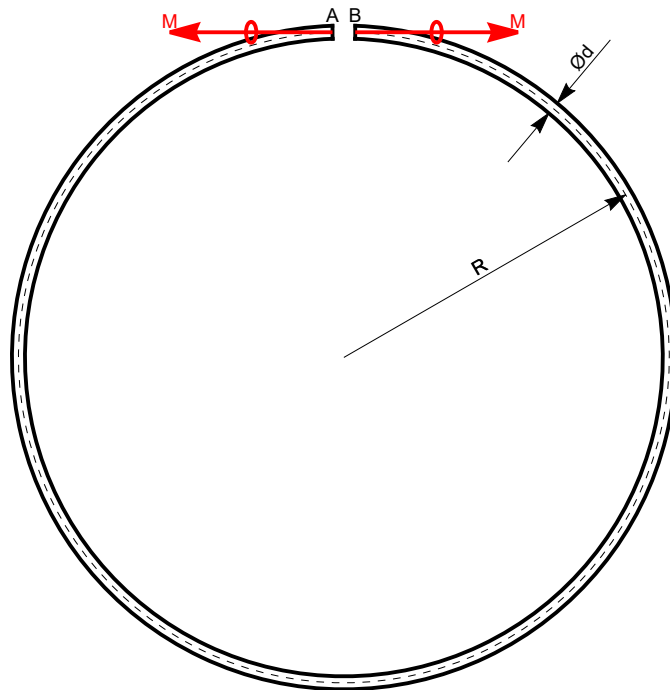


# Kroužek s krutem a ohybem

## Zadání



Štíhlý kroužek je přerušeny tenkou štěrbinou mezi body A a B a zatížený momenty podle obrázku

**Dáno:**

$R, d \ll R, E, \mu, M$

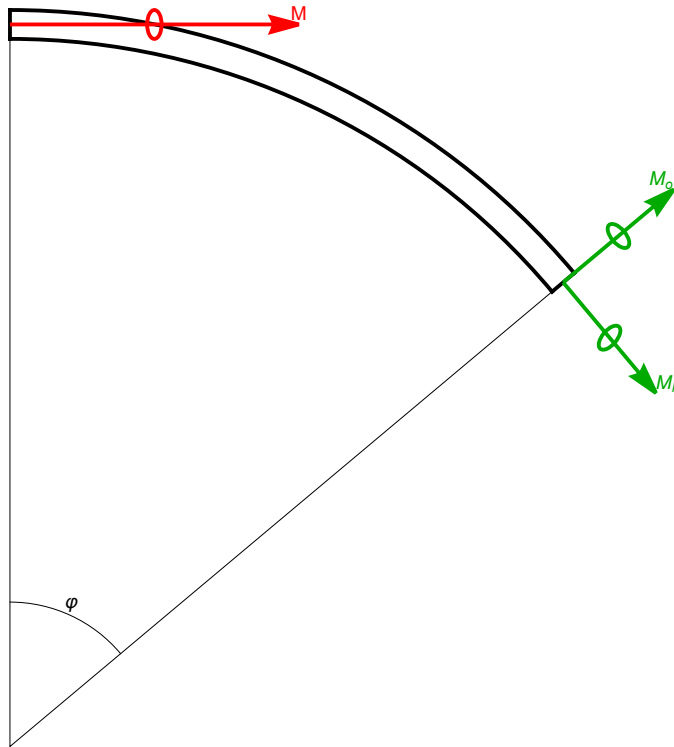
**Určete:**

- změnu vzdálenosti bodů A a B  $\delta_{AB}$
- průběhy momentů (vztahy i grafy),
- Maximální namáhání kroužku

## Řešení

### Vnitřní statické účinky

Myšlený řez provedeme na souřadnici  $\varphi$ . Zavedeme vnitřní statické účinky. Moment ležící v ose tyče bude koutící ( $M_k$ ), moment kolmý k ose tyče bude ohybový ( $M_o$ ).



$$M_o = -M \sin[\varphi] \quad (1)$$

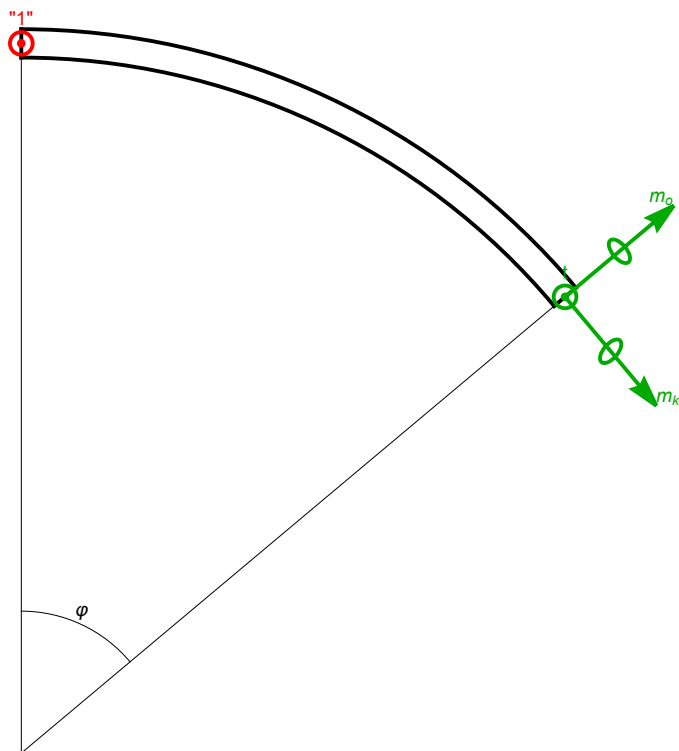
$$M_k = -M \cos[\varphi] \quad (2)$$

### Vnitřní statické účinky od jednotkového účinku

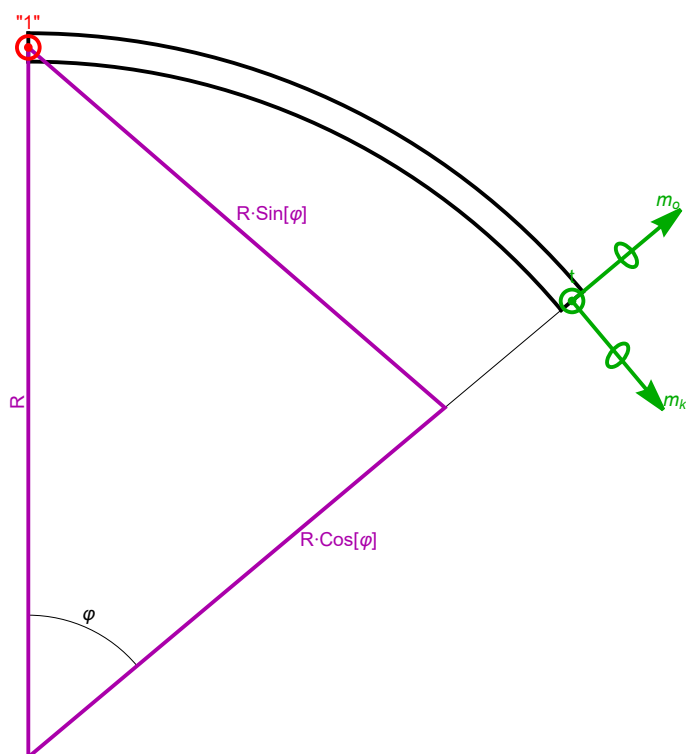
Budeme-li chtít použít Mohrův integrál, musíme v místě a ve směru hledané deformace aplikovat jednotkový účinek. Protože hledáme posuv, bude tímto účinkem síla. Posuv se evidentně odehraje ve směru kolmém k nárysně. Proto bude tato síla kolmá k nárysně.

Na následujícím obrázku je znázorněna metoda řezu pro takovýto jednotkový účinek.

Jednotková síla kolmá k nárysně způsobí v místě řezu ohybový moment  $m_o$ , kroutící moment  $m_k$  a posouvající sílu kolmou k nárysně  $t$ .



Abychom stanovili velikosti vnitřních statických účinků  $m_k$  a  $m_o$ , zakreslíme si trojúhelník, z něhož už snadno získáme příslušná ramena silového účinku



$$m_o = -1 \cdot R \cdot \text{Sin}[\varphi]; \quad (3)$$

$$m_k = 1 \cdot R \cdot (1 - \text{Cos}[\varphi]); \quad (4)$$

## Mohrův integrál

Mohrův integrál má tento tvar

$$\delta_{AB} = \int_0^{2\pi} \frac{M_o m_o}{E J_{ohyb}} R d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{M_k m_k}{G J_{krut}} R d\varphi, \quad (5)$$

což po integraci dává

$$\delta_{AB} = \frac{\pi M R^2}{G J_{krut}} + \frac{\pi M R^2}{E J_{ohyb}}. \quad (6)$$

## Kvadratické momenty a modul G

Pro kruhový průřez tyče platí známé vztahy

$$J_{ohyb} = \frac{\pi d^4}{64}, \quad (7)$$

$$J_{krut} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (8)$$

Modul pružnosti ve smyku G většinou pro daný materiál neznáme. V PP1 jsme si však odvodili vztah mezi E, G a  $\mu$ , z něhož hodnotu G snadno určíme:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}. \quad (9)$$

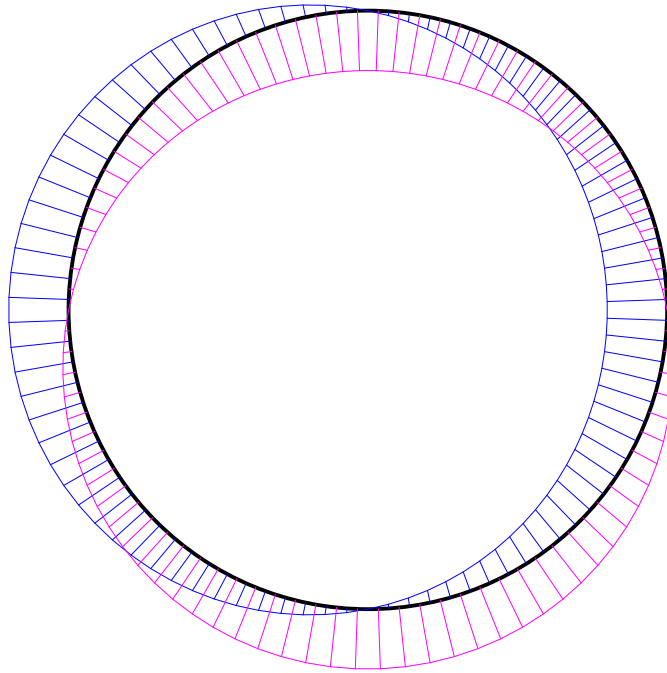
## Výsledná deformace

Po dosazení za  $J_{ohyb}$ ,  $J_{krut}$  a G dostaneme finální podobu hledané veličiny

$$\delta_{AB} = \frac{64 M R^2 (2 + \mu)}{d^4 E}. \quad (10)$$

## Průběh vnitřních statických účinků

Vztahy pro kroutící a ohybový moment jsme stanovili dříve, následující obrázek ukazuje jejich průběh podél prstence. Modře je znázorněn ohybový moment, fialově moment kroutící.



## Namáhání kroužku

### Jednotlivá napětí

Kroužek je namáhán ohybovým a kroutícím momentem. Kroutící moment způsobí smykové napětí  $\tau$  po celém obvodu průřezu tyče. Ohybový moment způsobí tahové napětí  $\pm\sigma$  na dvou protilehlých místech obvodu průřezu tyče. Platí přitom

$$\tau = \frac{M_k}{W_k}, \quad (11)$$

$$\sigma = \frac{M_o}{W_o}, \quad (12)$$

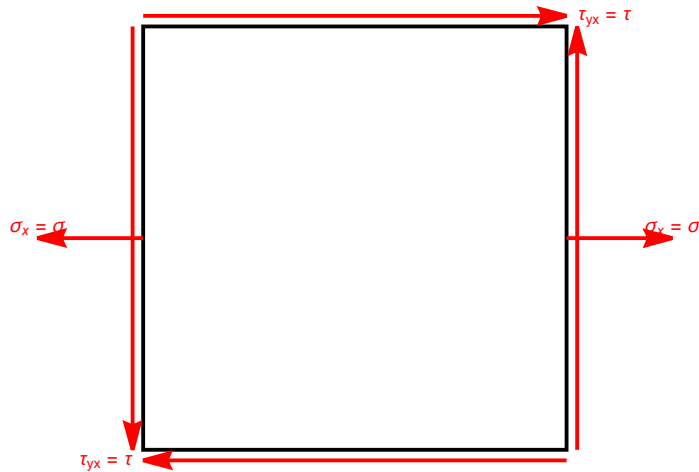
kde

$$W_k = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (13)$$

$$W_o = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (14)$$

### Napětí v nejnamáhanějším místě obvodu tyče

Element materiálu v nejnamáhanějším místě obvodu průřezu tyče vypadá takto.



## Ekvivalentní napětí podle hypotézy HMM

Obecný tvar ekvivalentního napětí

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (15)$$

přechází v našem případě do této podoby

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} . \quad (16)$$

Po dosazení dostáváme pro ekvivalentní napětí tento tvar

$$\sigma_{ekv} = \frac{8 \sqrt{2} M \sqrt{7 - \text{Cos} [2 \varphi]}}{d^3 \pi} . \quad (17)$$

Průběh ekvivalentního napětí a jeho extrémů vidíme na grafu:

