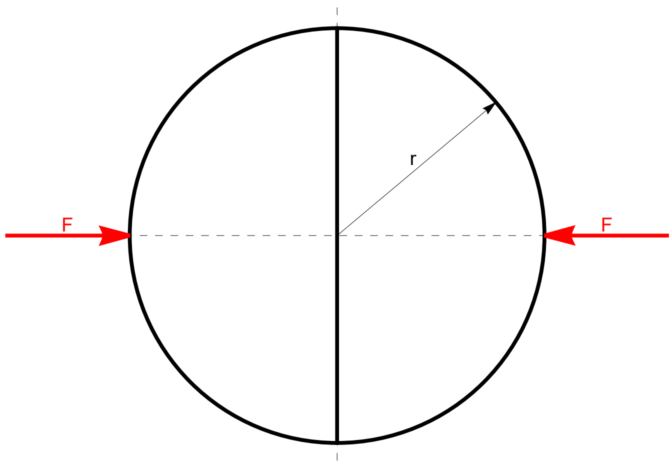
Kruhový rám s příčkou

Zadání



kruhový rám je namáhaný silami F podle obrázku

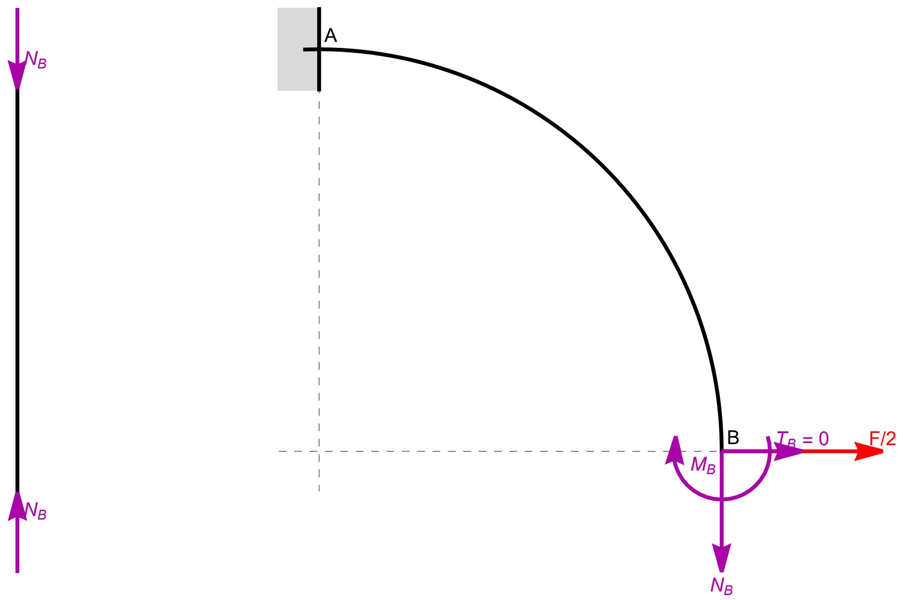
Dáno: F, r, E, J (průřezová charakteristika kruhové části), S (plocha průřezu příčky)

Určete:

- Vnitřní ohybový moment - vztahy i graf
- Změnu vodorovného průměru kroužku
- Změnu délky příčky

Řešení

S ohledem na symetrii zadání můžeme řešit pouze jednu čtvrtinu rámu.
Na levé části obrázku vidíme polovinu délky příčky s poloviční plochou průřezu.
V pravé části vidíme čtvrtkroužek, na který kromě ohybového momentu M_B působí normálová síla N_B. Velikost této síly musí být také v příčce, bude tam ale jako síla tlaková. To snadno zjistíme, pokud si nakreslíme rovnováhu celého rámu, přeříznutého vodorovným řezem.



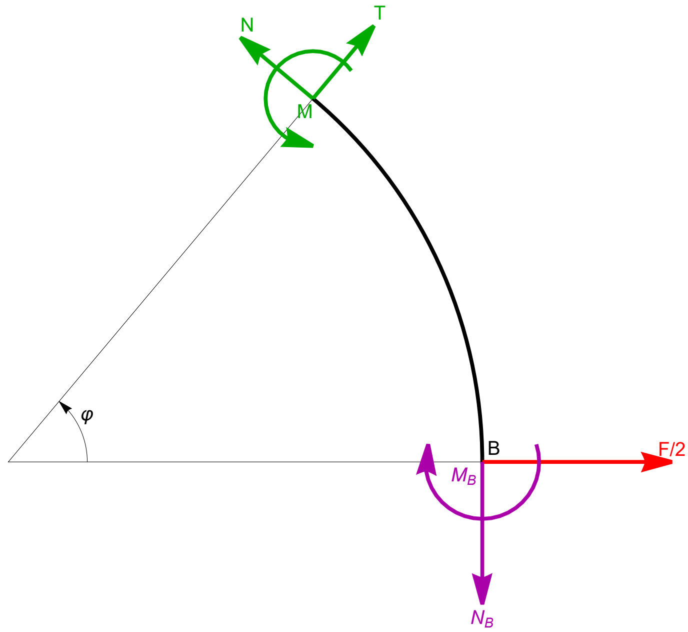
K této konstrukci musíme předepsat deformační rovnice. První z nich zajišťuje zachování symetrie podle vodorovné osy v bodě B:

$$\varphi_B = 0. \tag{1}$$

Druhá deformační rovnice říká, že prodloužení příčky je shodné se svislým posuvem bodu B. Protože v příčce je *tlaková* síla N_B, platí pro svislý posuv bodu B (směrem dolů, tedy ve směru N_B):

$$v_B = \frac{-N_B\, r}{\mathbb{E}\, \frac{S}{2}}. \tag{2}$$

Vnitřní ohybový moment



$$M = -\frac{1}{2} F\, r\, \mathrm{Sin}[\varphi] + M_B + r\, (1 - \mathrm{Cos}[\varphi])\, N_B. \tag{3}$$

Deformační energie

Dosazením do obecného vztahu a integrací dostaneme pro deformační energii vztah

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 r}{2\,\mathbb{E}\,J}\,d\varphi = \frac{r\left(8\pi M_B^2 - 16\,r\,M_B\,(F - (-2+\pi)\,N_B) + r^2\left(F^2\pi - 8\,F\,N_B + 4\,(-8+3\pi)\right.\right.}{32\,J\,\mathbb{E}} \tag{4}$$

Deformační rovnice a jejich řešení

Deformační rovnice získáme pomocí Castigliánovy věty a budou mít tvar

$$\varphi_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = \frac{r\,(-F\,r + \pi M_B + (-2+\pi)\,r\,N_B)}{2\,J\,\mathbb{E}} = 0, \tag{5}$$

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial N_B} = -\frac{r^2\,(-2\,(-2+\pi)\,M_B + r\,(F + (8-3\pi)\,N_B))}{4\,J\,\mathbb{E}} = -\frac{2\,r\,N_B}{S\,\mathbb{E}}. \tag{6}$$

Řešením těchto rovnic dostaneme hodnoty M_B a N_B:

$$M_B = \frac{2\,F\left(4\,J\,r + (-3+\pi)\,r^3\,S\right)}{8\,J\,\pi + \left(-8+\pi^2\right)r^2\,S}, \tag{7}$$

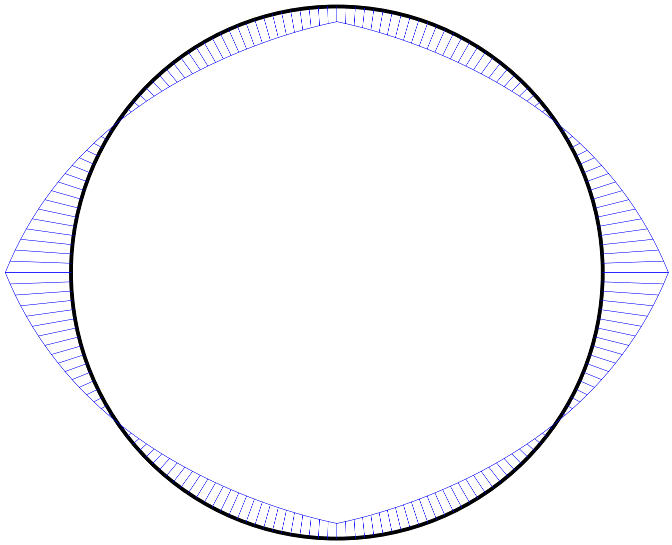
$$N_B = -\frac{F\,(-4+\pi)\,r^2\,S}{8\,J\,\pi + \left(-8+\pi^2\right)r^2\,S}. \tag{8}$$

Průběh ohybového momentu

Po dosazení vztahů pro M_B a N_B do vztahu pro vnitřmí moment dostáváme

$$M = \frac{F\, r \left(2 \left(8\, J + (-2+\pi)\, r^2\, S\right) + 2\, (-4+\pi)\, r^2\, S\, \mathrm{Cos}[\varphi] - \left(8\, J\, \pi + \left(-8+\pi^2\right) r^2\, S\right) \mathrm{Sin}[\varphi]\right)}{2 \left(8\, J\, \pi + \left(-8+\pi^2\right) r^2\, S\right)}. \tag{9}$$

Případ, kdy číselná hodnota S je 10× větší, než číselná hodnota J, znázorňuje následující obrázek:



Změna délky příčky

Protože už známe sílu v příčce (je to dvojnásobek síly N_B), tak snadno určíme, že změna délky příčky je

$$\triangle_{\text{příčky}} = \frac{2\, N_B\, 2\, r}{\mathbb{E}\, S} = -\frac{4\, F\, (-4+\pi)\, r^3}{\left(8\, J\, \pi + \left(-8+\pi^2\right) r^2\, S\right) \mathbb{E}}. \tag{10}$$

Změna vodorovného rozměru kroužku

Tuto změnu určíme jako dvojnásobek derivace deformační energie U podle $\frac{F}{2}$

$$\triangle_{\text{Horiz}} = \frac{4\, \partial U}{\partial F} = \tag{11}$$

$$\left(F\, r^3 \left(64\, J^2\, \pi \left(-8+\pi^2\right) + 16\, J\, \pi \left(32 - 20\, \pi + \pi^3\right) r^2\, S + (-2+\pi) \left(-8\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.(-16 + \pi\, (2+\pi))\, r^4\, S^2\right)\right) \Big/ \left(4\, J \left(8\, J\, \pi + \left(-8+\pi^2\right) r^2\, S\right)^2 \mathbb{E}\right).$$

Tuhá příčka

Představíme-li si, že je příčka zcela nepoddajná, můžeme to zapsat například tak, že necháme plochu průřezu limitovat k nekonečnu. Když to uděláme, dostaneme velikosti M_B a N_B pro tuhou příčku:

$$M_{B\,\text{tuhá příčka}} = \text{Lim}_{S\to\infty}[M_B] = \frac{2F(-3+\pi)r}{-8+\pi^2} = 0.151468\,F\,r, \tag{12}$$

$$N_{B\,\text{tuhá příčka}} = \text{Lim}_{S\to\infty}[N_B] = -\frac{F(-4+\pi)}{-8+\pi^2} = 0.459138\,F. \tag{13}$$

Téhož výsledku dosáhneme také třeba tak, že si uvědomíme, že tuhá příčka se nemůže deformovat. Deformační rovnice (2) (resp. (6)) má pak tvar

$$v_B = 0, \tag{14}$$

resp.

$$-\frac{r^2\left(-2(-2+\pi)M_B + r\left(F + (8-3\pi)N_B\right)\right)}{4\,J\,\mathbb{E}} = 0. \tag{15}$$