quad (13)$$

Průběh ohybového momentu

Průběh ohybového momentu a zvýrazněné extrémy ukazuje obrázek

$$\frac{(\pi^2 - 8)qR^2}{2\pi}$$

$$2\pi$$



$$\frac{(\pi - 4)qR^2}{\pi}$$

$$\pi$$