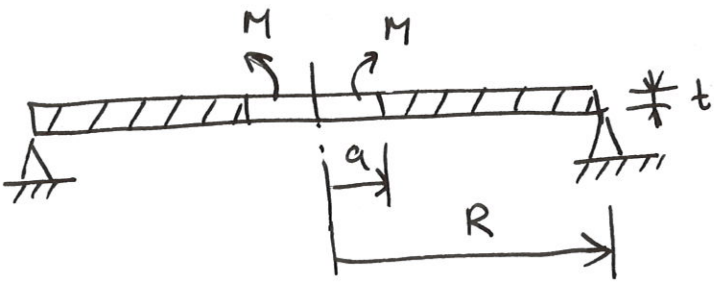
Deska s otvorem



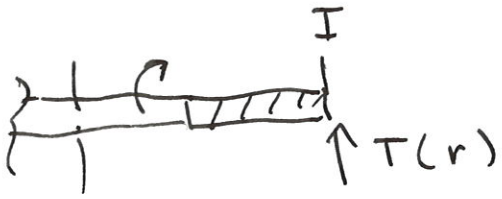
Dáno:

- materiál E; ν
- rozměry desky:
  t; a; R
- zatížení M
  (rozměr M je $\underline{\underline{N}}$;
  je to ~~[illegible]~~ Nm na metr)

Určit:

- průběhy momentů
- průhyb

- vedeme myšlený řez



rovnice rovnováhy: $T(r) = 0$
$T(\rho) = 0$

pro $\rho \in \left(a/R;\ 1\right)$

- máme dif. rovnici popisující desku

$$\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\vartheta}{d\rho} - \frac{\vartheta}{\rho^2} = 0$$

ta má homogenní řešení ve tvaru

$$\vartheta = c_1 \rho + c_2 \frac{1}{\rho}$$

Konstanty c_1 a c_2 určíme z okrajových podmínek

$M_r\,(a/R) = M$ .... na vnitřním okraji zatížená momentem

$M_r\,(1) = \emptyset$ .... na vnějším okraji volná

$$M_r = \frac{D}{R} \cdot \left[\frac{d\vartheta}{dr} + \nu \frac{\vartheta}{r} \right]$$

D ... tuhost

$$D = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)}$$

$$\vartheta = c_1 \rho + c_2 \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\vartheta}{d\rho} = c_1 - c_2 \frac{1}{\rho^2}$$

$$\frac{\vartheta}{\rho} = c_1 + c_2 \frac{1}{\rho^2}$$

$$M_r = \frac{D}{R} \left[c_1 - c_2 \frac{1}{\rho^2} + \nu c_1 + \nu c_2 \frac{1}{\rho^2} \right] = \frac{D}{R} \left[c_1 (1+\nu) - c_2 \cdot \frac{1}{\rho^2} (1-\nu) \right]$$

---

druhá op: $M_r\,(1) = \emptyset$

$$c_1 (1+\nu) - c_2 (1-\nu) = \emptyset$$

$$c_1 = c_2 \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}$$

$$M_r\left(a/R\right) = M$$

$$M_r = \frac{D}{R}\cdot\left[c_1(1+\nu) - c_2\frac{1}{\rho^2}(1-\nu)\right] =$$

$$= \frac{D}{R}\cdot\left\{c_2\cdot(1-\nu)\left[1-\frac{1}{\rho^2}\right]\right\} = M_R$$

$$M = \frac{D}{R}\cdot c_2\,(1-\nu)\cdot\left[1-\frac{R^2}{a^2}\right]$$

$$\boxed{c_2 = \frac{M\cdot R}{D(1-\nu)}\;\frac{a^2}{a^2-R^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{M\,R}{D\,(1+\nu)}\;\frac{a^2}{a^2-R^2}}$$

Známe obě konstanty $\Rightarrow$
známe průběh natočení

$$\vartheta = \frac{Ma^2R}{D\cdot(a^2-R^2)}\left[\frac{\rho}{(1+\nu)} + \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{(1-\nu)}\right]$$

Dopočítáme průhyb $\underline{w}$:

$$w = -R\int \vartheta\, d\rho$$

$$w = -\frac{Ma^2R^2}{(a^2-R^2)D}\int\left(\frac{\rho}{1+\nu}+\frac{1}{\rho}\,\frac{1}{1-\nu}\right)d\rho =$$

neurčitý integrál $\Rightarrow$ bude tam konstanta neznámá

$$= -\frac{Ma^2R^2}{(a^2-R^2)D}\left\{\frac{\rho^2}{2(1+\nu)} + \ln\rho\,\frac{1}{(1-\mu)} + c_3\right\}$$

konstantu dopočteme z známého nulového posunu na kraji desky

$$w(1) = \emptyset$$

$$\frac{1}{2(1+\nu)} + c_3 = \emptyset \qquad c_3 = -\frac{1}{2(1+\nu)}$$

$$\Rightarrow \boxed{w(\rho) = -\frac{Ma^2R^2}{(a^2-R^2)D}\cdot\left\{\frac{\rho^2}{2(1+\nu)} + \ln\rho\,\frac{1}{(1-\nu)} - \frac{1}{2(1+\nu)}\right\}}$$

Průběhy momentů

viz druhý list

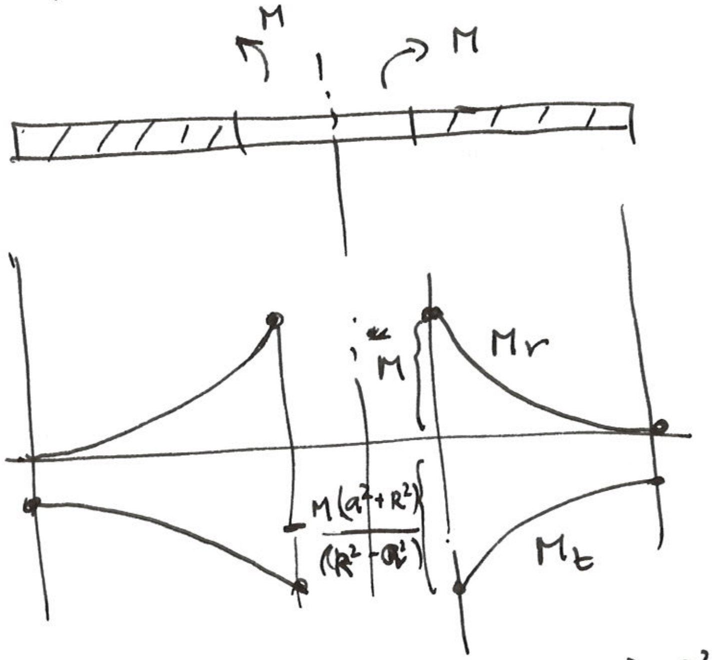
$$M_r = \frac{D}{R}\left[\frac{d\vartheta}{d\rho} + \nu\frac{\vartheta}{\rho}\right] = \frac{D}{R}\left[c_1(1+\nu) - c_2\frac{1}{\rho^2}(1-\nu)\right] =$$

$$= \frac{Ma^2}{a^2-R^2}\cdot\left[1-\frac{1}{\rho^2}\right] = M_r$$

$$M_t = \frac{D}{R}\left(\frac{\vartheta}{\rho} + \nu\frac{d\vartheta}{d\rho}\right] = \frac{D}{R}\cdot\left(c_1 + c_2\frac{1}{\rho^2} + \nu c_1 - c_2\nu\frac{1}{\rho^2}\right) =$$

$$= \frac{D}{R}\left(c_1(1+\nu) + \frac{c_2}{\rho^2}(1-\nu)\right) = \frac{Ma^2}{a^2-R^2}\cdot\left[1+\frac{1}{\rho^2}\right] = M_t$$

průběhy



$$\frac{2Ma^2}{a^2-R^2} = -\frac{2Ma^2}{R^2-a^2}$$

$a^2 - R^2$ … záporné číslo