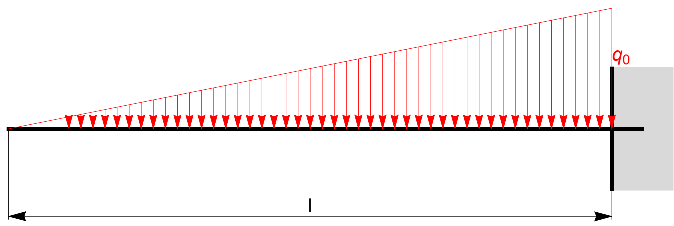
# Průhyb nosníku

## Zadání




Nosník je zatížen lineárně proměnným spojitým zatížením a vetknutý na pravém konci.

Dáno: l, $\mathbb{E}$, $J_y$, $q_0$

Určete: průhyb uprostřed nosníku

## Řešení

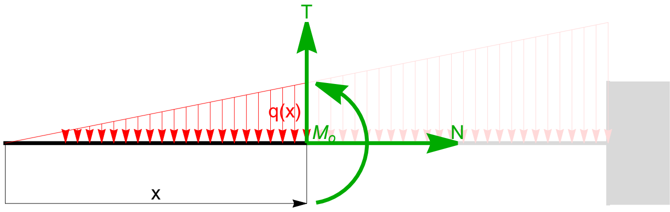
Problém budeme řešit několika způsoby:

- Diferenciální rovnicí průhybové čáry;
- Mohrovou metodou náhradního nosníku;
- Castigliánovou větou;
- Mohrovým integrálem.

Ve všech případech musíme začít určením průběhu ohybového momentu. Ten můžeme určit pomocí

- Metody řezu;
- Schwedlerovy věty.

## Vnitřní statické účinky metodou řezu




$$ \tag{1}$$

$$q[x] = \frac{q_0}{l} x \tag{2}$$

$$M = -\frac{1}{2} q[x] \cdot x \cdot \frac{1}{3} \cdot x = -\frac{x^3 q_0}{6 l} \tag{3}$$

## Vnitřní statické účinky pomocí Schwedlerovy věty zleva

Schwedlerova věta zleva má tvar

$$T'[x] = -q[x], \tag{4}$$

$$M'[x] = T[x]. \tag{5}$$

Po dosazení za q[x] do první části Schwedlerovy věty a po integraci dostaneme vztah

$$T[x] = -\frac{q_0}{2 l} x^2 + K_1. \tag{6}$$

Na levém konci nepůsobí žádná svislá síla, takže z okrajové podmínky

$$T[0] = 0 \tag{7}$$

dostaneme hodnotu integrační konstanty $K_1$

$$K_1 = 0 \tag{8}$$

a platí tedy

$$T[x] = -\frac{q_0}{2 l} x^2. \tag{9}$$

Dosadíme T[x] do druhé části Schwedlerovy věty a po integraci dostaneme pro moment

$$M[x] = -\frac{q_0}{6 l} x^3 + K_2. \tag{10}$$

Na levém konci nepůsobí žádný osamělý moment, takže z okrajové podmínky

$$M[0] = 0 \tag{11}$$

dostaneme hodnotu integrační konstanty $K_2$

$$K_2 = 0. \tag{12}$$

Moment má tedy tvar

$$M[x] = -\frac{q_0}{6 l} x^3. \tag{13}$$

## Diferenciální rovnice průhybové čáry

Obecný tvar diferenciální rovnice

$$w'' = -\frac{M}{\mathbb{E} J} \tag{14}$$

vypadá v našem případě po dosazení za M takto

$$w'' = -\frac{x^3 q_0}{6 l}. \tag{15}$$

Po dvou integracích získáme tvar

$$w = -\frac{x C_1 + C_2 - \frac{x^5 q_0}{120 l}}{J \mathbb{E}}. \tag{16}$$

Okrajové podmínky známe pro pravý (vetknutý) konec a mají podobu

$$w[l] = 0, \tag{17}$$

$$w'[l] = 0. \tag{18}$$

Dosazením a řešením okrajových podmínek určíme integrační konstanty. Jejich hodnoty jsou

$$C_1 = \frac{l^3 q_0}{24}, \tag{19}$$

$$C_2 = -\frac{1}{30} l^4 q_0. \tag{20}$$

Po dosazení konstant do vztahu pro půhyb dostaneme tvar

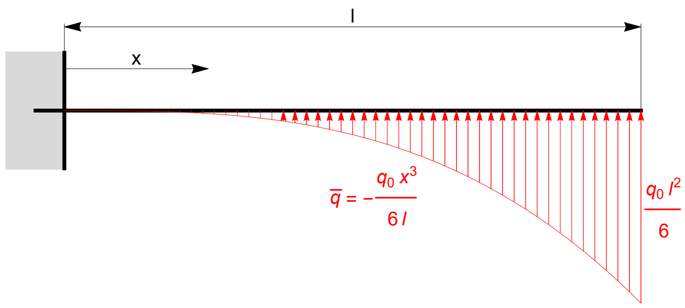
$$w = \frac{\left(4 l^5 - 5 l^4 x + x^5\right) q_0}{120 J l \mathbb{E}}, \tag{21}$$

do něhož nakonec dosadíme $x = \frac{l}{2}$, abychom dostali požadovanou veličinu:

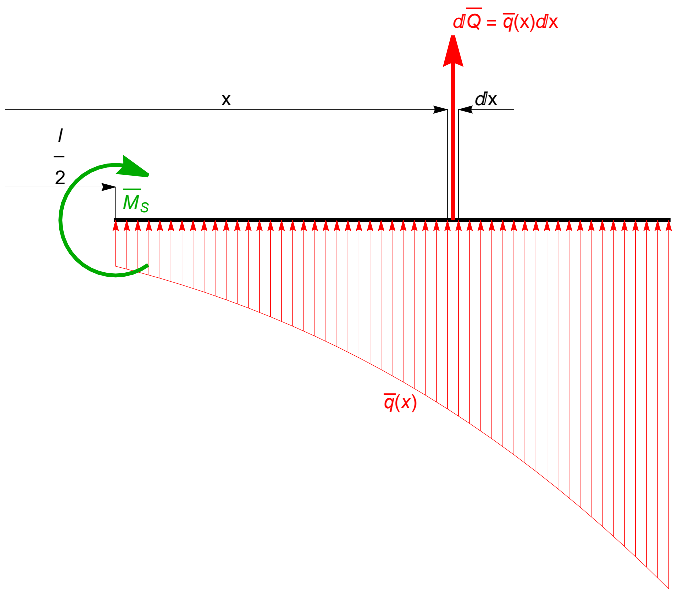
$$w\left[\frac{l}{2}\right] = \frac{49 l^4 q_0}{3840 J \mathbb{E}}. \tag{22}$$

## Mohrova metoda náhradního nosníku

Podle známých pravidel sestrojíme náhradní nosník.




V tomto nosníku určíme ohybový moment uprostřed $\overline{M}_S$ například tímto postupem:




(23)

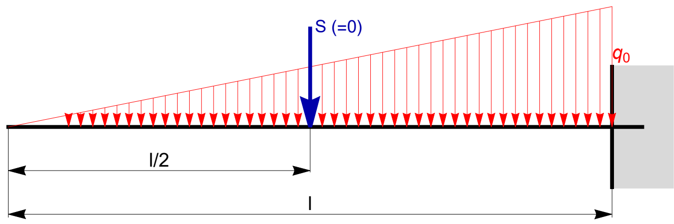
$$\overline{M}_S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -\overline{q}[x]\left(x - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{49\, 1^4\, q_0}{3840} \tag{24}$$

Průhyb pak dostaneme vydělením $M_S$ součinem $\mathbb{E} \cdot J$:

$$w\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{M_S}{\mathbb{E}\, J} = \frac{49\, 1^4\, q_0}{3840\, J\, \mathbb{E}}. \tag{25}$$

## Castigliánova věta

Budeme hledat průhyb uprostřed nosníku. Zavedeme tam tedy svislou sílu S, za kterou na konci výpočtu dosadíme S=0.




V pravé části nosníku tedy v metodě řezu přibyde člen způsobený silou S a pro ohybový moment platí

$$M = \begin{cases} M_1 = -\frac{x^3 q_0}{6\, l} & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ M_2 = -\frac{x^3 q_0}{6\, l} - S\left(x - \frac{l}{2}\right) & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases} \tag{26}$$

Deformační energie U má tvar

$$U = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_1^2}{2\, \mathbb{E}\, J}\, dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{M_2^2}{2\, \mathbb{E}\, J}\, dx, \tag{27}$$

což po integraci dává

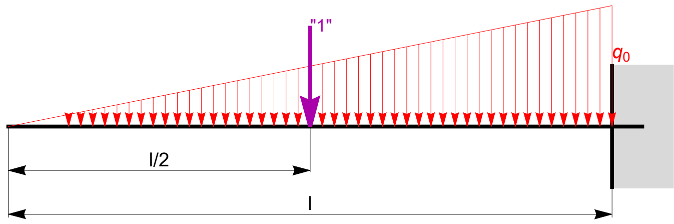
$$U = \frac{l^3 \left(1680\, S^2 + 1029\, l\, S\, q_0 + 160\, l^2\, q_0^2\right)}{80\,640\, J\, \mathbb{E}} \tag{28}$$

Průhyb uprostřed nosníku dostaneme jako deriavaci U podle S, do níž dosadíme S = 0:

$$w\left[\frac{l}{2}\right] = \frac{\partial U}{\partial S}\,|_{S \to 0} = \frac{49\, l^4\, q_0}{3840\, J\, \mathbb{E}}. \tag{29}$$

## Mohrův integrál

Budeme hledat průhyb uprostřed nosníku. Zavedeme tam tedy svislý jednotkový účinek:




Pro ohybový moment platí dříve odvozený vztah

$$M = -\frac{x^3 q_0}{6 l}, \tag{30}$$

zatímco pro moment od jednotkového účinku dostáváme vztahy

$$m = \begin{cases} m_1 = 0 & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ m_2 = -1 \left(x - \frac{l}{2}\right) & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}. \tag{31}$$

Mohrův intergál pro hledaný průhyb má tvar

$$w\left[\frac{l}{2}\right] = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M m_1}{\mathbb{E} J} \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{M m_2}{\mathbb{E} J} \, \mathrm{d}x, \tag{32}$$

což po integraci dává

$$w\left[\frac{l}{2}\right] = \frac{49 l^4 q_0}{3840 J \mathbb{E}}. \tag{33}$$